BURHAN

Continuité

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/continuite/cours

Chapitre	Semestre
Continuité	Semestre 1

Un tarif qui fait un saut

Une boutique en ligne (exemple fictif) facture 30 DH de livraison. La livraison est offerte dès 200 DH d'achats.

Pour un panier de x dirhams, avec $x > 0$, tu paies :

$$C(x) = \begin{cases} x + 30 & \text{si } 0 < x < 200 \\ x & \text{si } x \geq 200 \end{cases}$$

Avec un panier de 195 DH, tu paies 225 DH. Avec 200 DH d'articles, tu paies 200 DH : ajouter un article peut donc faire baisser la facture.

Devine : Une prédiction

Imagine la courbe de C. Que se passe-t-il au point d'abscisse 200 ?

A. La courbe monte d'un coup de 30.

Faux.

C'est l'inverse : juste avant 200, on paie presque 230 DH ; en 200, on paie 200 DH.

B. La courbe descend d'un coup de 30.

Juste.

Juste : à gauche de 200, $C(x)$ se rapproche de 230, et $C(200) = 200$.

C. La courbe continue sans rupture.

Faux.

Les frais disparaissent d'un coup : la courbe ne reste pas d'un seul tenant.

D. La courbe s'arrête en 200.

Faux.

C est définie pour tout $x > 0$, en particulier en 200 : la courbe continue au-delà.

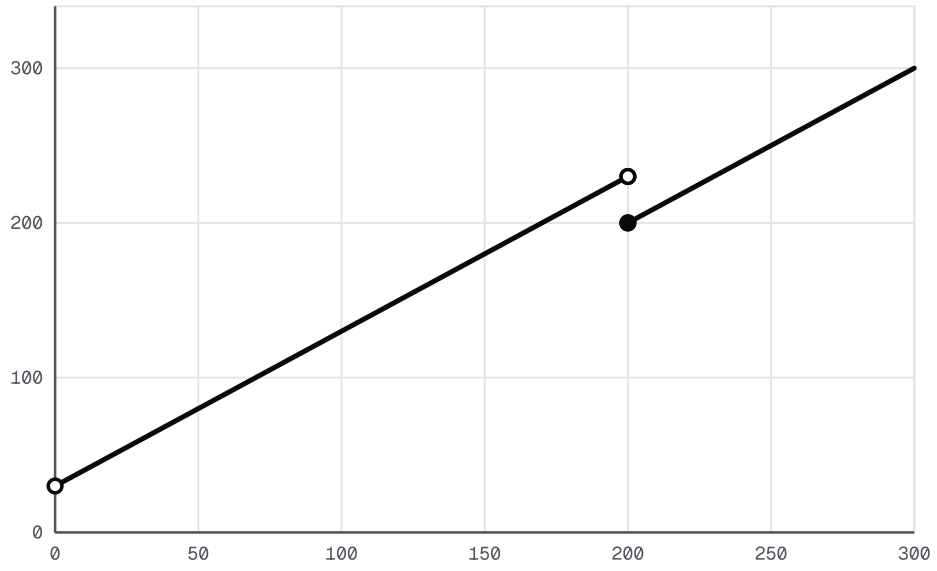
Correction

Pour x proche de 200 et inférieur à 200, on a $C(x) = x + 30$, proche de 230. Or $C(200) = 200$.

La courbe descend donc d'un coup de 30 au point d'abscisse 200. Pour la tracer, tu dois lever le crayon : on dira que C n'est pas **continue** en 200.

Dans ce chapitre, tu apprends à repérer un saut, puis à le prouver par un calcul de limite. Tu justifies ensuite qu'une fonction est continue sur un intervalle.

Tu trouves aussi l'ensemble des valeurs prises par une fonction. Tu montres qu'une équation a une solution, puis une seule, et tu l'encadres. Enfin, tu étudies la fonction réciproque.



Le coût C de la commande en ligne : au point d'abscisse 200, la courbe descend d'un coup de 30, car les frais de livraison disparaissent.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 30.

Borne exclue en x = 200 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 230.

Point creux en x = 200, à l'ordonnée estimée ≈ 230 : limite à gauche estimée numériquement.

Continuité en un point

Se rapprocher d'un point

Rappel de première année : l'écriture

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

signifie que $f(x)$ se rapproche autant qu'on veut de ℓ quand x se rapproche de a.

Pour un polynôme, cette limite s'obtient en remplaçant x par a.

> **Devine : Une valeur annoncée par ses voisines**
>
> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 1$. La calculatrice donne $f(1{,}9) = 2{,}71$, $f(1{,}99) = 2{,}9701$, $f(2{,}01) = 3{,}0301$ et $f(2{,}1) = 3{,}31$.
>
> Que peux-tu prévoir ?

A. $f(x)$ se rapproche de 3, et $f(2) = 3$.

Juste.

Juste : la valeur en 2 est celle dont $f(x)$ se rapproche.

B. $f(x)$ se rapproche de $2{,}9701$.

Faux.

C'est une valeur de f près de 2, pas la valeur dont $f(x)$ se rapproche.

C. $f(x)$ se rapproche de 3, mais $f(2) = 4$.

Faux.

$f(2) = 4 - 2 + 1 = 3$: n'oublie aucun terme.

D. On ne peut rien prévoir.

Faux.

Les valeurs se resserrent autour de 3 des deux côtés de 2.

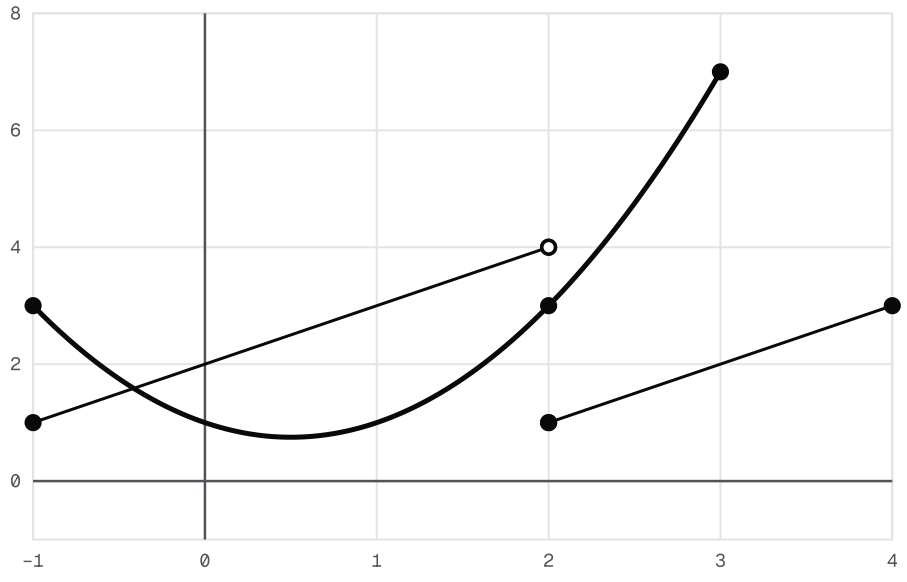
Correction

Des deux côtés de 2, les valeurs se rapprochent de 3. Le calcul direct donne :

$$f(2) = 4 - 2 + 1 = 3.$$

La valeur en 2 est exactement celle qu'annoncent les valeurs voisines : la courbe passe en 2 sans saut ni trou.

Avec ou sans saut



Deux courbes : la première passe sans saut au point d'abscisse 2, la seconde y fait un saut.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 4.

Point creux en x = 2, à l'ordonnée estimée ≈ 4 : limite à gauche estimée numériquement.

Définition : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. On dit que f est **continue en** a lorsque f admet en a une limite finie égale à $f(a)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Lorsque cette égalité n'a pas lieu (la limite n'existe pas, ou elle est différente de $f(a)$), on dit que f est **discontinue** en a.

En clair. Une fonction f est continue en a quand la valeur $f(a)$ est celle dont $f(x)$ se rapproche. Sur la figure, la courbe de f passe en 2 sans saut.

La seconde courbe est celle de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

À gauche de 2, $h(x)$ se rapproche de 4 ; à droite, de 1. Il n'y a pas de limite en 2 : h est discontinue en 2.

Exemple : un polynôme en un point

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x^2 - 5x + 1$. On étudie la continuité de p en 3.

- **Valeur** : $p(3) = 18 - 15 + 1 = 4$.
- **Limite** : p est un polynôme, donc $\lim_{x \to 3} p(x) = p(3) = 4$.
- **Conclusion** : d'après la définition de la continuité en un point, p est continue en 3.

Le même calcul vaut en tout réel.

Un tarif qui saute, un piège

Exemple : un tarif par tranches (données fictives)

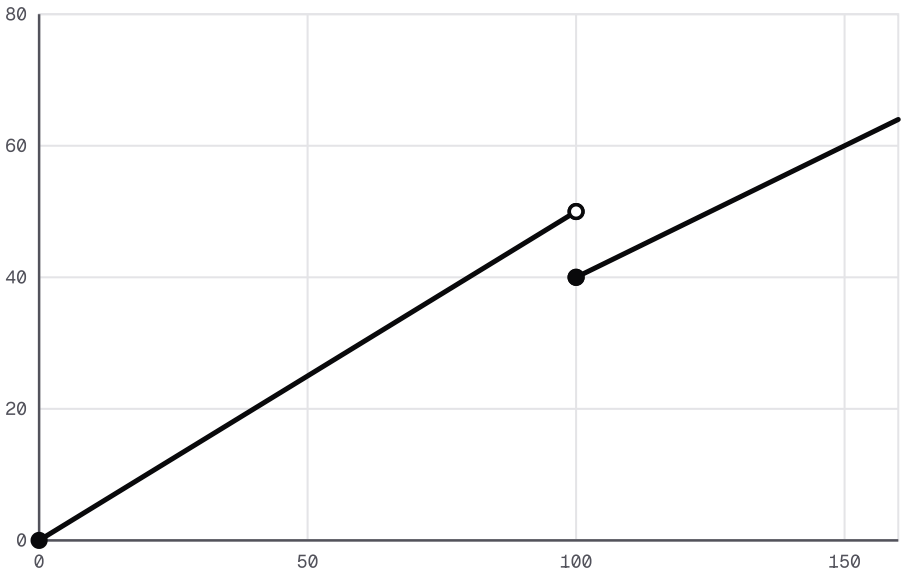
Une papeterie fictive vend la photocopie $0{,}5$ DH. Dès 100 copies, toutes les copies passent à $0{,}4$ DH.

Pour x copies (on traite x comme un réel), le prix payé est :

$$P(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{si } 0 \leq x < 100 \\ 0{,}4x & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

On calcule $P(100) = 40$. À gauche de 100, $P(x) = 0{,}5x$ se rapproche de 50. À droite, $P(x) = 0{,}4x$ se rapproche de 40.

Les deux côtés ne s'accordent pas : P n'a pas de limite en 100, donc P n'est pas continue en 100.



$y = P(x)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Le prix P de x photocopies : 0,5 DH la copie avant 100 copies, 0,4 DH dès 100 copies. La courbe saute vers le bas au point d'abscisse 100.

Borne exclue en x = 100 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 50.

Point creux en x = 100, à l'ordonnée estimée ≈ 50 : limite à gauche estimée numériquement.

Attention : une limite ne suffit pas

✗ « La fonction r a une limite en 1, donc elle est continue en 1. »

✓ Il faut aussi que la limite soit **égale** à $r(1)$. Prends la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$r(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La limite de r en 1 vaut $3 \times 1 - 1 = 2$, alors que $r(1) = 0$. Donc r n'est pas continue en 1.

Vérifie : Le bon raisonnement

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction m est continue en 0. Quel raisonnement le justifie ?

A. m est définie en 0, cela suffit.

Faux.

La fonction r de l'encadré est définie en 1, et pourtant discontinue.

B. $\lim_{x \to 0} m(x) = 0^2 + 1 = 1$, et $m(0) = 1$.

Juste.
Juste : la limite existe et vaut $m(0)$.

C. m est donnée par une seule formule.

Faux.
m est donnée par deux lignes, et elle est quand même continue en 0.

D. $m(x)$ est positif pour tout réel x.

Faux.
Le signe de la fonction ne dit rien d'un saut.

Correction
Pour $x \neq 0$, $m(x) = x^2 + 1$: quand x se rapproche de 0, $m(x)$ se rapproche de 1. Or $m(0) = 1$.

D'après la définition de la continuité en un point, m est continue en 0. Une fonction écrite avec une accolade peut donc être continue.

À toi : Choisir une valeur

Soit c un réel et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \neq 2 \\ c & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de c la fonction s est-elle continue en 2 ? Est-elle continue en 2 pour $c = 4$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord la limite de s en 2 avec la première ligne.
Indice 2
Pour $x \neq 2$, $s(x) = x^2 - 3$ se rapproche de $2^2 - 3$.
Indice 3
Point délicat : la continuité exige l'égalité entre cette limite et $s(2) = c$.

Réponse
Limite en 2. Pour $x \neq 2$, $s(x) = x^2 - 3$, donc $\lim_{x \to 2} s(x) = 4 - 3 = 1$.

Valeur de c. D'après la définition de la continuité en un point, s est continue en 2 si et seulement si $s(2) = 1$, c'est-à-dire $c = 1$.

Cas $c = 4$. La limite vaut 1 et $s(2) = 4$. Comme $1 \neq 4$, s n'est pas continue en 2.

Conclusion. La fonction s est continue en 2 pour $c = 1$ seulement ; pour $c = 4$, elle ne l'est pas.

À droite, à gauche ; prolongement

Par la droite, par la gauche

L'idée. Reprends le tarif P des photocopies. Pour approcher 100, tu peux venir par la gauche : 99, $99{,}9$, $99{,}99$… Tu peux aussi venir par la droite : 101, $100{,}1$, $100{,}01$…

Par la gauche, $P(x)$ se rapproche de 50. Par la droite, il se rapproche de 40. Chaque côté a sa propre limite.

Devine : Quel côté rejoint le point ?

On a $P(100) = 40$. Par la gauche, $P(x)$ se rapproche de 50 ; par la droite, de 40. Que prévois-tu ?

A. La courbe rejoint le point $(100; 40)$ par la gauche seulement.

Faux.

Par la gauche, les valeurs approchent 50, pas 40.

B. Elle le rejoint des deux côtés.

Faux.

Les deux limites diffèrent : un seul côté peut rejoindre 40.

C. Elle ne le rejoint d'aucun côté.

Faux.

Par la droite, $P(x) = 0{,}4x$ approche $40 = P(100)$.

D. Elle le rejoint par la droite seulement.

Juste.

Juste : la limite à droite vaut $P(100)$.

Correction

Par la droite, la limite vaut 40, égale à $P(100)$: la courbe arrive sur le point sans saut.

Par la gauche, la limite vaut 50, et $50 \neq 40$: il y a un saut.

On dira que P est continue à droite en 100, mais pas à gauche.

Définition : Continuité à droite, continuité à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a; a+h[$, avec $h > 0$, on dit que f est **continue à droite en** a lorsque $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-h; a]$, avec $h > 0$, on dit que f est **continue à gauche en** a lorsque $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple : les deux côtés d'un tarif

À droite de 100. Pour $x \geq 100$, $P(x) = 0{,}4x$, donc :

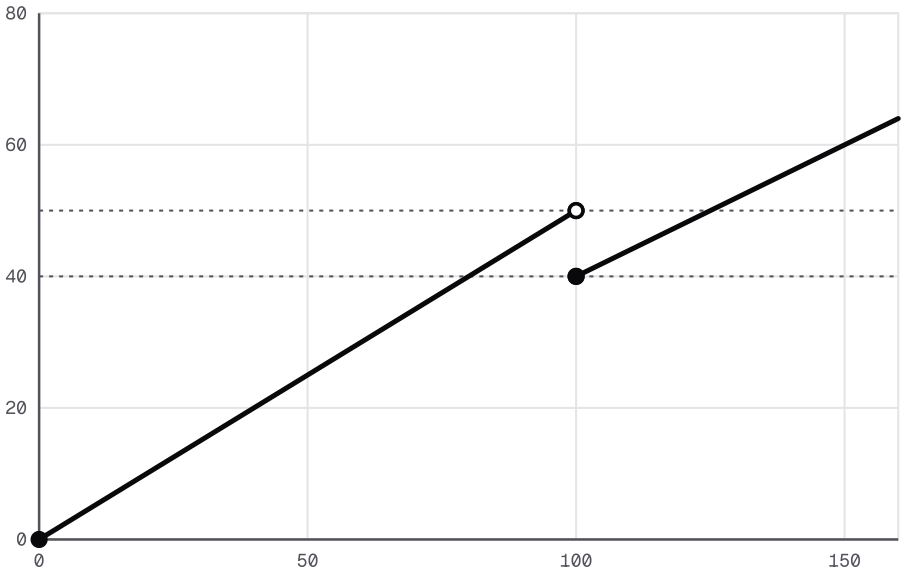
$$\lim_{x \to 100^+} P(x) = 0{,}4 \times 100$$
$$= 40 = P(100).$$

D'après la définition, P est continue à droite en 100.

À gauche de 100**.** Pour $0 \leq x < 100$, $P(x) = 0{,}5x$, donc :

$$\lim_{x \to 100^-} P(x) = 0{,}5 \times 100$$
$$= 50.$$

Or $50 \neq P(100)$. Donc P n'est pas continue à gauche en 100.



Les deux côtés du tarif des photocopies : par la gauche, P(x) se rapproche de 50 ; par la droite, de 40, qui est la valeur P(100). P est continue à droite en 100, pas à gauche.

Borne exclue en x = 100 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 50.

Point creux en x = 100, à l'ordonnée estimée ≈ 50 : limite à gauche estimée numériquement.

Les deux côtés à la fois

Propriété : Continuité et continuité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est **à la fois** continue à droite et continue à gauche en a, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Remarque

Ce résultat est admis. Il traduit une idée simple : pas de saut en a, ni en arrivant par la gauche, ni en arrivant par la droite.

Vérifie : Trois nombres à comparer

Une fonction f est définie autour de 1. On sait que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$ et $f(1) = 2$. Que peux-tu conclure ?

A. f est continue en 1.
Faux.
Les limites à droite et à gauche coïncident, mais elles diffèrent de $f(1)$.

B. f n'est continue ni à droite ni à gauche en 1.
Juste.
Juste : chaque limite vaut 5, et $5 \neq 2$.

C. f est continue à droite en 1 seulement.
Faux.
La limite à droite vaut 5, différente de $f(1) = 2$.

D. On ne peut rien conclure sans formule.
Faux.
Les trois nombres suffisent, d'après la définition.

Correction
La continuité à droite exige $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$; ici, $5 \neq 2$. De même à gauche.

D'après la propriété des deux côtés, f n'est donc pas continue en 1. Si l'on remplaçait $f(1)$ par 5, le saut disparaîtrait.

Fonctions définies par morceaux

Méthode : continuité en un point d'une fonction par morceaux

1. **Calcule la valeur** $f(a)$, avec la ligne de l'accolade qui contient a.
2. **Calcule les deux limites** en a : à droite avec la ligne valable pour $x > a$, à gauche avec celle valable pour $x < a$.
3. **Compare** : si les deux limites valent $f(a)$, alors f est continue en a. Sinon, elle ne l'est pas, et tu précises de quel côté se produit le saut.

Exemple : deux formules qui se raccordent

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- **Valeur** : $u(3) = 9 - 12 + 5 = 2$.
- **À gauche** : $\lim_{x \to 3^-} u(x) = 2$, avec la première ligne.
- **À droite** : $\lim_{x \to 3^+} u(x) = 2 \times 3 - 4 = 2$.
- **Conclusion** : les deux limites valent $u(3)$. D'après la propriété des deux côtés, u est continue en 3.

Exemple **: choisir un paramètre (données fictives)**

Une entreprise fictive change de machine à partir de 5 tonnes produites. Son coût, en milliers de dirhams, est :

$$K(x) = \begin{cases} 2x + d & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ x^2 - 3x + 8 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

où d est un réel. On cherche d pour que le coût ne saute pas en 5.

Valeur et limite à droite. On a $K(5) = 25 - 15 + 8 = 18$, et la limite à droite vaut aussi 18.

Limite à gauche. Avec la première ligne, elle vaut $2 \times 5 + d = 10 + d$.

Conclusion. D'après la propriété des deux côtés, K est continue en 5 si et seulement si $10 + d = 18$, soit $d = 8$.

Boucher un trou

Devine : Un point manquant

La fonction w définie par $w(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$ n'est pas définie en 3. La calculatrice donne $w(2{,}9) = 6{,}9$ et $w(3{,}1) = 7{,}1$.

Quelle valeur faudrait-il donner en 3 pour que la courbe n'ait ni trou ni saut ?

A. 0, car le dénominateur s'annule en 3.

Faux.
Le dénominateur nul empêche de calculer $w(3)$; il ne donne pas la valeur à poser.

B. Aucune : une fonction non définie en un point ne peut pas devenir continue.

Faux.
On peut poser une valeur en 3 : c'est le principe du prolongement qui suit.

C. $6{,}9$

Faux.

C'est la valeur en $2{,}9$, pas celle dont $w(x)$ se rapproche.

D. 7

Juste.

Juste : les valeurs se resserrent autour de 7 des deux côtés de 3.

Correction

On factorise : $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$. Donc, pour tout $x \neq 3$:

$$w(x) = x + 4.$$

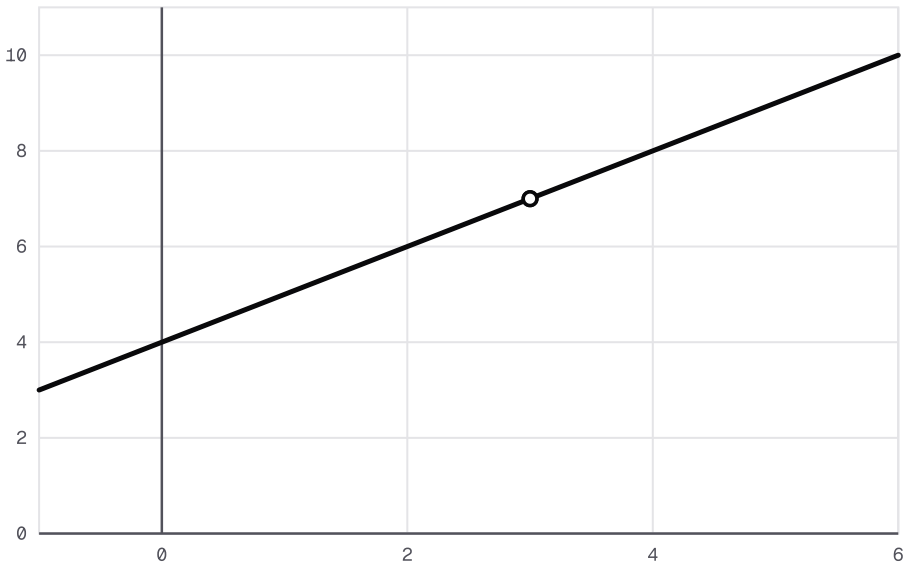
Quand x se rapproche de 3, $w(x)$ se rapproche de 7. En posant la valeur 7 en 3, on bouche le trou : c'est le **prolongement par continuité**.

Définition : Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a, **sauf en** a, et qui admet en a une limite finie ℓ. La fonction g définie par

$$g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq a \quad \text{et} \quad g(a) = \ell$$

est continue en a. On l'appelle le **prolongement par continuité** de f en a.



La courbe de w : une droite privée d'un point, avec un trou au point d'abscisse 3. En posant la valeur 7 en 3, on bouche ce trou : c'est le prolongement par continuité.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 7 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 7 : limite à gauche estimée numériquement.

Méthode : prolonger une fonction par continuité

1. **Repère le point** a où f n'est pas définie, alors qu'elle l'est de part et d'autre.
2. **Calcule** $\lim_{x \to a} f(x)$. Rappel de première année : si le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, c'est une forme indéterminée ; on ne conclut pas tout de suite, on factorise le numérateur, puis on simplifie.
3. **Conclus** : si la limite est un réel ℓ, le prolongement g vaut $f(x)$ pour $x \neq a$, et $g(a) = \ell$. Si la limite est infinie ou n'existe pas, aucun prolongement par continuité n'est possible.

Exemple : factoriser, puis simplifier

Soit v la fonction définie pour $x \neq -2$ par $v(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x + 2}$.

Forme indéterminée. En -2, le numérateur et le dénominateur s'annulent. On factorise : $2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$.

Limite. Pour $x \neq -2$, $v(x) = 2(x - 2)$, donc $\lim_{x \to -2} v(x) = 2 \times (-4) = -8$.

Prolongement. Le prolongement par continuité de v en -2 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \neq -2 \\ -8 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

À toi

Vérifie : Un trou ou un mur ?

Laquelle de ces fonctions, non définies en 0, admet un prolongement par continuité en 0 ?

A. $x \mapsto \dfrac{5}{x^2}$

Faux.

Quand x se rapproche de 0, $\dfrac{5}{x^2}$ tend vers $+\infty$: la limite n'est pas un réel.

B. $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$

Faux.

Elle vaut -1 à gauche de 0 et 1 à droite : pas de limite en 0.

C. $x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x}{x}$

Juste.

Juste : pour $x \neq 0$, elle vaut $x + 3$, qui tend vers 3.

D. $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x}$

Faux.

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0 : la limite est infinie de chaque côté.

Correction

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^2+3x}{x} = x+3$, qui tend vers 3 en 0. Le prolongement prend la valeur 3 en 0.

Les trois autres fonctions n'ont pas de limite réelle en 0 : leur courbe a un saut ou part vers l'infini, ce n'est pas un simple trou.

À toi : Un prolongement à écrire

Soit f la fonction définie pour $x \neq 4$ par $f(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$.

Montre que f admet un prolongement par continuité en 4, et écris-le. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Cherche la limite de f en 4 : c'est une forme indéterminée.

Indice 2

Le numérateur s'annule en 4 : factorise-le par $x-4$.

Indice 3

Point délicat : la simplification ne vaut que pour $x \neq 4$; le prolongement s'écrit avec une accolade.

Réponse

Simplification. Pour $x \neq 4$, $x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$, donc $f(x) = x-3$.

Limite. Ainsi $\lim_{x\to 4} f(x) = 1$, qui est un réel.

Prolongement. D'après la définition du prolongement par continuité, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

est continue en 4.

Conclusion. La fonction f admet un prolongement par continuité en 4 : c'est la fonction g.

Continuité sur un intervalle ; fonctions usuelles ; opérations

Sans lever le crayon

L'idée. Tu as vu la continuité en un point. Sur un intervalle, on demande la continuité en chacun de ses points : la courbe se trace alors d'un seul geste, sans lever le crayon.

Aux bornes d'un segment, on ne regarde qu'un côté : celui de l'intérieur.

Devine : Un tarif sur un intervalle

Reprends le coût C de l'entrée, avec la livraison offerte dès 200 DH. Sur lequel de ces intervalles peux-tu tracer sa courbe sans lever le crayon ?

A. $]0;300]$

Faux.
Cet intervalle contient 200, où la courbe saute.

B. $[150;250]$

Faux.
Il contient 200 : le saut y est.

C. $[200;300]$

Juste.
Juste : pour $x \geq 200$, $C(x) = x$, et la courbe part du point $(200;200)$ sans saut.

D. $[100;200]$

Faux.
En arrivant par la gauche, la courbe approche 230, puis tombe à $C(200) = 200$.

Correction
Pour $x \geq 200$, $C(x) = x$: la courbe est un morceau de droite qui commence au point $(200;200)$, sans saut.

Les trois autres intervalles contiennent 200 ; or la courbe y descend d'un coup de 30.

Définition : Continuité sur un intervalle

- Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** $]a;b[$ lorsqu'elle est continue en tout réel de cet intervalle.
- Elle est **continue sur le segment** $[a;b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

On définit de même la continuité sur $[a;b[$, sur $]a;b]$ et sur les intervalles non bornés, comme $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. La courbe d'une fonction continue sur un intervalle se trace sans lever le crayon.

Exemple : le coût de livraison, intervalle par intervalle

- Sur $]0;200[$, $C(x) = x + 30$: un polynôme, continu en chaque point. Donc C est continue sur $]0;200[$.
- Sur $[200;+\infty[$, $C(x) = x$. De plus, C est continue à droite en 200, car $\lim_{x \to 200^+} C(x) = 200 = C(200)$. Donc C est continue sur $[200;+\infty[$.
- Sur $]0;+\infty[$, en revanche, C n'est pas continue : elle ne l'est pas en 200.

Les fonctions usuelles

Devine : Quatre courbes à tracer

Sur le segment $[1;4]$, combien de ces fonctions peux-tu tracer sans lever le crayon : $x \mapsto x^3 - 2x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x-2|$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

A. Une seule : le polynôme.

Faux.
La racine carrée et l'inverse sont définies sur tout $[1;4]$, et leurs courbes n'y font aucun saut.

B. Trois : la courbe de $x \mapsto |x-2|$ casse en 2.

Faux.
Une pointe change la direction de la courbe, sans la couper : ce n'est pas un saut.

C. Les quatre.

Juste.
Juste : chacune est définie sur tout $[1;4]$, sans saut.

D. Deux : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et la valeur absolue posent problème.

Faux.
$\dfrac{1}{x}$ n'a de problème qu'en 0, hors de $[1;4]$.

Correction
Sur $[1;4]$, chacune des quatre fonctions est définie, et sa courbe se trace d'un seul geste.

La pointe de $x \mapsto |x-2|$ en 2 n'est pas un saut. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, qui n'est pas dans $[1;4]$.

Le résultat qui suit le confirme pour toutes les fonctions usuelles.

Propriété : Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'as déjà utilisé : la limite d'un polynôme en a s'obtient en remplaçant x par a.

Vérifie : Continue sur tout un segment

Laquelle de ces fonctions est continue sur le segment $[-3;3]$?

A. $x \mapsto \sqrt{x}$

Faux.

Elle n'est pas définie pour $x < 0$, donc pas sur tout $[-3;3]$.

B. $x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$

Faux.

Elle n'est pas définie en 2, qui appartient à $[-3;3]$.

C. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

Faux.

Elle n'est pas définie en 0.

D. $x \mapsto |x|$

Juste.

Juste : la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-3;3]$.

Correction

D'après la continuité des fonctions usuelles, la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$: elle l'est donc sur $[-3;3]$. Les trois autres fonctions ne sont pas définies en au moins un point du segment.

Opérations

Devine : Une somme, un quotient

Les fonctions $f : x \mapsto 3x+1$ et $g : x \mapsto x-2$ se tracent sans lever le crayon sur $\mathbb{R}$.

Que prévois-tu pour $f+g$ et pour $\dfrac{f}{g}$?

A. Les deux se tracent sans lever le crayon sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Le quotient $\dfrac{3x+1}{x-2}$ n'est pas défini en 2.

B. Aucune des deux : une opération peut créer un saut.

Faux.

$f+g$ est le polynôme $x \mapsto 4x-1$: sa courbe est une droite.

C. La somme bien, le quotient seulement de part et d'autre de 2.

Juste.

Juste : le quotient n'existe pas là où g s'annule.

D. Le quotient bien, la somme non.

Faux.

C'est l'inverse : la somme est une droite, le quotient s'interrompt en 2.

Correction

La somme $f+g$ est $x \mapsto 4x-1$: sa courbe est une droite, sans saut.

Le quotient $\dfrac{f}{g}$ est $x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$. Il n'est pas défini en 2, où g s'annule : près de 2, ses valeurs partent vers l'infini. Il se trace sans lever le crayon sur $]-\infty;2[$, puis sur $]2;+\infty[$.

D'où la condition sur le dénominateur, dans le résultat qui suit.

Propriété : Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et k un réel.

- Les fonctions $f+g$, kf et fg sont continues sur I ; pour tout entier naturel non nul n, la fonction f^n est continue sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Remarque

Ce résultat est admis. En combinant des fonctions sans saut, on n'en crée pas, tant qu'on ne divise pas par zéro et qu'on ne prend pas la racine carrée d'un nombre négatif.

Vérifie : Un quotient continu sur $\mathbb{R}$

Pourquoi la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

A. Un quotient de fonctions continues est continu sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Il faut que le dénominateur ne s'annule pas, comme le montre $\dfrac{x}{x-2}$.

B. Son numérateur x^2+1 ne s'annule jamais.

Faux.

C'est le dénominateur qui ne doit pas s'annuler.

C. Ce sont deux polynômes, et $x^2+3 \geq 3$.

Juste.

Juste : la condition du quotient est vérifiée sur $\mathbb{R}$.

D. La fonction est positive sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Le signe ne garantit pas l'absence de saut.

Correction

Le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes, continus sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 3 \geq 3$: le dénominateur ne s'annule pas.

D'après les opérations sur les fonctions continues, le quotient est continu sur $\mathbb{R}$.

La méthode, à toi

Méthode : justifier la continuité sur un intervalle

1. **Reconnais la forme** : polynôme, quotient, racine carrée, valeur absolue, composée.
2. **Cite** la continuité des fonctions usuelles qui la composent.
3. **Nomme l'opération et vérifie sa condition** sur l'intervalle : un dénominateur qui ne s'annule pas, une expression positive sous la racine carrée. Pour une composée, la condition est une inclusion (section suivante).

Exemple : un coût moyen (données fictives)

Une entreprise fictive produit x centaines d'objets, avec $x > 0$. Son coût moyen, en dirhams, est donné par :

$$M(x) = \frac{x^2 + 4x + 74}{x}.$$

- **Forme** : un quotient de deux polynômes.
- **Fonctions usuelles** : numérateur et dénominateur sont deux polynômes, donc continus sur $]0; +\infty[$.
- **Condition** : pour $x > 0$, le dénominateur x ne s'annule pas.

D'après les opérations sur les fonctions continues, M est continue sur $]0; +\infty[$.

Exemple : une racine carrée

Soit g la fonction $x \mapsto \sqrt{6 - 2x}$.

- **Forme** : la racine carrée de $6 - 2x$.
- **Condition** : $6 - 2x \geq 0$ équivaut à $x \leq 3$. Sur $]-\infty; 3]$, l'expression $6 - 2x$ est un polynôme positif.

- **Conclusion** : d'après les opérations sur les fonctions continues, g est continue sur $]-\infty;3]$.

La fonction $x \mapsto (x+1)\sqrt{6-2x}$ l'est aussi, comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle.

À toi : Un quotient avec une racine

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-5}$.

Justifie que f est continue sur $[-2;5[$ et sur $]5;+\infty[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suis la méthode : reconnais un quotient, avec une racine carrée au numérateur.
Indice 2
Au numérateur, $x+2 \geq 0$ équivaut à $x \geq -2$; au dénominateur, $x-5$ s'annule en 5.
Indice 3
Point délicat : f n'est pas définie en 5 ; conclus sur chacun des deux intervalles séparément.

Réponse
Numérateur. Sur $[-2;+\infty[$, $x+2$ est un polynôme positif. D'après les opérations sur les fonctions continues, $x \mapsto \sqrt{x+2}$ y est continue.

Dénominateur. La fonction $x \mapsto x-5$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule qu'en 5.

Conclusion. D'après les opérations sur les fonctions continues, le quotient f est continu sur $[-2;5[$ et sur $]5;+\infty[$.

Continuité d'une composée

Enchaîner deux calculs

L'idée. Pour calculer $\sqrt{x^2-4x+7}$, tu enchaînes deux calculs : d'abord $u(x) = x^2-4x+7$, puis la racine carrée du résultat.

Si aucun des deux calculs ne fait de saut, l'enchaînement n'en fait pas non plus. Il faut seulement que chaque résultat du premier calcul soit accepté par le second.

Devine : Des pointes, pas des sauts

La courbe de $x \mapsto |x^2-6x+5|$ a deux pointes, aux points d'abscisses 1 et 5. Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

A. Oui : c'est la valeur absolue d'un polynôme.
Juste.
Juste : on enchaîne deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

B. Non : une pointe est une discontinuité.

Faux.

En une pointe, la courbe change de direction sans se couper : il n'y a pas de saut.

C. Non : le polynôme est négatif entre 1 et 5.

Faux.

La valeur absolue accepte les nombres négatifs : aucune condition de signe ici.

D. Seulement en dehors de 1 et de 5.

Faux.

En 1 et en 5, la courbe passe sans saut : la fonction y est continue.

Correction

On enchaîne $x \mapsto x^2 - 6x + 5$, un polynôme continu sur $\mathbb{R}$, et la valeur absolue, continue sur $\mathbb{R}$. La fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$.

En 1 et en 5, le polynôme s'annule : la courbe touche l'axe des abscisses en formant une pointe, mais sans saut.

La composée

Propriété : Continuité d'une composée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J. Si, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J (on écrit $f(I) \subset J$), alors la fonction composée $g \circ f$, définie sur I par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, est continue sur I.

Remarque

Ce résultat est admis. La condition $f(I) \subset J$ garantit que chaque résultat du premier calcul est accepté par le second.

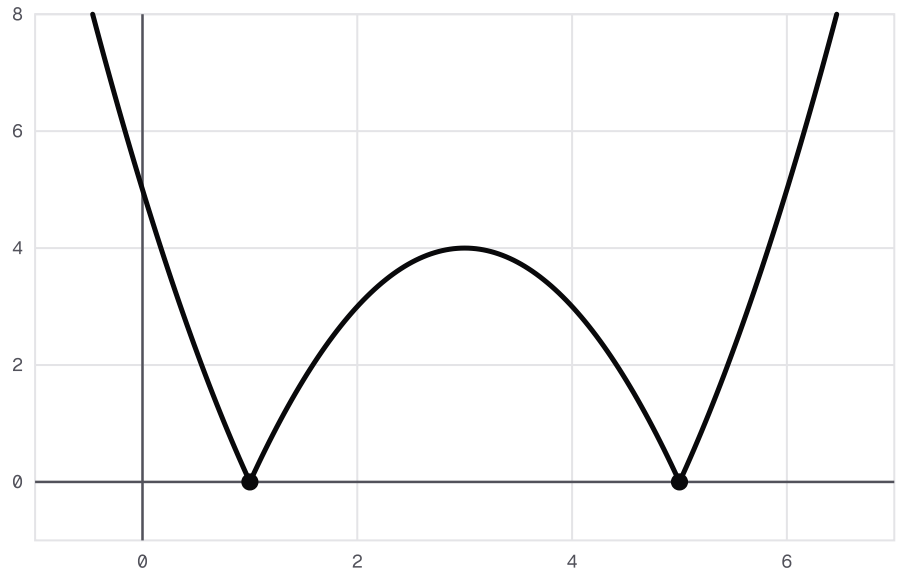
Exemple : la racine carrée d'un polynôme

Soit H la fonction définie par $H(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$. On pose $u(x) = x^2 - 4x + 7$.

- **Premier calcul** : u est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$.
- **Inclusion** : pour tout réel x, $u(x) = (x-2)^2 + 3$, donc $u(x) \geq 3$. Ainsi $u(\mathbb{R}) \subset [0; +\infty[$.
- **Second calcul** : la racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

D'après la continuité d'une composée, H est continue sur $\mathbb{R}$.

Valeur absolue, à toi



La courbe de x ↦ |x² − 6x + 5| : deux pointes, aux abscisses 1 et 5, mais aucun saut. La fonction est continue sur l'ensemble des réels.

Exemple : l'écart à un prix visé (données fictives)

Un magasin fictif vise un prix de 40 DH. Après x semaines, avec $x \geq 0$, le prix d'un article est :

$$p(x) = \frac{60x + 20}{x + 1}.$$

L'écart au prix visé est $e(x) = |p(x) - 40|$.

- p est un quotient de polynômes, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$: p y est continue.
- La fonction $x \mapsto p(x) - 40$ est donc continue sur $[0; +\infty[$. Ses valeurs appartiennent à $\mathbb{R}$, où la valeur absolue est continue.

D'après la continuité d'une composée, e est continue sur $[0; +\infty[$.

À toi : Deux composées dans une somme

Soit q la fonction définie par $q(x) = |4 - x^2| + \sqrt{x^2 + 1}$.

Justifie que q est continue sur $\mathbb{R}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Traite séparément les deux termes, puis la somme.
Indice 2

Le premier terme enchaîne un polynôme et la valeur absolue ; le second, un polynôme et la racine carrée.

Indice 3

Point délicat : pour la racine carrée, vérifie que $x^2 + 1$ est positif pour tout réel x.

Réponse

Premier terme. La fonction $x \mapsto 4 - x^2$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. D'après la continuité d'une composée, $x \mapsto |4 - x^2|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Second terme. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1$: le nombre $x^2 + 1$ appartient à $[0; +\infty[$, où la racine carrée est continue. D'après la continuité d'une composée, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. D'après les opérations sur les fonctions continues, la somme q est continue sur $\mathbb{R}$.

Image d'un intervalle

Les valeurs prises

Une coopérative fictive produit entre 100 et 600 kg de miel par mois. On note x la production en centaines de kilogrammes, avec $x \in [1; 6]$.

Son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est $B(x) = -x^2 + 10x - 16$.

Quand la production varie de 1 à 6, le bénéfice prend une infinité de valeurs. Lesquelles ?

Devine : Toutes les valeurs du bénéfice

On a $B(1) = -7$ et $B(6) = 8$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par B sur $[1; 6]$?

A. $[-7; 8]$

Faux.

Ce sont les valeurs aux bornes ; or B dépasse 8 à l'intérieur : $B(5) = 9$.

B. $[-7; 9]$

Juste.

Juste : le plus petit bénéfice est -7, le plus grand 9, et tout l'entre-deux est atteint.

C. $]-7; 9[$

Faux.

$B(1) = -7$ et $B(5) = 9$ sont atteints : les crochets sont fermés.

D. $[8; 9]$

Faux.

Le bénéfice vaut -7 en $x = 1$: il descend bien plus bas.

Correction

Pour tout x de $[1; 6]$, on peut écrire $B(x) = 9 - (x - 5)^2$.

Plus grande valeur. Un carré est positif, donc $B(x) \leq 9$, avec $B(5) = 9$.

Plus petite valeur. Sur $[1;6]$, $(x-5)^2$ vaut au plus 16, en $x=1$: donc $B(x) \geq -7$, avec $B(1)=-7$.

Conclusion. La courbe est d'un seul tenant : B prend toutes les valeurs de -7 à 9. L'ensemble cherché est $[-7;9]$.

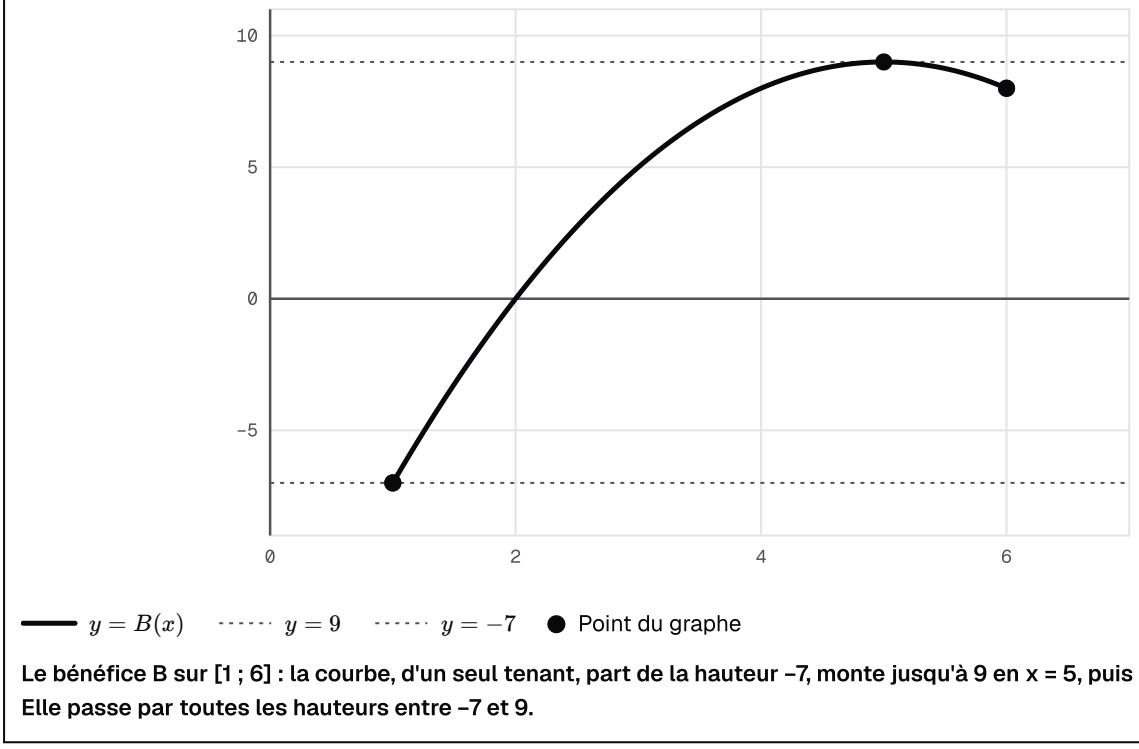
Théorème **: Image d'un intervalle, d'un segment**

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.

- L'image $f(I)$ de l'intervalle I par f est un **intervalle**.
- En particulier, l'image d'un segment $[a;b]$ est un **segment** $[m;M]$, où m est la plus petite et M la plus grande des valeurs prises par f sur $[a;b]$.

Remarque

Ce résultat est admis. Une courbe tracée sans lever le crayon au-dessus d'un intervalle ne saute aucune ordonnée.



Le bénéfice B sur [1 ; 6] : la courbe, d'un seul tenant, part de la hauteur –7, monte jusqu'à 9 en x = 5, puis redescend à 8. Elle passe par toutes les hauteurs entre –7 et 9.

Lire un tableau de variations

En clair. Le tableau de variations donne l'image d'un segment.

Rappel de première année : si f' est strictement positive sur un intervalle, f y est strictement croissante ; si elle est strictement négative, f y est strictement décroissante.

Ici, $B'(x) = -2x + 10$ est strictement positif sur $[1;5[$ et strictement négatif sur $]5;6]$. Donc B est strictement croissante sur $[1;5]$, puis strictement décroissante sur $[5;6]$.

Le maximum est $B(5) = 9$, le minimum est $B(1) = -7$. Enfin, B est un polynôme, donc continue sur $[1;6]$. D'après le théorème de l'image d'un segment :

$$B([1;6]) = [-7;9].$$

Variations du bénéfice B sur [1 ; 6] (données fictives)

x	1		5		6
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$	-7	↗	9	↘	8

Attention : les bornes ne suffisent pas

✗ « $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[-1;2]$: $f(-1) = 3$ et $f(2) = 0$, donc $f([-1;2]) = [0;3]$. »

✓ La fonction f n'est pas monotone sur $[-1;2]$: elle descend jusqu'à $f(1) = -1$, puis remonte. Donc $f([-1;2]) = [-1;3]$.

Sans monotonie, cherche le minimum et le maximum dans un tableau de variations.

Fonction strictement monotone

Devine : Une recette qui ne fait que monter

Une recette fictive R, en milliers de dirhams, est continue et strictement croissante quand la production x va de 2 à 5 tonnes. On a $R(2) = 1$ et $R(5) = 7$. Quelles valeurs prend la recette sur $[2;5]$?

A. Seulement 1 et 7.

Faux.

Sans saut, la recette passe aussi par toutes les valeurs intermédiaires.

B. Des valeurs au-delà de 7, au milieu de la production.

Faux.

La recette ne fait que monter : elle ne dépasse jamais $R(5) = 7$.

C. Les réels de $]1;7[$, sans 1 ni 7.

Faux.

$R(2) = 1$ et $R(5) = 7$ sont atteintes.

D. Exactement les réels de $[1;7]$.

Juste.

Juste : ni plus bas que la borne gauche, ni plus haut que la borne droite.

Correction

Sans saut, la recette passe par toutes les valeurs comprises entre 1 et 7. Comme elle ne fait que monter, elle ne descend jamais sous $R(2)=1$ et ne dépasse jamais $R(5)=7$.

Elle prend donc exactement les valeurs de $[1;7]$: $R([2;5])=[R(2);R(5)]$.

Le résultat qui suit le dit pour toute fonction continue et strictement monotone.

Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I, et a, b deux réels de I tels que $a<b$.

- Si f est strictement croissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b])=[f(a);f(b)]$.
- Si f est strictement décroissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b])=[f(b);f(a)]$.
- Plus généralement, les bornes de $f(I)$ sont les images ou les limites de f aux bornes de I : dans le même ordre si f est strictement croissante, dans l'ordre inverse si elle est strictement décroissante. Une borne de I incluse dans I donne une borne incluse dans $f(I)$, une borne exclue donne une borne exclue. Par exemple, si f est strictement croissante sur $[a;+\infty[$, alors $f([a;+\infty[)=[f(a);\lim_{x\to+\infty}f(x)[$.

Remarque

Ce résultat est admis. Une courbe qui monte sans saut part de l'image de la borne gauche et finit à l'image de la borne droite.

Vérifie : Des bornes dans le bon ordre

Une fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2;5]$, avec $f(2)=7$ et $f(5)=-1$. Que vaut $f([2;5])$?

A. $[7;-1]$

Faux.

Cette écriture n'a pas de sens : la borne gauche d'un intervalle est la plus petite.

B. $]-1;7[$

Faux.

Les bornes 2 et 5 sont incluses : $f(2)$ et $f(5)$ sont atteintes.

C. $[-1;7]$

Juste.

Juste : les bornes sont échangées, car f décroît.

D. $[-1;+\infty[$

Faux.

Sur $[2;5]$, f prend au plus la valeur $f(2)=7$.

Correction

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2;5]$: les bornes s'échangent. D'après l'image par une fonction continue et strictement monotone :

$$\begin{aligned} f([2;5]) &= [f(5);f(2)] \\ &= [-1;7]. \end{aligned}$$

Méthode : déterminer l'image d'un intervalle

1. **Justifie la continuité** de f sur l'intervalle I.
2. **Étudie le sens de variation** par le signe de $f'(x)$, en nommant l'intervalle, puis dresse le tableau de variations.
3. **Calcule** les images ou les limites aux bornes de I.
4. **Conclus** : bornes dans le même ordre si f est strictement croissante, échangées si elle est strictement décroissante. Si f change de sens, découpe I et réunis les images.

Deux exemples

Exemple : une recette sur un segment (données fictives)

Une recette fictive, en milliers de dirhams, vaut $R(x)=-x^2+12x$ pour $x\in[0;5]$.

- **Continuité** : R est un polynôme, continu sur $[0;5]$.
- **Variations** : $R'(x)=-2x+12$. Pour $x\leq 5$, $R'(x)\geq 2>0$: R est strictement croissante sur $[0;5]$.
- **Bornes** : $R(0)=0$ et $R(5)=-25+60=35$.
- **Conclusion** : d'après l'image par une fonction continue et strictement monotone, $R([0;5])=[0;35]$.

Exemple : un intervalle non borné

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

Continuité. f est un quotient de polynômes, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$.

Variations. On dérive par la dérivée d'un quotient. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{5}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$: f y est strictement croissante.

Bornes. On a $f(0) = \frac{1}{3}$. Rappel de première année : en $+\infty$, un quotient de polynômes a la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La borne 0 est incluse, et $+\infty$ est exclue. Donc :

$$f([0;+\infty[) = \left[\frac{1}{3};2\right[.$$

Attention : une fonction décroissante échange les bornes

✗ « La fonction $g : x \mapsto \frac{6}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $[1;3]$, donc $g([1;3]) = [6;2]$. »

✓ Pour une fonction strictement décroissante, les bornes s'échangent. Ici, $g(3) = 2$ et $g(1) = 6$: $g([1;3]) = [2;6]$.

La borne de gauche d'un intervalle est la plus petite.

À toi, Coin examen

À toi : Une image en deux morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

Détermine $f([-1;2])$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par le signe de $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$ sur $[-1;2]$.
Indice 2
Déduis-en le sens de variation de f sur $[-1;1]$ et sur $[1;2]$, puis calcule les images utiles.
Indice 3
Point délicat : f change de sens ; réunis les images des deux morceaux.

Réponse
Continuité. f est un polynôme, continu sur $[-1;2]$.

Variations. Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$. Donc f' est strictement négative sur $]-1;1[$ et strictement positive sur $]1;2]$. Ainsi f est strictement décroissante sur $[-1;1]$ et strictement croissante sur $[1;2]$.

Valeurs. $f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$, $f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$ et $f(2) = 16 - 12 + 1 = 5$.

Images. D'après l'image par une fonction continue et strictement monotone, $f([-1;1]) = [-3;5]$ et $f([1;2]) = [-3;5]$.

Conclusion. En réunissant les deux images :

$$f([-1;2]) = [-3;5].$$

Remarque **: Coin examen : rédiger l'image d'un segment**

Une question peut demander : « Déterminer $h([-1;2])$ », où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + x$.

La rédaction attendue nomme chaque hypothèse :

« La fonction h est continue sur $[-1;2]$, car c'est un polynôme. On a $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $[-1;2]$, donc h est strictement croissante sur $[-1;2]$. Donc $h([-1;2]) = [h(-1);h(2)]$, soit $h([-1;2]) = [-2;10]$. »

Sans la continuité et la stricte monotonie écrites, la conclusion n'est pas justifiée.

Théorème des valeurs intermédiaires

D'une perte à un gain

Un atelier fictif fabrique x centaines de chaises, avec $x \in [1;4]$. Son bénéfice, en milliers de dirhams, est $G(x) = -x^2 + 8x - 10$.

Pour $x = 1$, l'atelier perd de l'argent : $G(1) = -3$. Pour $x = 4$, il en gagne : $G(4) = 6$. Entre les deux, le bénéfice varie sans saut.

Devine : Un bénéfice nul ?

La fonction G est continue sur $[1;4]$, avec $G(1) = -3$ et $G(4) = 6$. Existe-t-il une production pour laquelle le bénéfice est nul ?

A. Oui, exactement une.

Faux.
On ne peut pas encore l'affirmer : une courbe peut couper l'axe plusieurs fois.

B. Oui, au moins une.

Juste.

Juste : pour passer de -3 à 6 sans saut, la courbe traverse la valeur 0.

C. Pas forcément.

Faux.

Une courbe sans saut qui part de -3 et arrive à 6 ne peut pas éviter 0.

D. Oui, au milieu, en $x = 2{,}5$.

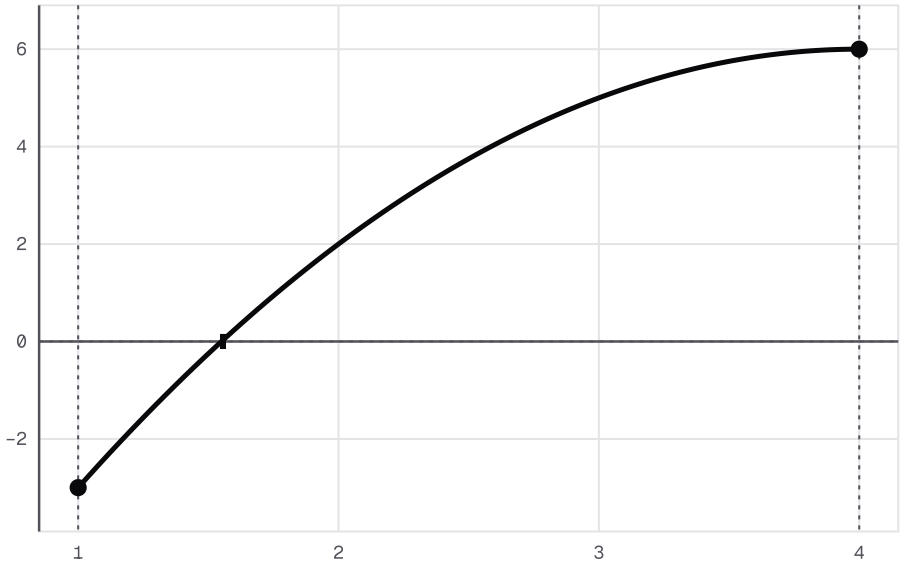
Faux.

$G(2{,}5) = -6{,}25 + 20 - 10 = 3{,}75$: ce n'est pas 0.

Correction

La courbe de G part d'un point situé sous l'axe des abscisses et arrive au-dessus, sans saut.

Elle coupe donc l'axe au moins une fois : il existe au moins une production à bénéfice nul. La figure le montre.



Courbe de f Droite y = 0, et verticales x = a, x = b Intervalle contenant une solution, sur la droite y = k

La courbe du bénéfice, sous l'axe en 1 et au-dessus en 4, coupe l'axe des abscisses entre les deux.

a = 1, b = 4, k = 0.

f(a) ≈ −3 et f(b) ≈ 6.

Solutions de f(x) = k détectées, liste non exhaustive : x ∈ [1,5505102572 ; 1,5505102573].

Pourquoi est-ce vrai ? Regarde la figure : la courbe de G part sous l'axe des abscisses et finit au-dessus. Pour passer d'un côté à l'autre sans lever le crayon, elle doit traverser l'axe.

La preuve qui suit traduit cette image à l'aide de l'image d'un segment, vue plus haut.

Le théorème

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue sur le segment** $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

Démonstration

Étape 1. La fonction f est continue sur le segment $[a;b]$. D'après le théorème de l'image d'un segment, $f([a;b])$ est un segment $[m;M]$.

Étape 2. Les réels a et b appartiennent à $[a;b]$, donc $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f([a;b])$; donc $m\leq f(a)\leq M$ et $m\leq f(b)\leq M$. Un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ vérifie donc aussi $m\leq k\leq M$: il appartient à $f([a;b])$.

Étape 3. Par définition de l'image d'un ensemble, il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée tient en une phrase : **un segment contient tout ce qui est entre deux de ses éléments**.

L'image $f([a;b])$ est un segment $[m;M]$, et $f(a)$, $f(b)$ en font partie. Un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est donc entre m et M : c'est une image.

Le théorème découle directement de l'image d'un segment.

Vérifie : L'argument central

Dans la preuve, pourquoi le réel k appartient-il à $f([a;b])$?

A. Parce que f est strictement croissante.

Faux.

La preuve ne suppose aucune monotonie : seulement la continuité.

B. Parce que $k=f(c)$, par définition de c.

Faux.

C'est la conclusion : la supposer serait tourner en rond.

C. Parce que $f(a)<f(b)$.

Faux.

Le théorème ne suppose pas $f(a)<f(b)$: k est entre $f(a)$ et $f(b)$, dans un ordre ou dans l'autre.

D. Parce que $m\leq k\leq M$, avec $[m;M]=f([a;b])$.

Juste.

Juste : k est coincé entre deux éléments du segment image.

Correction

La fonction est continue sur $[a;b]$: son image est un segment $[m;M]$.

Comme $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à ce segment, tout réel k compris entre eux vérifie $m \leq k \leq M$.

Donc k appartient à $f([a;b])$: il existe c dans $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

Exemple : Exemple, puis un contre-exemple

Une recette atteinte. Une recette fictive vaut $V(x)=x^2+2x$ sur $[3;6]$, avec $V(3)=15$ et $V(6)=48$. Elle est continue, car c'est un polynôme, et 30 est compris entre 15 et 48. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la recette atteint 30 au moins une fois.

L'hypothèse compte. Soit t la fonction définie sur $[0;4]$ par :

$$t(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<2 \\ x+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

On a $t(0)=0$ et $t(4)=7$, mais t ne prend jamais la valeur 4 : elle saute de 2 à 5. Elle n'est pas continue en 2.

Signes contraires

Pourquoi est-ce vrai ? Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, la courbe part d'un côté de l'axe des abscisses et finit de l'autre.

Sans saut, elle coupe l'axe quelque part entre les deux extrémités.

Propriété : Cas où f(a) et f(b) sont de signes contraires

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Si $f(a)\times f(b)<0$, c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Démonstration

Étape 1. Comme $f(a)\times f(b)<0$, les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires : le réel 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Étape 2. La fonction f est continue sur $[a;b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué avec $k=0$, il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=0$.

Étape 3. Or $f(a)\neq 0$ et $f(b)\neq 0$, donc $c\neq a$ et $c\neq b$: la solution c appartient à $]a;b[$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'inégalité stricte $f(a)\times f(b)<0$ sert **deux fois**.

D'abord, elle place 0 entre $f(a)$ et $f(b)$: le théorème s'applique avec $k = 0$.

Ensuite, elle interdit $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$: la solution est donc dans l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Vérifie : Pourquoi l'intervalle ouvert ?

Dans la preuve, pourquoi la solution c n'est-elle égale ni à a ni à b ?

A. Parce que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.

Juste.

Juste : si c valait a, on aurait $f(a) = f(c) = 0$.

B. Parce que la solution est dans $]a; b[$.

Faux.

C'est ce qu'il faut démontrer : on ne peut pas s'en servir.

C. Parce que f est strictement monotone.

Faux.

La preuve n'utilise aucune monotonie.

D. Parce que $a < b$.

Faux.

L'ordre de a et de b ne dit rien des valeurs de f.

Correction

Le produit $f(a) \times f(b)$ est strictement négatif, donc non nul : $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.

Or $f(c) = 0$. Donc $c \neq a$ et $c \neq b$: la solution appartient à $]a; b[$.

Exemple : le seuil de rentabilité (données fictives)

Reprends le bénéfice $G(x) = -x^2 + 8x - 10$ de l'atelier. G est un polynôme, donc continu sur $[1; 4]$. De plus :

$$\begin{aligned} G(1) \times G(4) &= (-3) \times 6 \\ &= -18 < 0. \end{aligned}$$

D'après le cas des signes contraires, l'équation $G(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]1; 4[$. Cette production, où le bénéfice s'annule, est un **seuil de rentabilité**.

La méthode, à toi

Méthode : montrer qu'une équation a au moins une solution

1. **Écris l'équation** sous la forme $f(x) = k$ ou $f(x) = 0$, et choisis un segment $[a; b]$.
2. **Justifie** que f est continue sur $[a; b]$.

3. **Calcule** $f(a)$ et $f(b)$, puis vérifie que k est compris entre eux. Pour $k = 0$, vérifie que $f(a) \times f(b) < 0$.
4. **Conclus** en citant le théorème des valeurs intermédiaires.

À toi : Une solution entre 0 et 1

Montre que l'équation $x^3 - 5x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $f(x) = x^3 - 5x + 1$ et suis la méthode sur le segment $[0; 1]$.
Indice 2
Calcule $f(0)$ et $f(1)$, puis leur produit.
Indice 3
Point délicat : pour obtenir l'intervalle ouvert $]0; 1[$, il faut un produit **strictement** négatif.

Réponse
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

Continuité. La fonction f est un polynôme, donc continue sur $[0; 1]$.

Signes. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - 5 + 1 = -3$, donc $f(0) \times f(1) = -3 < 0$.

Conclusion. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas des signes contraires, l'équation $x^3 - 5x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0; 1[$.

Un piège, Coin examen

Attention : la continuité sur tout le segment

✗ « La fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x - 1}$ vérifie $g(0) = -2$ et $g(2) = 2$, donc g s'annule entre 0 et 2. »

✓ La fonction g n'est pas définie en 1, donc pas continue sur $[0; 2]$: le théorème ne s'applique pas.

D'ailleurs, $\dfrac{2}{x - 1}$ ne vaut jamais 0, car son numérateur vaut 2. Vérifie la continuité sur **tout** le segment.

Remarque : Coin examen : rédiger l'existence d'une solution

La rédaction attendue cite la continuité, le signe du produit des deux valeurs et le théorème. Avec la fonction de l'exercice précédent :

« La fonction f est continue sur $[0;1]$, car c'est un polynôme. On a $f(0)=1$ et $f(1)=-3$, donc $f(0)\times f(1)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas des signes contraires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$. »

Pour une solution unique, il manque encore un argument : c'est la section suivante.

Unicité, encadrement et signe

Une seule fois

L'idée. Trace une droite horizontale. Une courbe qui ne fait que monter la coupe au plus une fois : après l'avoir traversée, elle reste au-dessus.

Une courbe qui monte puis descend peut la couper deux fois. La stricte monotonie empêche ces retours en arrière.

Devine : Combien de solutions ?

Une fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;3]$, avec $f(0)=-2$ et $f(3)=4$. Combien l'équation $f(x)=1$ a-t-elle de solutions dans $[0;3]$?

A. Aucune.

Faux.
Le réel 1 est compris entre -2 et 4 : il y en a au moins une.

B. Au moins deux.

Faux.
Une courbe strictement croissante ne repasse jamais par la même hauteur.

C. On ne peut pas savoir.

Faux.
La continuité et la stricte monotonie suffisent à conclure.

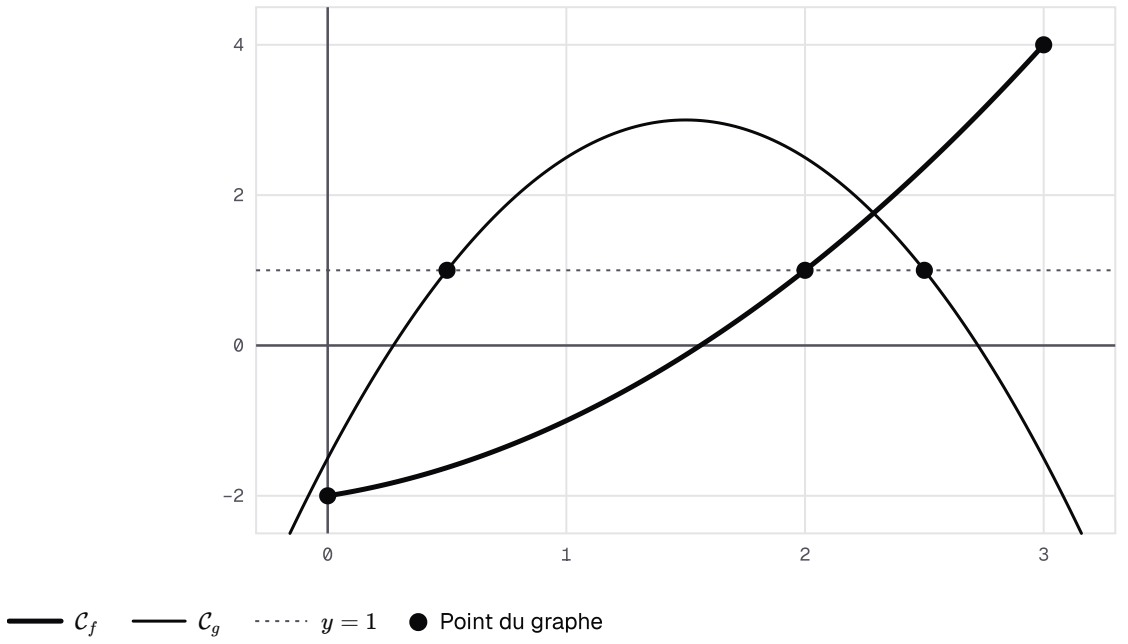
D. Exactement une.

Juste.
Juste : au moins une par continuité, au plus une par stricte croissance.

Correction
Le réel 1 est compris entre $f(0)=-2$ et $f(3)=4$, et f est continue : la courbe atteint la hauteur 1 au moins une fois.

Comme elle ne fait que monter, elle ne repasse jamais par cette hauteur. Il y a donc exactement une solution.

Pourquoi est-ce vrai ? Reprends la droite horizontale. Sans saut, la courbe la rencontre au moins une fois. Si elle ne fait que monter, ou que descendre, elle ne peut pas revenir la croiser une seconde fois.



Une courbe qui ne fait que monter coupe la droite d'équation y = 1 une seule fois ; une courbe qui monte puis descend la coupe deux fois.

Le théorème

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur le segment $[a;b]$.

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$.
- En particulier, si $f(a)\times f(b)<0$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]a;b[$.
- Plus généralement, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, pour tout réel k de $f(I)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans I.

Démonstration

Étape 1. Existence. Sur $[a;b]$, la fonction f est continue : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution ; si $f(a)\times f(b)<0$, le cas des signes contraires donne une solution dans $]a;b[$. Sur un intervalle I, un réel k de $f(I)$ s'écrit $f(c)$ avec c dans I, par définition de l'image.

Étape 2. Unicité. Supposons que l'équation ait deux solutions c et c' distinctes, par exemple $c<c'$. Si f est strictement croissante, alors $f(c)<f(c')$; si elle est strictement décroissante, alors $f(c)>f(c')$. Dans les deux cas $f(c)\neq f(c')$, ce qui contredit $f(c)=f(c')=k$.

Étape 3. L'équation a donc une solution, et une seule.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve sépare deux questions.

- **Existence** : le théorème des valeurs intermédiaires, qui demande la continuité.
- **Unicité** : un raisonnement par l'absurde, qui demande la stricte monotonie seule.

Deux solutions distinctes $c < c'$ auraient des images différentes, ce qui contredit $f(c) = f(c') = k$.

Vérifie : L'hypothèse de l'unicité

Dans la preuve de l'unicité, quelle hypothèse est utilisée ?

A. La continuité de f.

Faux.

Elle sert à l'existence, pas à l'unicité.

B. La stricte monotonie de f.

Juste.

Juste : elle donne $f(c) \neq f(c')$ pour $c \neq c'$.

C. Le signe de $f(a) \times f(b)$.

Faux.

Il place 0 entre $f(a)$ et $f(b)$: il sert à l'existence.

D. Le fait que l'intervalle soit fermé.

Faux.

L'unicité vaut sur tout intervalle, fermé ou non.

Correction

L'unicité se prouve par l'absurde. Deux solutions distinctes $c < c'$ auraient, par stricte monotonie, des images différentes : $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$.

Cela contredit $f(c) = f(c') = k$. Seule la stricte monotonie sert ici.

Exemple : Contre-exemple : sans monotonie, plusieurs solutions

Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Elle est continue, et $f(-2) \times f(2) = (-1) \times 3 = -3 < 0$.

Mais f n'est pas monotone : $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$. Le signe change sur $[-2; -1]$, sur $[-1; 1]$ et sur $[1; 2]$.

L'équation $f(x) = 0$ a donc au moins **trois** solutions dans $[-2; 2]$. Sans stricte monotonie, l'unicité n'est pas garantie.

Unicité et encadrement

Attention : croissante ne suffit pas

✗ « T est continue et croissante sur $[0;5]$, avec $T(0)=0$ et $T(5)=3$, donc $T(x)=1$ a une unique solution. »

✓ Il faut une monotonie **stricte**. Voici un contre-exemple, la fonction T définie sur $[0;5]$ par :

$$T(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } 1\leq x\leq 3 \\ x-2 & \text{si } 3<x\leq 5 \end{cases}$$

La fonction T est continue et croissante. Pourtant, tout réel de $[1;3]$ est solution de $T(x)=1$.

Méthode : prouver l'unicité et encadrer la solution

1. **Complète la méthode de l'existence** par la stricte monotonie de f sur $[a;b]$, établie par le signe de f'. Cite le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone : la solution α est unique dans $[a;b]$.
2. **Encadre** α : choisis $p<q$ dans $[a;b]$, puis calcule $f(p)$ et $f(q)$, à la calculatrice si besoin. Si $f(p)\times f(q)<0$, une solution est dans $]p;q[$. Comme la solution est unique, c'est α : $p<\alpha<q$.

Exemple : unicité, puis encadrement

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x^3+2x-4$.

Continuité. f est un polynôme, continu sur $[1;2]$.

Stricte monotonie. $f'(x)=3x^2+2>0$ sur $[1;2]$, donc f est strictement croissante sur $[1;2]$.

Signes. $f(1)=-1$ et $f(2)=8$, donc $f(1)\times f(2)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1;2[$.

Encadrement. La calculatrice donne $f(1{,}1)=-0{,}469$ et $f(1{,}2)=0{,}128$. La fonction f est continue sur $[1{,}1;1{,}2]$ et $f(1{,}1)\times f(1{,}2)<0$: d'après le cas des signes contraires, l'équation a une solution dans $]1{,}1;1{,}2[$.

Conclusion. Comme la solution est unique dans $[1;2]$, c'est α : $1{,}1<\alpha<1{,}2$.

Le signe grâce à la solution

Méthode : le signe d'une fonction à l'aide de la solution

1. **Établis** que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle étudié, et que $f(\alpha)=0$.

2. **Compare** à α : si f est strictement croissante, $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$. Si elle est strictement décroissante, c'est l'inverse.
3. **Résume** le signe dans un tableau. Il sert ensuite à étudier les variations d'une autre fonction.

Exemple : le signe sur $\mathbb{R}$

Reprends la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x - 4$, cette fois sur $\mathbb{R}$. C'est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle ne s'annule donc qu'en α.

Pour $x < \alpha$, $f(x) < f(\alpha) = 0$; pour $x > \alpha$, $f(x) > f(\alpha) = 0$. Le tableau ci-dessous résume ce signe.

Signe de f(x) sur $\mathbb{R}$, à l'aide de la solution α

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

Vérifie : Le signe en un point

Une fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0;5]$, et $g(\beta) = 0$ avec $1{,}7 < \beta < 1{,}8$. Quel est le signe de $g(4)$?

A. $g(4) < 0$
Juste.
Juste : $4 > \beta$, et g est strictement décroissante.

B. $g(4) > 0$
Faux.
g décroît : après β, elle passe sous 0.

C. $g(4) = 0$
Faux.
g ne s'annule qu'en β, et $4 \neq \beta$.

D. On ne peut pas savoir sans formule.
Faux.
La stricte monotonie et $g(\beta) = 0$ suffisent.

Correction
Comme $\beta < 1{,}8 < 4$ et que g est strictement décroissante, $g(4) < g(\beta) = 0$. Donc $g(4)$ est strictement négatif.

À toi, Coin examen

À toi : Unicité et encadrement

Montre que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution γ dans $[1;2]$. Encadre ensuite γ entre deux décimaux d'écart $0{,}1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $f(x) = x^3 + x - 3$: étudie sa continuité, puis le signe de $f'(x)$ sur $[1;2]$.
Indice 2
Calcule $f(1)$ et $f(2)$. Pour l'encadrement, essaie à la calculatrice des décimaux d'écart $0{,}1$ entre 1 et 2.
Indice 3
Point délicat : l'encadrement ne vaut que parce que la solution est unique dans $[1;2]$.

Réponse
Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

Continuité. f est un polynôme, continu sur $[1;2]$.

Stricte monotonie. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $[1;2]$: f y est strictement croissante.

Unicité. $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$, donc $f(1) \times f(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, l'équation admet une unique solution γ dans $]1;2[$.

Encadrement. $f(1{,}2) = -0{,}072$ et $f(1{,}3) = 0{,}497$. La fonction f est continue sur $[1{,}2;1{,}3]$ et $f(1{,}2) \times f(1{,}3) < 0$: d'après le cas des signes contraires, l'équation a une solution dans $]1{,}2;1{,}3[$.

Conclusion. Comme la solution est unique, c'est γ : $1{,}2 < \gamma < 1{,}3$.

Remarque **: Coin examen : rédiger l'existence et l'unicité**

La rédaction attendue justifie les deux hypothèses et la condition sur les valeurs. Avec la fonction de l'exemple :

« La fonction f est continue sur $[1;2]$, car c'est un polynôme. On a $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ sur $[1;2]$, donc f est strictement croissante sur $[1;2]$. De plus, $f(1) = -1$ et $f(2) = 8$, donc $f(1) \times f(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cas strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1;2[$. »

Une hypothèse oubliée, et la conclusion n'est plus justifiée.

Fonction réciproque

Demande et prix

Un vendeur fictif de jus observe sa demande : au prix de p dirhams le litre, il vend $D(p) = 120 - 4p$ litres par jour, pour $p \in [0; 30]$.

D'habitude, on part du prix pour trouver la quantité. Mais le vendeur veut parfois l'inverse : partir de la quantité qu'il veut vendre, et trouver le prix à afficher.

Devine : Trouver le prix

Le vendeur veut vendre 80 litres par jour. Quel prix doit-il afficher ?

A. 10 DH

Juste.

Juste : $120 - 4 \times 10 = 80$.

B. 20 DH

Faux.

$D(20) = 120 - 80 = 40$: on a confondu 80 et $4p$.

C. Plusieurs prix conviennent.

Faux.

D est strictement décroissante : deux prix différents donnent deux quantités différentes.

D. Aucun prix ne convient.

Faux.

80 est entre $D(30) = 0$ et $D(0) = 120$: un prix convient.

Correction

On résout l'équation $120 - 4p = 80$:

$$\begin{aligned} 120 - 4p = 80 &\Leftrightarrow 4p = 40 \\ &\Leftrightarrow p = 10. \end{aligned}$$

Un seul prix convient, car D est strictement décroissante. À chaque quantité de $[0; 120]$ correspond ainsi un unique prix : c'est l'idée de la **fonction réciproque**.

Définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I, et $J = f(I)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, pour tout réel y de J, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I : on dit que f est une **bijection** de I sur J.

La fonction qui, à tout réel y de J, associe cette solution x est appelée **fonction réciproque** de f ; on la note f^{-1}. Elle est définie sur J et, pour tout x de I et tout y de J :

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Ainsi, pour tout x de I, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et, pour tout y de J, $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

Exemple : la demande inverse (données fictives)

- D est un polynôme, continu sur $[0;30]$. Sa dérivée vaut $D'(p) = -4 < 0$: D est strictement décroissante sur $[0;30]$.
- Son image est $J = [D(30);D(0)] = [0;120]$. On dit que D est une **bijection** de $[0;30]$ sur $[0;120]$: à chaque quantité de $[0;120]$ correspond un seul prix.
- Pour q dans $[0;120]$, $120 - 4p = q$ équivaut à $p = 30 - \dfrac{q}{4}$.

Donc, pour tout q de $[0;120]$:

$$D^{-1}(q) = 30 - \frac{q}{4}.$$

Les économistes l'appellent la **demande inverse** : elle donne le prix à partir de la quantité. Malgré son nom, c'est une réciproque, pas $\dfrac{1}{D}$.

Propriétés de la réciproque

Pourquoi est-ce vrai ? Pense à la demande : quand le prix monte, la quantité vendue baisse. Lue dans l'autre sens, la relation garde ce lien : quand la quantité visée monte, le prix à afficher baisse.

Sur un dessin, la réciproque se lit en échangeant le rôle des deux axes, comme un pliage le long de la droite d'équation $y = x$.

Propriété : Propriétés de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} sa fonction réciproque, définie sur $J = f(I)$.

- La fonction f^{-1} est continue sur J.
- La fonction f^{-1} est strictement monotone sur J, **de même sens de variation** que f.
- Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite d'équation** $y = x$.

Démonstration

Idée de la preuve. La continuité de f^{-1} est admise. Sens de variation : supposons f strictement croissante et prenons $y < y'$ dans J. Si l'on avait $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, la croissance de f donnerait $y \geq y'$, ce qui est impossible ; donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Le cas décroissant se traite de la même façon. Symétrie : pour u dans J et v dans I, le point de coordonnées $(u;v)$ appartient à la courbe de f^{-1} si et seulement si $v = f^{-1}(u)$, c'est-à-dire $f(v) = u$, c'est-à-dire si le point $(v;u)$ appartient à la courbe de f. Le fait que $(v;u)$ soit le symétrique de $(u;v)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé, est admis.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées.

- **Sens de variation** : on raisonne par l'absurde ; si l'ordre des antécédents était inversé, f inverserait l'ordre des images.
- **Courbe** : $(u;v)$ est sur la courbe de f^{-1} exactement quand $(v;u)$ est sur celle de f.

La continuité de f^{-1} et la symétrie des deux points restent admises.

Vérifie : Le sens de variation de la réciproque

f est strictement croissante, et $y < y'$ dans J. Dans l'esquisse, pourquoi ne peut-on pas avoir $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$?

A. Parce que $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f(y)}$.

Faux.
f^{-1} n'est pas l'inverse $\dfrac{1}{f}$.

B. Parce que la croissance de f donnerait $y \geq y'$.

Juste.
Juste : on applique f, qui conserve l'ordre.

C. Parce que la courbe de f^{-1} est au-dessus de la droite $y = x$.

Faux.
Rien ne place la courbe d'un côté de cette droite.

D. Parce que $f^{-1}(0) = 0$.

Faux.
Rien ne dit que $f^{-1}(0) = 0$; d'ailleurs, 0 n'est pas forcément dans J.

Correction
Si l'on avait $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, la croissance de f donnerait :

$$f\big(f^{-1}(y)\big) \geq f\big(f^{-1}(y')\big),$$

c'est-à-dire $y \geq y'$. C'est impossible, car $y < y'$.

Donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$: f^{-1} est strictement croissante.

Exemple : la demande inverse décroît aussi

La demande D est strictement décroissante sur $[0;30]$. D'après les propriétés de la réciproque, D^{-1} est strictement décroissante sur $[0;120]$.

Le calcul le confirme : $D^{-1}(q) = 30 - \dfrac{q}{4}$ diminue quand q augmente. Plus le vendeur veut vendre, plus son prix doit baisser.

L'hypothèse compte : sans stricte monotonie, une quantité pourrait correspondre à deux prix, et aucune réciproque n'existerait.

La méthode

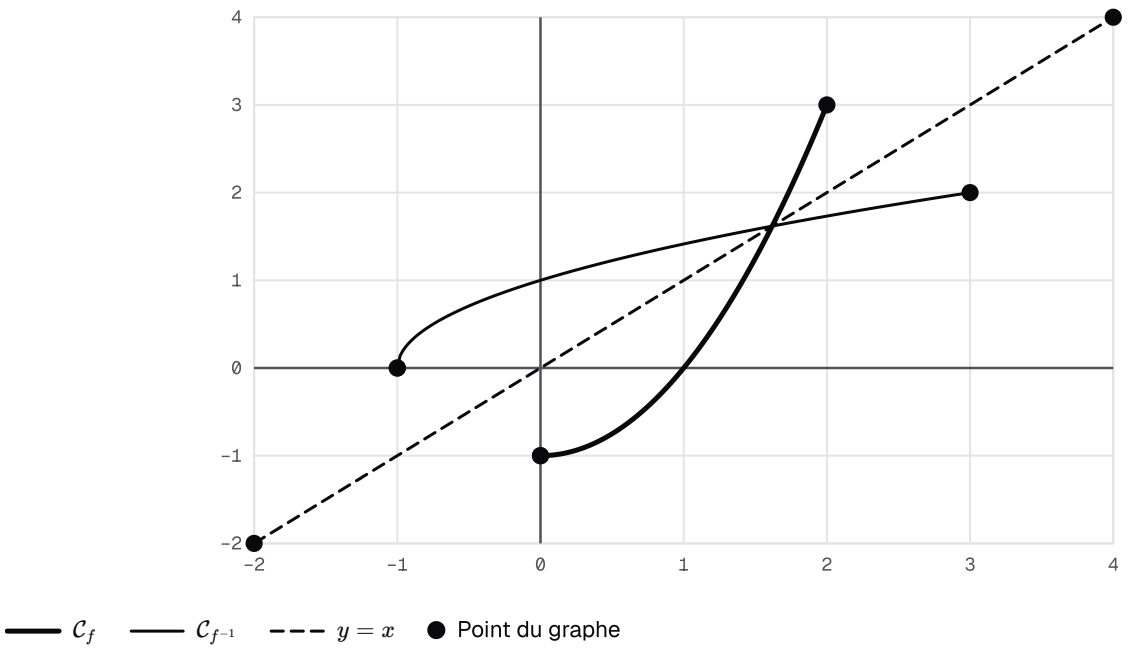
Méthode : étudier la fonction réciproque

1. **Justifie** que f est continue et strictement monotone sur I : elle admet une réciproque f^{-1}, définie sur $J = f(I)$.
2. **Détermine** J avec la méthode de l'image d'un intervalle.
3. **Explicite** f^{-1} si c'est possible : pour y dans J, résous $f(x) = y$ d'inconnue x dans I.
4. **Donne** le sens de variation de f^{-1}, le même que celui de f. **Trace** sa courbe par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé.

Exemple : une réciproque avec une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1$.

- **Existence** : f est un polynôme, continu sur I. Si $0 \leq x_1 < x_2$, alors $x_1^2 < x_2^2$: f est strictement croissante sur I.
- **Ensemble** : $f(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $J = [-1; +\infty[$.
- **Expression** : pour $y \geq -1$, l'égalité $x^2 - 1 = y$ avec $x \geq 0$ équivaut à $x = \sqrt{y+1}$. Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[-1; +\infty[$.
- **Variations et courbe** : f^{-1} est strictement croissante ; sa courbe est la symétrique de celle de f (figure).



La courbe de f, celle de sa réciproque et la droite d'équation y = x : les deux courbes sont symétriques par rapport à cette droite.

Un piège, à toi, Coin examen

Attention : réciproque n'est pas inverse

✗ « $f(x) = 4x + 7$, donc $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4x+7}$. »

✓ f^{-1} est la réciproque : pour tout réel y, on résout $4x + 7 = y$, d'où $x = \dfrac{y-7}{4}$. Donc, pour tout réel x, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-7}{4}$.

Contrôle en 3 : $f^{-1}(3) = -1$, et bien $f(-1) = 3$. Au contraire, $\dfrac{1}{f(3)} = \dfrac{1}{19}$.

À toi : Une réciproque à expliciter

Soit g la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$.

Montre que g admet une réciproque, donne son ensemble de définition J, puis l'expression de $g^{-1}(x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Si $2 \leq x_1 < x_2$, compare $\sqrt{x_1 - 2}$ et $\sqrt{x_2 - 2}$: la racine carrée est strictement croissante.

Indice 2

Calcule $g(2)$ et la limite de g en $+\infty$ pour obtenir J.

Indice 3

Point délicat : en résolvant $\sqrt{x-2} + 1 = y$, il faut $y \geq 1$ avant d'élever au carré.

Réponse

Continuité. Sur I, $x-2 \geq 0$: d'après les opérations sur les fonctions continues, g est continue sur I.

Stricte monotonie. Soit x_1 et x_2 tels que $2 \leq x_1 < x_2$. Alors $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$. La racine carrée étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a $\sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2}$, donc $g(x_1) < g(x_2)$. Ainsi g est strictement croissante sur I.

Ensemble J. La fonction g admet donc une réciproque, définie sur $J = g(I)$. Comme $g(2) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, on a $J = [1;+\infty[$.

Expression. Soit $y \geq 1$ et $x \geq 2$. Comme $y - 1 \geq 0$:

$$\begin{aligned} & g(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2} = y-1 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2 = (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x = (y-1)^2 + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $g^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ sur $[1;+\infty[$.

Remarque **: Coin examen : rédiger l'existence de la réciproque**

La rédaction attendue justifie chaque hypothèse, ici pour la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$:

« La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$, car c'est un polynôme. Si $0 \leq x_1 < x_2$, alors $x_1^2 < x_2^2$, donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $J = f([0;+\infty[) = [-1;+\infty[$, car $f(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f^{-1} est strictement croissante sur J, comme f. »

Pour la courbe : « La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir **: quel théorème pour quelle question**

- **Continuité en un point** : compare la limite, ou les limites à droite et à gauche, à la valeur.
- **Continuité sur un intervalle** : fonctions usuelles, opérations, composée, chaque condition vérifiée.
- **Valeurs prises** : image d'un intervalle ; si la fonction est strictement monotone, calcule les images ou les limites aux bornes.
- **Au moins une solution** : f continue sur $[a;b]$, et k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- **Une seule solution** : en plus, la stricte monotonie ; puis un encadrement par deux images.

- **Réciproque** : continue et strictement monotone sur I, définie sur $J = f(I)$, de même sens de variation.

Remarque : Tableau des réflexes : écrire les hypothèses

Écris les hypothèses en toutes lettres, puis nomme le théorème.

Question posée	Ce que tu cites	Hypothèses à écrire
Continuité en a	définition, ou deux côtés	limite égale à $f(a)$
Continuité sur I	usuelles, opérations, composée	dénominateur non nul, racine d'un positif, inclusion
Image d'un intervalle	fonction strictement monotone	continue et strictement monotone
Au moins une solution	valeurs intermédiaires	continue sur $[a;b]$, k entre $f(a)$ et $f(b)$
Une seule solution	cas strictement monotone	en plus, strictement monotone
Encadrer la solution	signes contraires sur $[p;q]$	continue sur $[p;q]$, $f(p) \times f(q) < 0$, solution unique
Réciproque	fonction réciproque	continue et strictement monotone sur I, $J = f(I)$

Sans hypothèse nommée, une conclusion juste n'est pas justifiée.

Le mot du prof. Tu sais maintenant prouver qu'une équation a une solution, et une seule, sans savoir la calculer. Tu sais aussi l'encadrer. Ces outils reviendront dans l'étude des fonctions, des suites et du logarithme. Garde tes rédactions modèles sous la main.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Continuité » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)