BURHAN

Résumé : Calcul intégral

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/resume

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

Intégrale et primitive

À retenir : Une seule idée : la variation d'une primitive

Une intégrale est la variation d'une primitive entre deux bornes. Pour la calculer, tu cherches une primitive, puis tu fais « valeur en haut moins valeur en bas ». Toutes les primitives donnent le même résultat. Une intégrale est un nombre réel : il peut être négatif.

Définition : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b deux réels de I. Le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle l'**intégrale de a à b de f**. On le note :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[F(x)\right]_a^b \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Ce réel ne dépend pas de la primitive choisie : deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante k, et $\big(F(b)+k\big) - \big(F(a)+k\big) = F(b) - F(a)$.

Les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale. La lettre x est **muette** : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété : Intégrale à bornes égales ou échangées

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I. Alors :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode : calculer une intégrale avec une primitive

1. **Contrôle** la continuité de la fonction sur un intervalle qui contient a et b.
2. **Cherche** une primitive F : forme usuelle, ou forme composée $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'e^u$.
3. **Pose** le crochet $\left[F(x)\right]_a^b$.

4. **Calcule** $F(b)$, puis $F(a)$ entre parenthèses, et fais la différence.

Exemple

Énoncé. Calcule $\int_1^2 (4x^3 + 6x)\,\mathrm{d}x$.

Primitive. La fonction est un polynôme, continue sur $[1;2]$. Une primitive est $x \mapsto x^4 + 3x^2$.

Crochet. $\left[x^4 + 3x^2\right]_1^2 = (16 + 12) - (1 + 3) = 24$.

Exemple

Forme $\frac{u'}{u}$. Avec $u : x \mapsto x^2 + 1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, on obtient $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Forme $u'e^u$. Avec $u : x \mapsto 2x$, on obtient $\int_0^1 2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^1 = e^2 - 1$.

Forme $u'u^n$. Pour tout réel x, $6x(x^2+1)^2 = 3 \times 2x(x^2+1)^2$. Une primitive est $x \mapsto (x^2+1)^3$, donc $\int_0^1 6x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x = \left[(x^2+1)^3\right]_0^1 = 8 - 1 = 7$.

Attention : Le crochet exige des parenthèses

Prends $\left[x^2 - 4x\right]_{-1}^2$. La bonne écriture est $(4 - 8) - (1 + 4) = -9$.

Sans parenthèses autour de la valeur en -1, on écrit $4 - 8 - 1 + 4 = -1$, ce qui est faux : seul le premier terme a changé de signe.

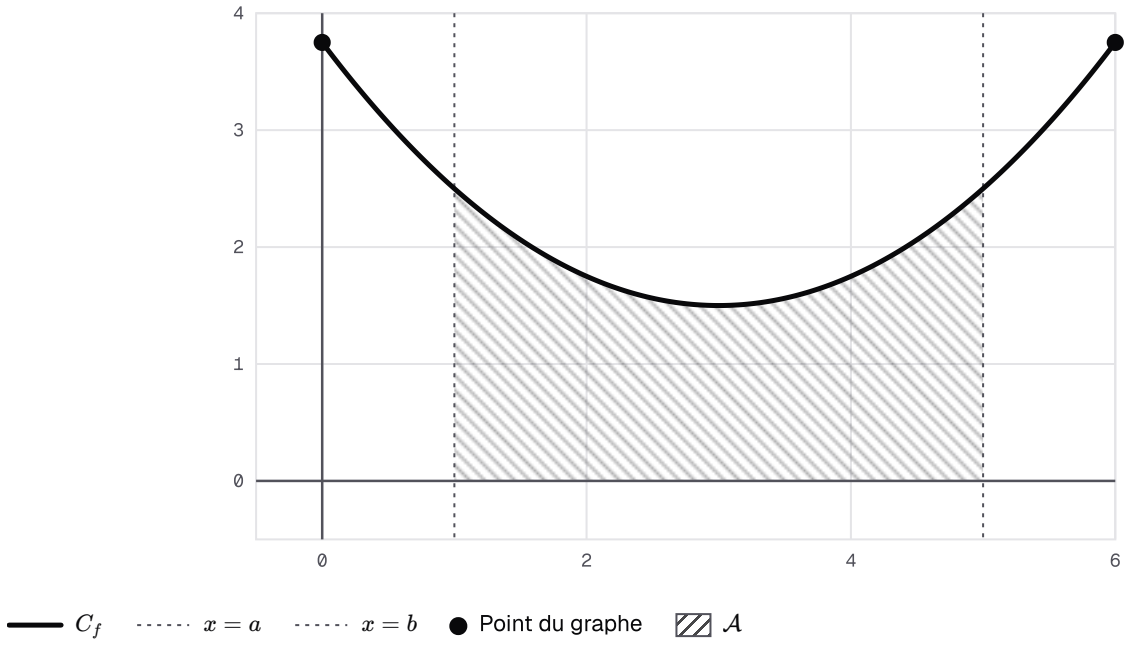
Entoure toujours $F(a)$ de parenthèses.

Intégrale et aire

Propriété : Intégrale d'une fonction positive et aire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'**unité d'aire**, notée u.a., est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;b]$, avec $a < b$, et C_f sa courbe. L'aire du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aire.



Une fonction positive sur [a ; b] : l'aire hachurée sous sa courbe, en u.a., est l'intégrale de a à b.

Remarque : Un résultat admis, sous deux conditions

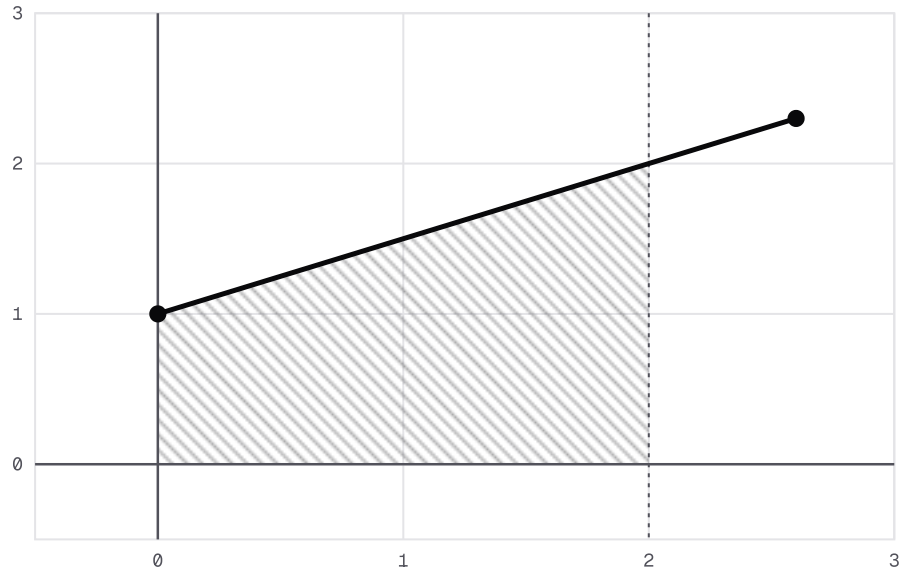
Ce résultat est admis : le programme ne construit pas la notion d'aire. Il ne vaut que pour une fonction **positive** et des bornes dans l'ordre $a < b$. Le domaine se décrit par quatre bords : la courbe, l'axe des abscisses et deux droites verticales.

Exemple

Énoncé. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 1$ est positive sur $[0 ; 2]$. Dessine sur ton cahier le domaine sous sa courbe, entre $x = 0$ et $x = 2$: c'est un trapèze.

Intégrale. $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_0^2 = 1 + 2 = 3.$

Contrôle géométrique. Les côtés parallèles mesurent $f(0) = 1$ et $f(2) = 2$, la hauteur 2 : l'aire vaut $\dfrac{(1 + 2) \times 2}{2} = 3$ u.a.



$y = \frac{x}{2} + 1$ $x = 2$ Point du graphe Domaine hachuré

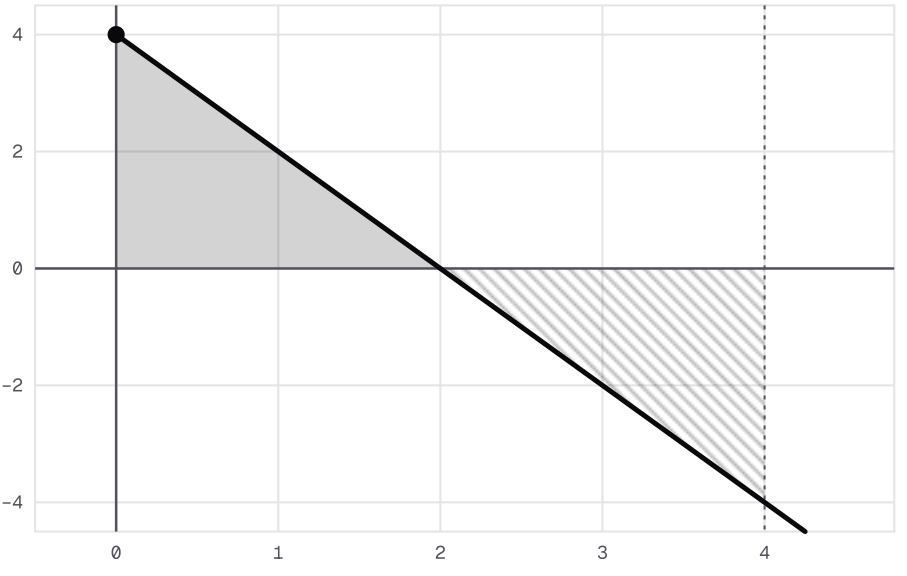
Le trapèze sous la droite y = x/2 + 1 : côtés parallèles de longueurs 1 et 2, hauteur 2.

Attention : Une intégrale nulle n'est pas une aire nulle

Pour la fonction $x \mapsto 4 - 2x$ sur $[0; 4]$, on trouve $\int_0^4 (4 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[4x - x^2\right]_0^4 = 0$.

Pourtant le domaine n'est pas vide : il forme deux triangles d'aire 4 u.a. chacun, de part et d'autre de $x = 2$. L'aire vaut 8 u.a.

La fonction change de signe : l'intégrale n'est pas une aire.



$y = 4 - 2x$ $x = 4$ Point du graphe Domaine teinté Domaine hachuré

Pour 4 - 2x sur [0 ; 4], deux triangles de même aire, l'un au-dessus de l'axe, l'autre en dessous.

Relation de Chasles et linéarité

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b et c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I, et α un réel. Alors :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode : intégrer une valeur absolue

1. **Repère** les points où l'expression dans la valeur absolue s'annule en changeant de signe.
2. **Coupe** l'intervalle en ces points avec la relation de Chasles.
3. **Supprime** la valeur absolue sur chaque morceau, d'après le signe trouvé.
4. **Additionne** les intégrales obtenues : chacune est positive.

Exemple

Énoncé. Calcule $\int_1^4 |2x-6|\,\mathrm{d}x$.

Signe. L'expression $2x-6$ s'annule en 3 ; elle est négative sur $[1;3]$ et positive sur $[3;4]$.

Chasles.

$$\begin{aligned}&\int_1^4 |2x-6|\,\mathrm{d}x\\&= \int_1^3 (6-2x)\,\mathrm{d}x\\&\quad + \int_3^4 (2x-6)\,\mathrm{d}x\\&= \big[6x-x^2\big]_1^3\\&\quad + \big[x^2-6x\big]_3^4.\end{aligned}$$

Calcul. $(9-5)+(-8+9)=4+1=5$.

Exemple

Énoncé. On sait que $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=5$ et $\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x=-1$, pour deux fonctions g et h continues sur $[0;2]$.

Linéarité. $\int_0^2 \big(2g(x)-4h(x)\big)\,\mathrm{d}x = 2\times 5-4\times(-1)=14$.

Tu n'as besoin d'aucune primitive : seules les deux valeurs servent.

Ordre et encadrement

Propriété : Positivité et comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, avec $a\leq b$.

- **Positivité** : si $f(x)\geq 0$ pour tout x de $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$.
- **Comparaison** : si $f(x)\leq g(x)$ pour tout x de $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

L'hypothèse $a\leq b$ est indispensable : les bornes doivent être dans l'ordre croissant.

Propriété : Encadrement d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a\leq b$, et m et M deux réels tels que $m\leq f(x)\leq M$ pour tout x de $[a;b]$. Alors

$$\begin{aligned}m(b-a)\leq &\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq M(b-a).\end{aligned}$$

Méthode : encadrer une intégrale sans la calculer

1. **Encadre** la fonction sur $[a;b]$ par deux nombres, ou par deux fonctions faciles à intégrer.
2. **Contrôle** l'ordre des bornes : il faut $a\leq b$.
3. **Intègre** l'encadrement, membre à membre, avec la propriété de comparaison.

4. **Conclus** en calculant les deux intégrales extrêmes.

Exemple

Énoncé. Encadre $I = \int_0^2 \frac{4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$. Tu ne connais aucune primitive de cette fonction.

Encadrer la fonction. Pour tout x de $[0;2]$, $4 \leq x^2+4 \leq 8$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $]0;+\infty[$, on passe à l'inverse en changeant le sens, puis on multiplie par 4 : $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{x^2+4} \leq 1$.

Intégrer. La fonction est continue sur $[0;2]$, et les bornes vérifient $0 \leq 2$. L'encadrement donne $\frac{1}{2} \times 2 \leq I \leq 1 \times 2$, soit $1 \leq I \leq 2$.

Attention : Positivité seulement avec a ≤ b

La fonction $x \mapsto 2x$ est positive sur $[0;2]$. Pourtant $\int_2^0 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_2^0 = 0-4 = -4$.

Ici, la borne du bas dépasse celle du haut. Remets d'abord les bornes dans l'ordre, puis applique la positivité.

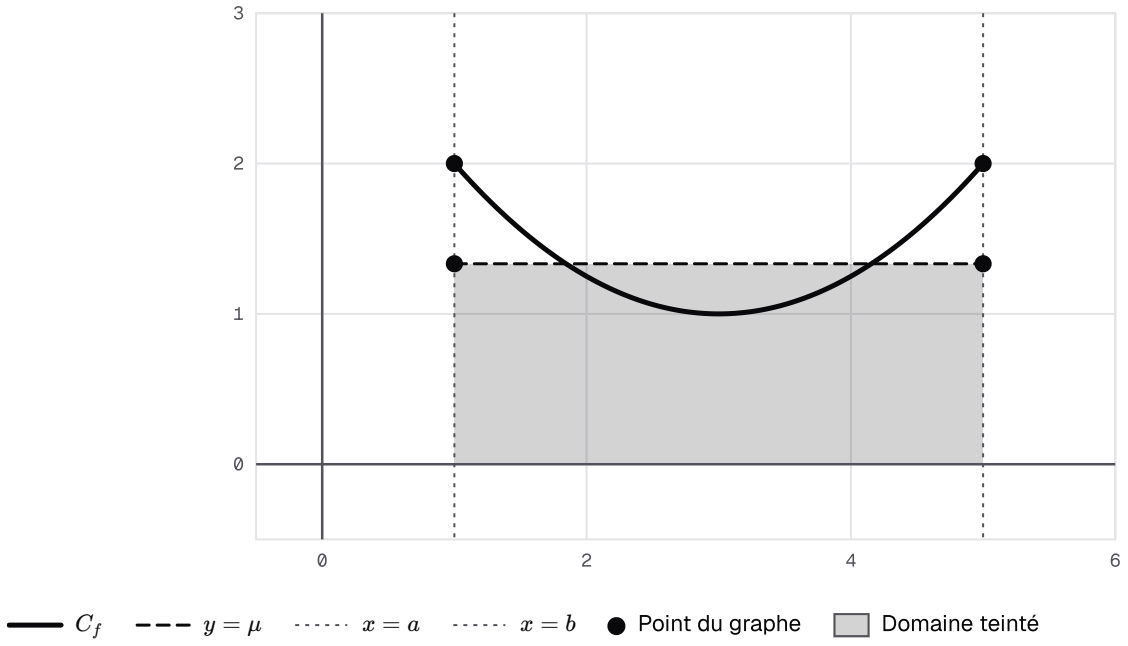
Valeur moyenne

Définition : Valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$. La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque f est positive, le rectangle de base $[a;b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe de f entre a et b.



Valeur moyenne μ : le rectangle teinté de base [a ; b] et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe.

Propriété : La valeur moyenne est atteinte

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a < b$, et μ sa valeur moyenne sur $[a;b]$. Si m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a;b]$, alors $m \leq \mu \leq M$, et il existe au moins un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Méthode : calculer et interpréter une valeur moyenne

1. **Contrôle** la continuité sur $[a;b]$ et l'inégalité stricte $a < b$.
2. **Intègre** la fonction de a à b.
3. **Divise** par la longueur $b - a$.
4. **Interprète** : la valeur moyenne garde l'unité de la fonction, et se situe entre son minimum et son maximum.

Exemple

Situation (données fictives). Un atelier consomme $c(t) = 2t^2 - 8t + 12$ kilowattheures par heure, t heures après l'ouverture, pour t dans $[0;4]$. La fonction c est continue sur $[0;4]$.

Intégrale. $\int_0^4 c(t)\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{2t^3}{3} - 4t^2 + 12t\right]_0^4 = \dfrac{128}{3} - 64 + 48 = \dfrac{80}{3}$.

Moyenne. $\mu = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{80}{3} = \dfrac{20}{3} \approx 6{,}67$ kilowattheures par heure.

Remarque : La moyenne est atteinte

Pour tout réel t, $c(t) = 2(t-2)^2 + 4$. Sur $[0;4]$, le minimum vaut 4 et le maximum 12 : on retrouve $4 \leq \dfrac{20}{3} \leq 12$.

L'équation $c(t) = \dfrac{20}{3}$ donne $(t-2)^2 = \dfrac{4}{3}$, soit $t = 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $t = 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Les deux instants sont dans $[0;4]$.

Attention : Deux valeurs aux bornes ne font pas une moyenne

Pour l'atelier, $c(0) = 12$ et $c(4) = 12$. La moyenne de ces deux valeurs vaut 12, alors que la valeur moyenne vaut $\dfrac{20}{3}$.

Entre 0 et 4, la consommation descend jusqu'à 4 : deux relevés aux extrémités ne le voient pas. Passe toujours par l'intégrale.

Intégration par parties

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, et a et b deux réels de I. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x &= \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b \\ &\quad - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Méthode : choisir les facteurs d'une intégration par parties

1. **Repère** un produit qui n'a aucune des formes $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'e^u$: par exemple un polynôme fois e^x, ou un polynôme fois $\ln x$.
2. **Choisis** u', le facteur dont tu connais une primitive, et v, celui que la dérivation simplifie : avec e^x, le polynôme est v ; avec $\ln x$, c'est $\ln x$ qui est v et le polynôme devient u'.
3. **Écris** u, v', et vérifie que u' et v' sont continues.
4. **Applique** la formule ; l'intégrale restante doit être plus simple.

Exemple

Énoncé. Calcule $\int_0^1 (2x+2)e^x\,\mathrm{d}x$.

Choix. Pour tout réel x, $u'(x) = e^x$ et $v(x) = 2x + 2$, donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2$: ces fonctions sont continues.

Formule.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2x+2)e^x \,\mathrm{d}x \\ &= [(2x+2)e^x]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 2e^x \,\mathrm{d}x \\ &= (4e-2) - (2e-2) = 2e.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\int_1^2 4x \ln x \,\mathrm{d}x$.

Choix. On ne dérive pas $4x$: on dérive $\ln x$. Pour tout x de $[1;2]$, on pose $u'(x) = 4x$, $u(x) = 2x^2$, $v(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Formule.

$$\begin{aligned}&\int_1^2 4x \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[2x^2 \ln x\right]_1^2 \\ &\quad - \int_1^2 2x \,\mathrm{d}x \\ &= 8\ln 2 - \left[x^2\right]_1^2 \\ &= 8\ln 2 - 3.\end{aligned}$$

Attention : Jamais le produit des intégrales

Sur $[0;2]$, l'intégrale de x vaut 2 et celle de $2x$ vaut 4. Leur produit vaut 8.

Or $\int_0^2 x \times 2x \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{16}{3}$. Un produit ne se sépare pas sous l'intégrale.

Calcul d'aires

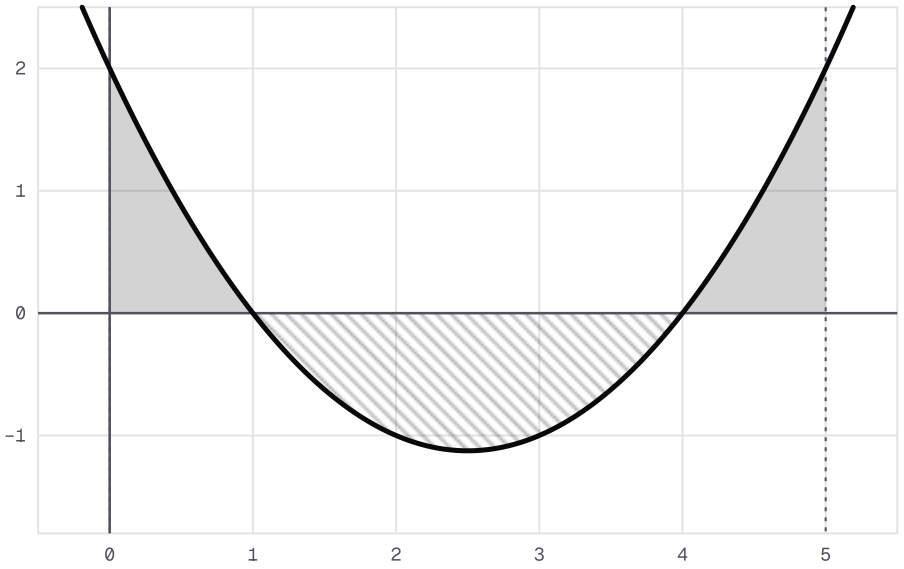
Propriété : Aire entre une courbe et l'axe des abscisses

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a < b$. L'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

En particulier, si f est **négative** sur $[a;b]$, alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ u.a.

Si f change de signe, on découpe $[a;b]$ aux points où f s'annule en changeant de signe.



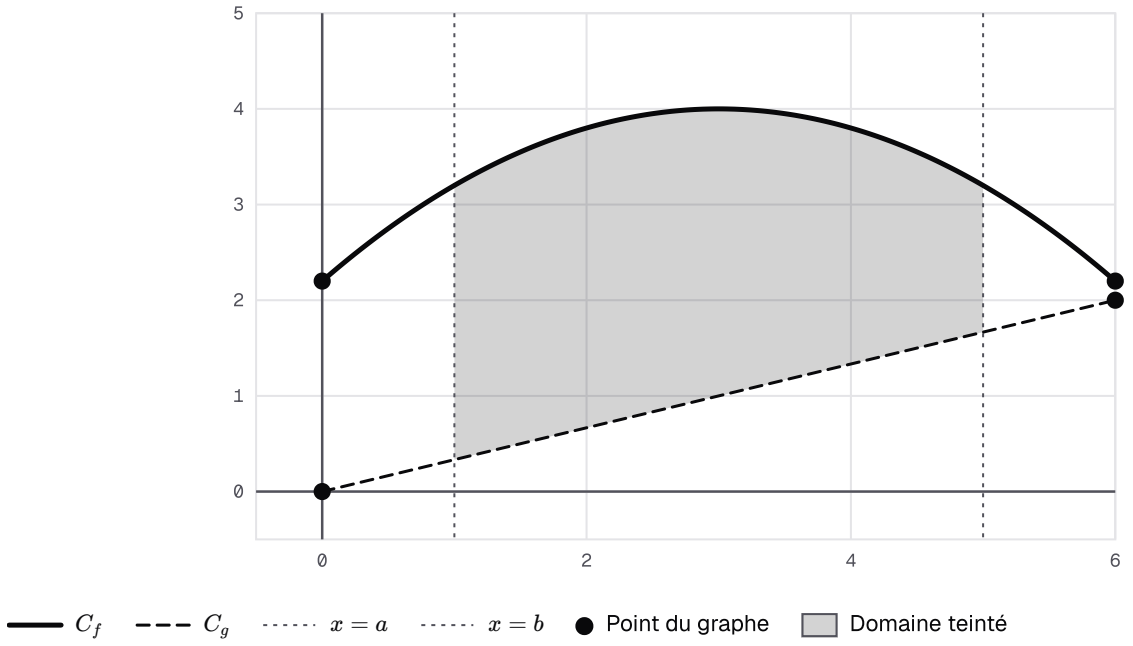
Une fonction qui change de signe sur [a ; b] : on découpe là où elle s'annule, et chaque morceau compte positivement.

Propriété : Aire du domaine limité par deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, avec $a < b$, telles que $g(x) \leq f(x)$ pour tout x de $[a;b]$. L'aire du domaine limité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Dans le cas général, $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ u.a. : on découpe aux points où les courbes se coupent.



Entre x = a et x = b, la courbe de f passe au-dessus de celle de g : le domaine qui les sépare est teinté.

Méthode : une aire, de l'unité d'aire aux cm²

1. **Étudie** le signe de $f(x)$; pour deux courbes, le signe de $f(x) - g(x)$.
2. **Coupe** l'intervalle là où ce signe change.
3. **Intègre** sur chaque morceau la fonction positive : f ou $-f$, $f - g$ ou $g - f$.
4. **Additionne** en u.a., puis multiplie par l'aire d'une unité, $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$, pour obtenir des cm².

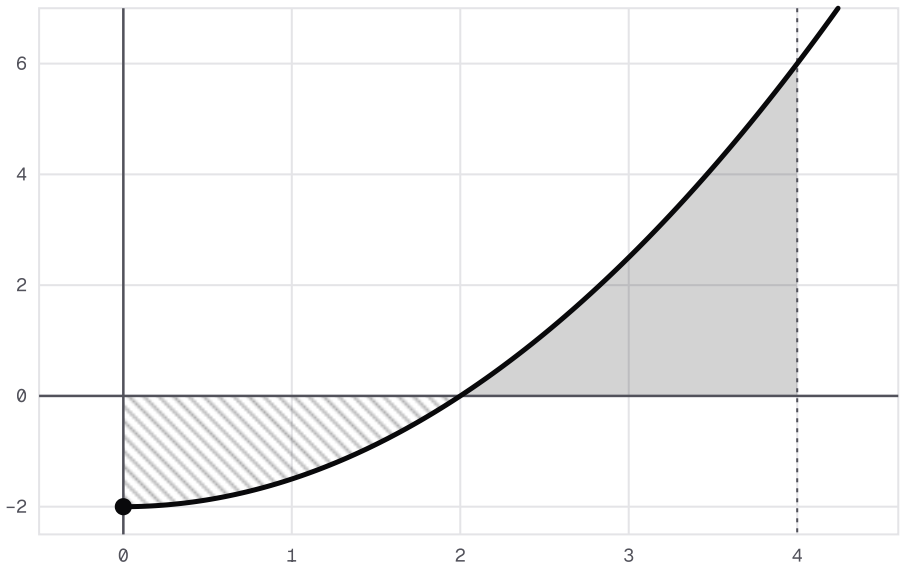
Exemple

Énoncé. Trouve l'aire de la région située entre la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$, avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm.

Signe. La fonction f s'annule en 2 ; elle est négative sur $[0;2]$ et positive sur $[2;4]$.

Aire. $\displaystyle\int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$ u.a.

En cm². 1 u.a. représente $1 \times 0{,}5 = 0{,}5$ cm², donc l'aire vaut 4 cm².



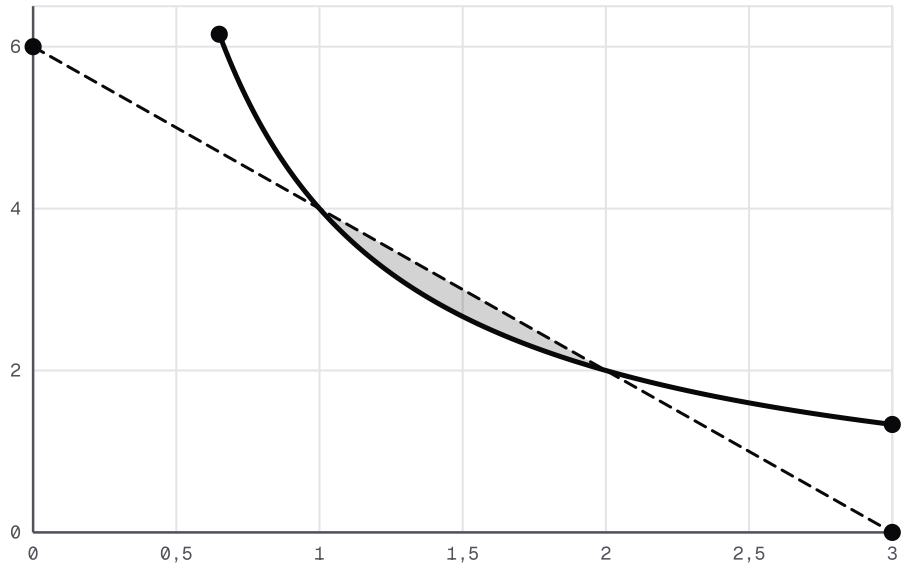
La courbe de f(x) = x²/2 - 2 : partie hachurée sous l'axe de 0 à 2, partie teintée au-dessus de 2 à 4.

Exemple

Énoncé. Aire entre les courbes de $f : x \mapsto \dfrac{4}{x}$ et $g : x \mapsto 6 - 2x$, sur $[1;2]$.

Position relative. Pour tout x de $[1;2]$, $g(x) - f(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-2)}{x}$, qui est positif : la droite est au-dessus.

Aire. $\int_1^2 \left(6 - 2x - \dfrac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[6x - x^2 - 4\ln x\right]_1^2 = 3 - 4\ln 2$ u.a., soit environ $0{,}23$ u.a.



Sur [1 ; 2], la droite y = 6 - 2x passe au-dessus de l'hyperbole y = 4/x ; le domaine entre elles est teinté.

Attention : Une aire porte une unité et un signe positif

Si $\|\vec{i}\| = 4$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm, une unité d'aire vaut 2 cm². Une aire de $\frac{3}{4}$ u.a. vaut donc $1{,}5$ cm², pas $\frac{3}{4}$ cm².

Et si ton calcul d'aire donne un nombre négatif, cherche l'erreur de signe : une aire est positive.

Suites d'intégrales

Méthode : étudier une suite définie par des intégrales

1. **Sens de variation** : réunis $J_{n+1} - J_n$ en une seule intégrale, puis étudie le signe de la fonction obtenue, bornes dans l'ordre croissant.
2. **Encadrement** : encadre la fonction intégrée, puis intègre l'encadrement.
3. **Limite** : conclus par comparaison, ou par le théorème des gendarmes.

Exemple

Énoncé. Pour tout entier naturel n, $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

Variation. Par linéarité, $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout x de $[0;1]$, $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $x + 2 > 0$. Avec $0 \leq 1$, cette intégrale est négative : la suite (J_n) est décroissante.

Exemple

Encadrement. Pour tout x de $[0;1]$, $2 \leq x+2 \leq 3$, donc $\dfrac{x^n}{3} \leq \dfrac{x^n}{x+2} \leq \dfrac{x^n}{2}$. On intègre, avec $0 \leq 1$: $\dfrac{1}{3(n+1)} \leq J_n \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$.

Limite. Les deux bornes ont pour limite 0 : d'après le théorème des gendarmes, (J_n) converge vers 0.

Contrôle. Avec $u : x \mapsto x+2$, strictement positive sur $[0;1]$, la forme $\dfrac{u'}{u}$ donne $J_0 = [\ln(x+2)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0{,}41$, bien entre $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Calculer** une intégrale : une primitive et le crochet ; pour un produit sans forme composée, l'intégration par parties.
- **Valeur absolue** ou fonction par morceaux : le signe, puis la relation de Chasles.
- **Combiner** des intégrales connues : la linéarité.
- **Encadrer** sans calculer : encadrer la fonction, bornes dans l'ordre croissant, puis comparer.
- **Moyenne** sur une période : l'intégrale divisée par la longueur, avec l'unité de la fonction.
- **Aire** : le signe de f ou de $f-g$, des morceaux positifs, des u.a., puis des cm².
- **Suite d'intégrales** : une seule intégrale pour la différence, puis un encadrement.

Intégrale par une primitive F de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Relation de Chasles, puis bornes échangées

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Linéarité, α et β réels

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Encadrement, a ≤ b et m ≤ f ≤ M sur [a ; b]

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Forme composée, n entier naturel

$$\int_a^b u'(x)\,u(x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

Forme composée, u strictement positive

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln u(x)]_a^b$$

Forme composée avec l'exponentielle

$$\int_a^b u'(x)\, e^{u(x)}\, \mathrm{d}x = \Big[e^{u(x)}\Big]_a^b$$

Valeur moyenne, a < b

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x &= \big[u(x)\, v(x)\big]_a^b \\ &\quad - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Aire entre une courbe et l'axe des abscisses, a < b

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Aire entre deux courbes, g inférieure à f sur [a ; b], a < b

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Unité d'aire en cm²

$$1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

À retenir : Rédiger en devoir

Commence chaque calcul par une phrase sur la continuité. Écris la primitive avant le crochet, et $F(a)$ entre parenthèses. Une comparaison d'intégrales s'appuie sur $a \leq b$: cette condition figure sur ta copie dès la ligne qui précède le passage aux intégrales. Pour une aire, donne le signe, l'unité, puis la valeur en cm² si on la demande.