BURHAN

Continuité : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Continuité	Application	8

Exercice 1

Continue d'un seul côté

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1.

Calculer $f(3)$, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.

INDICE

Outil : pour chaque calcul, prends l'expression valable du côté considéré.

Point délicat : $f(3)$ se calcule avec l'expression écrite pour $x \geq 3$.

CORRIGÉ

Image. Comme $3 \geq 3$, on utilise l'expression $x^2 - 4$: $f(3) = 9 - 4 = 5$.

Limite à gauche. Pour $x < 3$, $f(x) = 2x + 1$. C'est un polynôme, continu en 3 : $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \times 3 + 1 = 7$.

Limite à droite. Pour $x > 3$, $f(x) = x^2 - 4$, polynôme continu en 3 : $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 9 - 4 = 5$.

Conclusion.

$$\begin{aligned} f(3) &= 5 \\ \lim_{x \to 3^-} f(x) &= 7 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) &= 5 \end{aligned}$$

2.

La fonction f est-elle continue à droite en 3 ? à gauche en 3 ? continue en 3 ?

INDICE

Outil : compare chacune des deux limites à l'image $f(3)$.

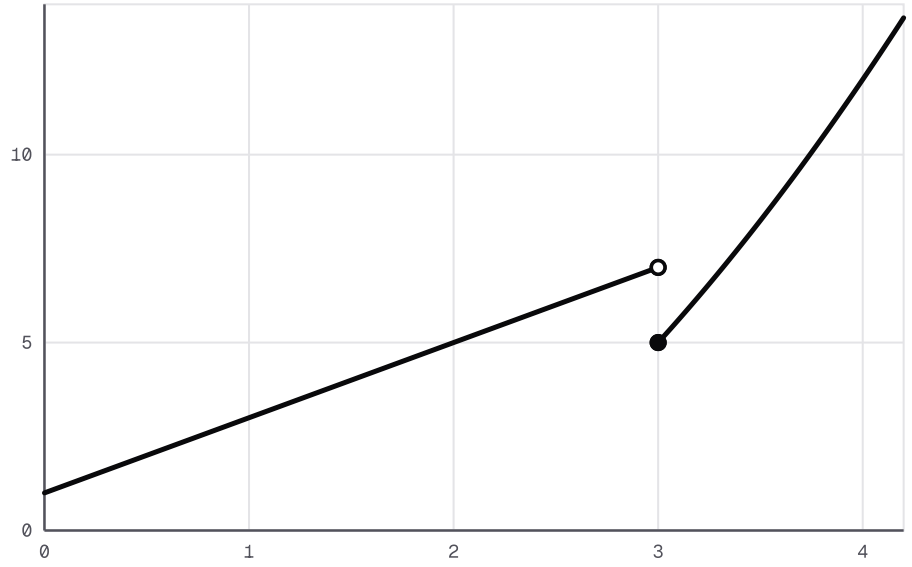
CORRIGÉ

À droite. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$ et $f(3) = 5$: la limite à droite est égale à l'image, donc f est continue à droite en 3.

À gauche. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$ et $7 \neq 5$: la limite à gauche diffère de $f(3)$, donc f n'est pas continue à gauche en 3.

En 3. Pour être continue en 3, f devrait l'être des deux côtés à la fois. Ce n'est pas le cas ici.

Conclusion. f est continue à droite en 3, mais pas à gauche ; elle n'est donc pas continue en 3. Sa courbe saute de la hauteur 7 à la hauteur 5.



$\mathcal{C}_f$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

La courbe de f en deux morceaux : à gauche de 3, elle arrive vers la hauteur 7 sans l'atteindre ; en 3, elle repart de la hauteur 5. Continue à droite en 3, pas à gauche.

Borne exclue en x = 3 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 7.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 7 : limite à gauche estimée numériquement.

Exercice 2

Boucher un trou par une limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$$

1.

Factoriser $x^2 + 2x - 15$, puis simplifier l'écriture de $f(x)$ pour $x \neq 3$.

INDICE

Outil : le réel 3 annule $x^2 + 2x - 15$; cherche l'autre racine.

Point délicat : la simplification par $x - 3$ n'est permise que si $x \neq 3$.

CORRIGÉ

Une racine. $3^2 + 2 \times 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0$, donc 3 est une racine du trinôme $x^2 + 2x - 15$.

L'autre racine. Le produit des deux racines vaut $\dfrac{-15}{1} = -15$. L'autre racine est donc $\dfrac{-15}{3} = -5$. Ainsi, pour tout réel x, $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$.

Simplification. Soit $x \neq 3$. Alors $x - 3 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 3)(x + 5)}{x - 3} \\ &= x + 5 \end{aligned}$$

Conclusion. $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$ et, pour tout $x \neq 3$, $f(x) = x + 5$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} f(x)$, puis définir le prolongement par continuité g de f en 3.

INDICE

Début : utilise l'écriture simplifiée, valable près de 3.

Ensuite : en 3, g prend la valeur de la limite.

CORRIGÉ

Limite. Pour $x \neq 3$, $f(x) = x + 5$, et $x \mapsto x + 5$ est continue en 3. Donc $\lim_{x \to 3} f(x) = 3 + 5 = 8$.

Prolongement. La limite de f en 3 est un réel. Le prolongement par continuité de f en 3 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3 \\ 8 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Conclusion. $\lim_{x \to 3} f(x) = 8$. La fonction g, égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et telle que $g(3) = 8$, est continue en 3 : c'est le prolongement par continuité de f en 3.

Exercice 3

Continuité par les opérations

1.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 7}{x + 4}$$

Préciser l'ensemble de définition de f, puis justifier que f est continue sur chacun des intervalles qui le composent.

INDICE

Outil : un quotient de polynômes est continu là où son dénominateur ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. $f(x)$ existe si et seulement si $x + 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -4$. L'ensemble de définition de f est :

$$]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$$

Continuité. Les fonctions $x \mapsto x^3 - 2x + 7$ et $x \mapsto x + 4$ sont des polynômes, donc continues sur $\mathbb{R}$. La seconde ne s'annule ni sur $]-\infty; -4[$, ni sur $]-4; +\infty[$. Par quotient, f est donc continue sur chacun de ces intervalles.

Conclusion. f est définie sur $]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$ et continue sur chacun des deux intervalles $]-\infty; -4[$ et $]-4; +\infty[$.

2.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 3x^2 - 5 + \sqrt{x}$. Justifier que h est continue sur $[0; +\infty[$.

INDICE

Outil : écris h comme la somme de deux fonctions dont tu connais la continuité.

CORRIGÉ

Deux termes. La fonction $x \mapsto 3x^2 - 5$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; +\infty[$. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

Somme. La somme de deux fonctions continues sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Conclusion. h est continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice 4

Deux composées continues

1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-6}$. Justifier que f est continue sur $[3;+\infty[$.

INDICE

Outil : écris f comme la composée de $u : x \mapsto 2x-6$ suivie de la racine carrée.

Point délicat : vérifie que $2x-6 \geq 0$ pour $x \geq 3$.

CORRIGÉ

Fonction intérieure. La fonction $u : x \mapsto 2x-6$ est un polynôme, continu sur $[3;+\infty[$. Pour $x \geq 3$, on a $2x \geq 6$, donc $u(x) \geq 0$. Ainsi :

$$u\left([3;+\infty[\right) \subset [0;+\infty[$$

Composée. La racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$. D'après la propriété de continuité d'une composée, $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur $[3;+\infty[$.

Conclusion. f est continue sur $[3;+\infty[$.

2.

Soit k la fonction définie par $k(x) = |x^2-7x+10|$. Justifier que k est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Point délicat : ici, aucune condition de signe n'est à vérifier.

CORRIGÉ

Fonction intérieure. La fonction $v : x \mapsto x^2-7x+10$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Composée. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par la propriété de continuité d'une composée, $k : x \mapsto |v(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. k est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Image d'un segment par une fonction monotone

1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Étudier le sens de variation de f sur $[-1;2]$, puis déterminer $f([-1;2])$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$.

Ensuite : pour une fonction strictement croissante, les bornes restent dans l'ordre.

CORRIGÉ

Variations. f est un polynôme : elle est continue et dérivable sur $[-1;2]$. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 3$. Comme $3x^2 \geq 0$, on a $f'(x) \geq 3 > 0$: f est strictement croissante sur $[-1;2]$.

Bornes.

$$f(-1) = -1 - 3 - 2 = -6$$
$$f(2) = 8 + 6 - 2 = 12$$

Image. L'image d'un segment par une fonction continue et strictement croissante est le segment des images des bornes, dans le même ordre.

Conclusion. f est strictement croissante sur $[-1;2]$ et $f([-1;2]) = [-6;12]$.

2.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{6}{x+1}$. Déterminer $g([1;5])$.

INDICE

Outil : $g'(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^2}$.

Point délicat : la fonction décroît ; quelle borne écris-tu en premier ?

CORRIGÉ

Variations. g est une fonction rationnelle et $x + 1 \neq 0$ sur $[1;5]$: g est continue et dérivable sur $[1;5]$. Pour tout x de $[1;5]$:

$$g'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2} < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $[1;5]$.

Bornes. $g(1) = \dfrac{6}{2} = 3$ et $g(5) = \dfrac{6}{6} = 1$.

Image. g est continue et strictement décroissante : les images des bornes s'échangent.

Conclusion. $g([1;5]) = [1;3]$.

Exercice 6

Une équation qui a au moins une solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$$

1.

Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

INDICE

Outil : remplace x par chaque valeur.

CORRIGÉ

On remplace x par chaque valeur :

$$f(0) = 0 - 0 + 2 = 2$$
$$f(1) = 1 - 4 + 2 = -1$$

Conclusion. $f(0) = 2$ et $f(1) = -1$.

2.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

INDICE

Outil : le théorème des valeurs intermédiaires, avec deux images de signes contraires.

Point délicat : nomme la continuité sur tout le segment $[0;1]$.

CORRIGÉ

Continuité. f est un polynôme, donc continue sur $[0;1]$.

Signes. D'après la question 1, $f(0) = 2 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. Ainsi :

$$f(0) \times f(1) < 0$$

Théorème. On applique le théorème des valeurs intermédiaires, cas des signes contraires ($f(0) \times f(1) < 0$).

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

3.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[3; 4]$.

INDICE

Outil : cette fois, la valeur cherchée est 1 ; vérifie qu'elle est comprise entre $f(3)$ et $f(4)$.

CORRIGÉ

Continuité. f est un polynôme, donc continue sur $[3; 4]$.

Images des bornes. $f(3) = 27 - 36 + 2 = -7$ et $f(4) = 64 - 64 + 2 = 2$. Le réel 1 est compris entre $f(3)$ et $f(4)$:

$$-7 \leq 1 \leq 2$$

Conclusion. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[3; 4]$.

Exercice 7

Une solution, et une seule

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 4x - 1$$

1.

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$; un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

Dérivée. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 4$.

Signe. Pour tout réel x, $3x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 4 > 0$.

Conclusion. La dérivée de f est strictement positive sur $\mathbb{R}$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

INDICE

Outil : le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone.

Point délicat : trois hypothèses à écrire : continuité, stricte monotonie, signes de $f(0)$ et $f(1)$.

CORRIGÉ

Hypothèses.

- f est continue sur $[0; 1]$, car c'est un polynôme.
- f est strictement croissante sur $[0; 1]$, d'après la question 1.
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 + 4 - 1 = 4 > 0$.

Théorème. Le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, s'applique.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$. Comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, cette solution est même dans $]0; 1[$.

Exercice 8

Retrouver un prix à partir d'une demande

Une boutique estime que, pour un prix p compris entre 0 et 40 dirhams, elle vend $D(p)$ unités d'un article, avec :

$$D(p) = 200 - 5p$$

Ces données sont fictives.

1.

Justifier que D est continue et strictement décroissante sur $[0;40]$, puis déterminer $D([0;40])$.

INDICE

Outil : D est affine ; regarde le signe de son coefficient directeur.

Point délicat : pour une fonction décroissante, les bornes s'échangent.

CORRIGÉ

Variations. D est une fonction affine, donc continue sur $[0;40]$. Son coefficient directeur vaut -5, et $-5 < 0$: D est strictement décroissante sur $[0;40]$.

Bornes.

$$D(0) = 200$$
$$D(40) = 200 - 200 = 0$$

Image. D est continue et strictement décroissante : les images des bornes s'échangent.

Conclusion. D est continue et strictement décroissante sur $[0;40]$, et $D([0;40]) = [0;200]$.

2.

En déduire que D admet une fonction réciproque D^{-1}, définie sur $[0;200]$, et exprimer $D^{-1}(q)$ en fonction de q.

INDICE

Début : résous l'équation $200 - 5p = q$, d'inconnue p.

CORRIGÉ

Existence. D est continue et strictement décroissante sur $[0;40]$. Elle admet donc une fonction réciproque D^{-1}, définie sur $D([0;40]) = [0;200]$.

Expression. Soit $q \in [0;200]$ et $p \in [0;40]$. On résout $D(p) = q$:

$$\begin{aligned} 200 - 5p = q &\Leftrightarrow 5p = 200 - q \\ &\Leftrightarrow p = 40 - \frac{q}{5} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout q de $[0;200]$, $D^{-1}(q) = 40 - \frac{q}{5}$.

3.

Calculer $D^{-1}(80)$ et interpréter ce nombre.

INDICE

Outil : $D^{-1}(80)$ est le prix auquel la boutique vend 80 unités.

CORRIGÉ

Calcul.

$$\begin{aligned} D^{-1}(80) &= 40 - \frac{80}{5} \\ &= 40 - 16 = 24 \end{aligned}$$

Vérification. $D(24) = 200 - 120 = 80$.

Conclusion. $D^{-1}(80) = 24$: pour vendre 80 unités, la boutique doit fixer le prix à 24 dirhams.