BURHAN

Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4,5 pts

Intégrales par une primitive et par parties

1. — 1 pts

Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln 2$$

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$, est $\ln u$.

Début : pose $u(x) = x^2 + 4$.

2. — 1 pts

Montrer que :

$$\int_1^e \left(2x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = e^2 - 3$$

INDICE

Outil : une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $\ln$.

Point délicat : $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.

3. a) — 1,5 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{4}{e}$$

INDICE

Début : pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 2x$; une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$.

Point délicat : les deux signes moins.

3. b) — 1 pts

En déduire que :

$$\int_0^1 (2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 6 - \frac{8}{e}$$

INDICE

Outil : la linéarité, en écrivant $(2x+4)e^{-x} = 2xe^{-x} + 4e^{-x}$.

Ensuite : calcule la seconde intégrale par une primitive.

Exercice 2 4 pts

La population moyenne d'une ville

D'après des données fictives, la population d'une ville nouvelle, t années après le début d'une étude, vaut $P(t)$ milliers d'habitants, avec, pour t dans $[0;4]$:

$$P(t) = 40 + 6\sqrt{t}$$

1. 0,5 pts

Montrer que P est croissante sur $[0;4]$ et que, pour tout t de $[0;4]$:

$$40 \leq P(t) \leq 52$$

INDICE

Outil : la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

Début : calcule $P(0)$ et $P(4)$.

2. 1 pts

On pose, pour tout t de $[0;4]$, $G(t) = 40t + 4t\sqrt{t}$. Montrer que $G'(t) = P(t)$ pour tout t de $]0;4]$. On admet que G est une primitive de P sur $[0;4]$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, appliquée à $t\sqrt{t}$.

Point délicat : $\dfrac{t}{2\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

3. 1 pts

En déduire que $\int_0^4 P(t)\,\mathrm{d}t = 192$.

INDICE

Outil : l'intégrale est $G(4) - G(0)$.

Début : $\sqrt{4} = 2$.

4. 1 pts

Montrer que la population moyenne sur les quatre années est de 48 milliers d'habitants, puis vérifier qu'elle est comprise entre 40 et 52.

INDICE

Outil : la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle.

Ensuite : compare le résultat à l'encadrement de la question 1.

5. 0,5 pts

Montrer que $P(t) = 48$ pour $t = \dfrac{16}{9}$.

INDICE

Début : résous l'équation $40 + 6\sqrt{t} = 48$.

Point délicat : contrôle que la solution appartient à $[0; 4]$.

Exercice 3 — 3 pts

Une suite d'intégrales guidée

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$$

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$:

$$0 \leq \ln(1 + x) \leq \ln 2$$

INDICE

Outil : la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

Début : encadre $1 + x$.

2. 1 pts

Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

INDICE

Début : par linéarité, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^n(x - 1)\ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$.

Point délicat : le signe de chaque facteur sur $[0; 1]$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n + 1}$$

INDICE

Début : multiplie l'encadrement de la question 1 par $x^n \geq 0$.

Outil : la propriété de comparaison, bornes dans l'ordre croissant.

4. 0,5 pts

En déduire que la suite (U_n) converge vers 0.

INDICE

Outil : le théorème des gendarmes.

Début : cherche la limite de $\dfrac{\ln 2}{n + 1}$.

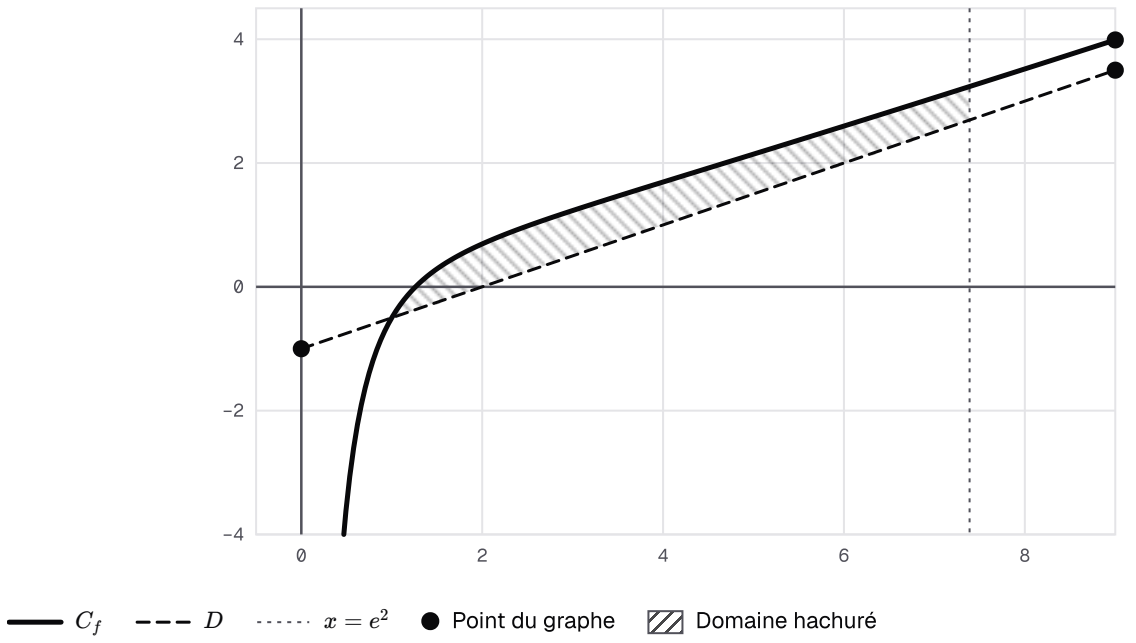
Exercice 4 — 4 pts

Partie de problème : aire entre une courbe et une droite avec ln

Dans une étude de fonction, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{2\ln x}{x}$$

On note C_f sa courbe et D la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}-1$. Le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ vérifie $\|\vec{i}\|=1$ cm et $\|\vec{j}\|=2$ cm.



La courbe de f, la droite D et le domaine hachuré entre elles, de x = 1 à x = e².

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{2\ln x}{x}$$

puis que C_f est au-dessus de D sur $[1;+\infty[$.

INDICE

Début : simplifie la différence.

Outil : pour $x\geq 1$, $\ln x\geq 0$.

2. 0,5 pts

Montrer que la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x)=(\ln x)^2$ est une primitive de $x\mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

Outil : la dérivée de u^2 est $2u'u$.

Début : prends $u(x)=\ln x$.

3. 1,5 pts

Montrer que l'aire du domaine limité par C_f, la droite D et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$ vaut 4 u.a.

INDICE

Outil : l'aire entre deux courbes est l'intégrale de la différence, la courbe du dessus moins celle du dessous.

Début : utilise les questions 1 et 2.

4. 1 pts

Montrer que cette aire vaut 8 cm².

INDICE

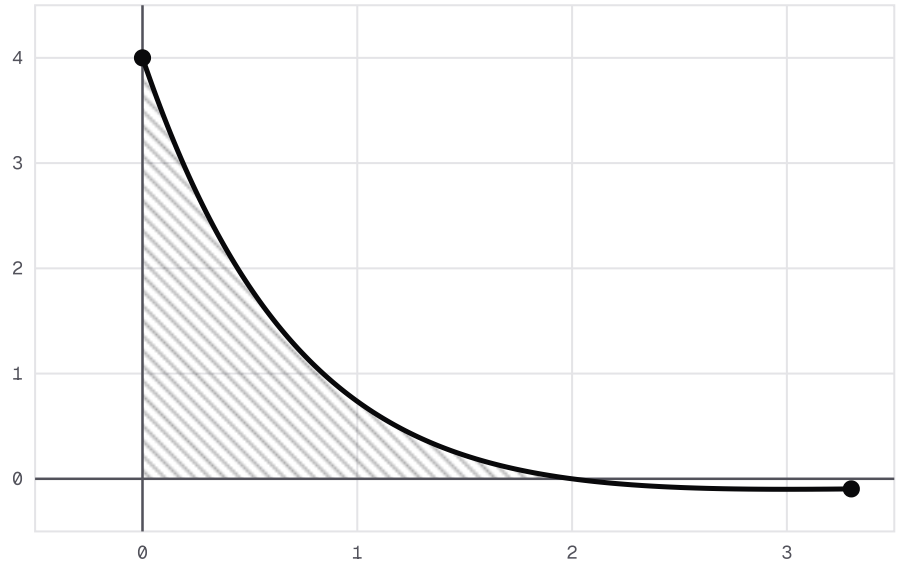
Outil : une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$.

Exercice 5

4,5 pts

Partie de problème : variations, parties et aire avec exp

Dans une étude de fonction, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4 - 2x)e^{-x}$, et sa courbe C_f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.



La courbe de f(x) = (4 - 2x)e⁻ˣ et le domaine hachuré sous elle, de x = 0 à x = 2.

1. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2x - 6)e^{-x}$.

INDICE

Outil : la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$.

Début : la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$.

2. 0,5 pts

En déduire que f est décroissante sur $[0; 2]$, puis que, pour tout x de $[0; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq 4$$

INDICE

Début : donne le signe de $2x - 6$ sur $[0; 2]$; $e^{-x} > 0$.

Ensuite : calcule $f(0)$ et $f(2)$.

3. 1,5 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{e^2}$$

INDICE

Début : pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 4 - 2x$.

Point délicat : $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -2$: surveille les signes.

4. 1,5 pts

Montrer que l'aire du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ vaut $8 + \dfrac{8}{e^2}$ cm², puis en donner une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : d'après la question 2, f est positive sur $[0;2]$: l'aire est l'intégrale.

Ensuite : 1 u.a. $= 2 \times 2$ cm².