BURHAN

Continuité : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Application	8

Exercice 1

Continue d'un seul côté

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1.

Calculer $f(3)$, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.

INDICE

Outil : pour chaque calcul, prends l'expression valable du côté considéré.

Point délicat : $f(3)$ se calcule avec l'expression écrite pour $x \geq 3$.

2.

La fonction f est-elle continue à droite en 3 ? à gauche en 3 ? continue en 3 ?

INDICE

Outil : compare chacune des deux limites à l'image $f(3)$.

Exercice 2

Boucher un trou par une limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$$

1.

Factoriser $x^2 + 2x - 15$, puis simplifier l'écriture de $f(x)$ pour $x \neq 3$.

INDICE

Outil : le réel 3 annule $x^2 + 2x - 15$; cherche l'autre racine.

Point délicat : la simplification par $x - 3$ n'est permise que si $x \neq 3$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} f(x)$, puis définir le prolongement par continuité g de f en 3.

INDICE

Début : utilise l'écriture simplifiée, valable près de 3.

Ensuite : en 3, g prend la valeur de la limite.

Exercice 3

Continuité par les opérations

1.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 7}{x + 4}$$

Préciser l'ensemble de définition de f, puis justifier que f est continue sur chacun des intervalles qui le composent.

INDICE

Outil : un quotient de polynômes est continu là où son dénominateur ne s'annule pas.

2.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 3x^2 - 5 + \sqrt{x}$. Justifier que h est continue sur $[0; +\infty[$.

INDICE

Outil : écris h comme la somme de deux fonctions dont tu connais la continuité.

Exercice 4

Deux composées continues

1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x - 6}$. Justifier que f est continue sur $[3; +\infty[$.

INDICE

Outil : écris f comme la composée de $u : x \mapsto 2x - 6$ suivie de la racine carrée.

Point délicat : vérifie que $2x - 6 \geq 0$ pour $x \geq 3$.

2.

Soit k la fonction définie par $k(x) = |x^2 - 7x + 10|$. Justifier que k est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Point délicat : ici, aucune condition de signe n'est à vérifier.

Exercice 5

Image d'un segment par une fonction monotone

1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Étudier le sens de variation de f sur $[-1; 2]$, puis déterminer $f([-1; 2])$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$.

Ensuite : pour une fonction strictement croissante, les bornes restent dans l'ordre.

2.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{6}{x + 1}$. Déterminer $g([1; 5])$.

INDICE

Outil : $g'(x) = -\dfrac{6}{(x + 1)^2}$.

Point délicat : la fonction décroît ; quelle borne écris-tu en premier ?

Exercice 6

Une équation qui a au moins une solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$$

1.

Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

INDICE

Outil : remplace x par chaque valeur.

2.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

INDICE

Outil : le théorème des valeurs intermédiaires, avec deux images de signes contraires.

Point délicat : nomme la continuité sur tout le segment $[0;1]$.

3.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[3;4]$.

INDICE

Outil : cette fois, la valeur cherchée est 1 ; vérifie qu'elle est comprise entre $f(3)$ et $f(4)$.

Exercice 7

Une solution, et une seule

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 4x - 1$$

1.

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$; un carré est positif ou nul.

2.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;1]$.

INDICE

Outil : le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone.

Point délicat : trois hypothèses à écrire : continuité, stricte monotonie, signes de $f(0)$ et $f(1)$.

Exercice 8

Retrouver un prix à partir d'une demande

Une boutique estime que, pour un prix p compris entre 0 et 40 dirhams, elle vend $D(p)$ unités d'un article, avec :

$$D(p) = 200 - 5p$$

Ces données sont fictives.

1.

Justifier que D est continue et strictement décroissante sur $[0;40]$, puis déterminer $D([0;40])$.

INDICE

Outil : D est affine ; regarde le signe de son coefficient directeur.

Point délicat : pour une fonction décroissante, les bornes s'échangent.

2.

En déduire que D admet une fonction réciproque D^{-1}, définie sur $[0;200]$, et exprimer $D^{-1}(q)$ en fonction de q.

INDICE

Début : résous l'équation $200 - 5p = q$, d'inconnue p.

3.

Calculer $D^{-1}(80)$ et interpréter ce nombre.

INDICE

Outil : $D^{-1}(80)$ est le prix auquel la boutique vend 80 unités.