BURHAN

# Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Calcul intégral | Niveau examen | 5 |

## Exercice 1 — 4,5 pts

## Intégrales par une primitive et par parties

### 1. — 1 pts

Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln 2$$

INDICE

**Outil :** une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$, est $\ln u$.

**Début :** pose $u(x)=x^2+4$.

CORRIGÉ

**Forme.** Posons $u(x)=x^2+4$ pour tout réel $x$. Alors $u(x)>0$ et $u'(x)=2x$ : la fonction intégrée est $\dfrac{u'}{u}$, continue sur $[0;2]$. Une primitive est $x\mapsto \ln(x^2+4)$.

**Calcul.**

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^2\\ &= \ln 8 - \ln 4\\ &= \ln\frac{8}{4} = \ln 2\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_0^2 \dfrac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln 2$.

**2.** 1 pts

Montrer que :

$$\int_1^e \left(2x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = e^2 - 3$$

INDICE

**Outil :** une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $\ln$.

**Point délicat :** $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.

CORRIGÉ

**Continuité.** La fonction $x \mapsto 2x - \dfrac{2}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$, qui contient $[1;e]$. Une primitive est $x \mapsto x^2 - 2\ln x$.

**Calcul.** Comme $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ :

$$\begin{aligned} &\left[x^2 - 2\ln x\right]_1^e \\ &= (e^2 - 2\ln e) - (1 - 2\ln 1) \\ &= (e^2 - 2) - 1 \\ &= e^2 - 3 \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_1^e \left(2x - \dfrac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = e^2 - 3$.

### 3. a)

1,5 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{4}{e}$$

INDICE

**Début :** pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 2x$ ; une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$.

**Point délicat :** les deux signes moins.

CORRIGÉ

**Facteurs.** Pour $x$ dans $[0;1]$, on pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 2x$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2$. Les fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0;1]$.

**Intégration par parties.**

$$\begin{aligned}&\int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-2xe^{-x}\right]_0^1\\ &\quad - \int_0^1 (-2e^{-x})\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{e} + \int_0^1 2e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

**Intégrale restante.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 2e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-2e^{-x}\right]_0^1\\ &= -\frac{2}{e} + 2\end{aligned}$$

**Résultat.**

$$\begin{aligned}&\int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2\\ &= 2 - \frac{4}{e}\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{4}{e}$.

### 3. b) 1 pts

En déduire que :

$$\int_0^1 (2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 6 - \frac{8}{e}$$

INDICE

**Outil :** la linéarité, en écrivant $(2x+4)e^{-x} = 2xe^{-x} + 4e^{-x}$.

**Ensuite :** calcule la seconde intégrale par une primitive.

CORRIGÉ

**Linéarité.** Les fonctions $x \mapsto 2xe^{-x}$ et $x \mapsto 4e^{-x}$ sont continues sur $[0;1]$, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^1 4e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

**Seconde intégrale.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 4e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-4e^{-x}\right]_0^1 \\ &= 4 - \frac{4}{e}\end{aligned}$$

**Somme.** D'après la question 3. a) :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2 - \frac{4}{e}\right) + \left(4 - \frac{4}{e}\right) \\ &= 6 - \frac{8}{e}\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_0^1 (2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 6 - \frac{8}{e}$.

## Exercice 2 — 4 pts

### La population moyenne d'une ville

D'après des données fictives, la population d'une ville nouvelle, $t$ années après le début d'une étude, vaut $P(t)$ milliers d'habitants, avec, pour $t$ dans $[0;4]$ :

$$P(t) = 40 + 6\sqrt{t}$$

**1.** — 0,5 pts

Montrer que $P$ est croissante sur $[0;4]$ et que, pour tout $t$ de $[0;4]$ :

$$40 \leq P(t) \leq 52$$

INDICE

**Outil :** la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

**Début :** calcule $P(0)$ et $P(4)$.

CORRIGÉ

**Croissance.** La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$. Multiplier par $6 > 0$ puis ajouter $40$ conserve le sens de variation : $P$ est croissante sur $[0;4]$.

**Valeurs aux bornes.** $P(0) = 40$ et $P(4) = 40 + 6 \times 2 = 52$.

**Encadrement.** Soit $t$ dans $[0;4]$. Comme $0 \leq t \leq 4$ et que $P$ est croissante, $P(0) \leq P(t) \leq P(4)$.

**Conclusion.** $P$ est croissante sur $[0;4]$ et, pour tout $t$ de $[0;4]$, $40 \leq P(t) \leq 52$.

**2.** 1 pts

On pose, pour tout $t$ de $[0;4]$, $G(t) = 40t + 4t\sqrt{t}$. Montrer que $G'(t) = P(t)$ pour tout $t$ de $]0;4]$. On admet que $G$ est une primitive de $P$ sur $[0;4]$.

INDICE

**Outil :** la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, appliquée à $t\sqrt{t}$.

**Point délicat :** $\dfrac{t}{2\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

CORRIGÉ

Soit $t$ dans $]0;4]$.

**Dérivée du produit.** La fonction racine carrée est dérivable en $t > 0$, de dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. D'après la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(t\sqrt{t}\right)' &= \sqrt{t} + t \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &= \sqrt{t} + \frac{\sqrt{t}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{t}}{2}\end{aligned}$$

**Dérivée de $G$.**

$$\begin{aligned}G'(t) &= 40 + 4 \times \frac{3\sqrt{t}}{2} \\ &= 40 + 6\sqrt{t} \\ &= P(t)\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $t$ de $]0;4]$, $G'(t) = P(t)$.

**3.** 1 pts

En déduire que $\int_0^4 P(t)\,\mathrm{d}t = 192$.

INDICE

**Outil :** l'intégrale est $G(4) - G(0)$.

**Début :** $\sqrt{4} = 2$.

CORRIGÉ

**Primitive.** $P$ est continue sur $[0;4]$ et, d'après la question 2, $G$ en est une primitive.

**Calcul.** Comme $\sqrt{4} = 2$ :

$$\begin{aligned}&\int_0^4 P(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[40t + 4t\sqrt{t}\Big]_0^4 \\ &= (160 + 4 \times 4 \times 2) - 0 \\ &= 160 + 32 = 192\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_0^4 P(t)\,\mathrm{d}t = 192$.

**4.** 1 pts

Montrer que la population moyenne sur les quatre années est de $48$ milliers d'habitants, puis vérifier qu'elle est comprise entre $40$ et $52$.

INDICE

**Outil :** la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle.

**Ensuite :** compare le résultat à l'encadrement de la question 1.

CORRIGÉ

**Valeur moyenne.** $P$ est continue sur $[0;4]$ et $0<4$. D'après la question 3 :

$$\mu=\frac{1}{4-0}\times 192=48$$

**Encadrement.** $40\leq 48\leq 52$ : la moyenne est bien comprise entre le minimum $P(0)$ et le maximum $P(4)$ de $P$.

**Conclusion.** La population moyenne sur les quatre années est de $48$ milliers d'habitants (données fictives), nombre compris entre $40$ et $52$.

**5.** 0,5 pts

Montrer que $P(t)=48$ pour $t=\dfrac{16}{9}$.

INDICE

**Début :** résous l'équation $40+6\sqrt{t}=48$.

**Point délicat :** contrôle que la solution appartient à $[0;4]$.

CORRIGÉ

**Équation.** Pour $t$ dans $[0;4]$ :

$$\begin{aligned}&40+6\sqrt{t}=48\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{t}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\\ \Leftrightarrow\ &t=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

**Instant.** $\dfrac{16}{9}\approx 1{,}78$ appartient à $[0;4]$.

**Conclusion.** $P(t)=48$ pour $t=\dfrac{16}{9}$ : la population atteint sa valeur moyenne environ $1{,}78$ an après le début de l'étude.

**Exercice 3** 3 pts

## Une suite d'intégrales guidée

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$$

**1.** 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x$ de $[0;1]$ :

$$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$$

INDICE

**Outil :** la fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

**Début :** encadre $1+x$.

CORRIGÉ

Soit $x$ dans $[0;1]$.

**Encadrement.** Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $1 \leq 1+x \leq 2$.

**Logarithme.** La fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$, donc :

$$\ln 1 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$$

**Conclusion.** Comme $\ln 1 = 0$, pour tout $x$ de $[0;1]$, $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$.

**2.** 1 pts

Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

INDICE

**Début :** par linéarité, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

**Point délicat :** le signe de chaque facteur sur $[0;1]$.

CORRIGÉ

Soit $n$ un entier naturel.

**Différence.** Par linéarité :

$$\begin{aligned} &U_{n+1} - U_n \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

**Signe.** Pour $x$ dans $[0;1]$, $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\ln(1+x) \geq 0$ d'après la question 1 : la fonction intégrée est négative. Elle est continue sur $[0;1]$ et $0 \leq 1$, donc, par positivité de l'intégrale, $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

**Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} \leq U_n$ : la suite $(U_n)$ est décroissante.

**3.** 1 pts

Montrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

INDICE

**Début :** multiplie l'encadrement de la question 1 par $x^n \geq 0$.

**Outil :** la propriété de comparaison, bornes dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Soit $n$ un entier naturel.

**Encadrement de la fonction.** Pour $x$ dans $[0;1]$, $x^n \geq 0$. On multiplie l'encadrement de la question 1 par $x^n$ :

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$$

**Comparaison.** Les fonctions sont continues sur $[0;1]$ et $0 \leq 1$. La propriété de comparaison donne :

$$0 \leq U_n \leq \ln 2 \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$$

**Calcul.**

$$\begin{aligned} \ln 2 \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x &= \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.

**4.** 0,5 pts

En déduire que la suite $(U_n)$ converge vers $0$.

INDICE

**Outil :** le théorème des gendarmes.

**Début :** cherche la limite de $\dfrac{\ln 2}{n+1}$.

CORRIGÉ

**Limite des bornes.** La suite $\left(\dfrac{\ln 2}{n+1}\right)$ a pour limite $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$, comme la suite nulle.

**Gendarmes.** D'après la question 3, $U_n$ est compris entre ces deux suites pour tout entier naturel $n$.

**Conclusion.** D'après le théorème des gendarmes, la suite $(U_n)$ converge vers $0$.

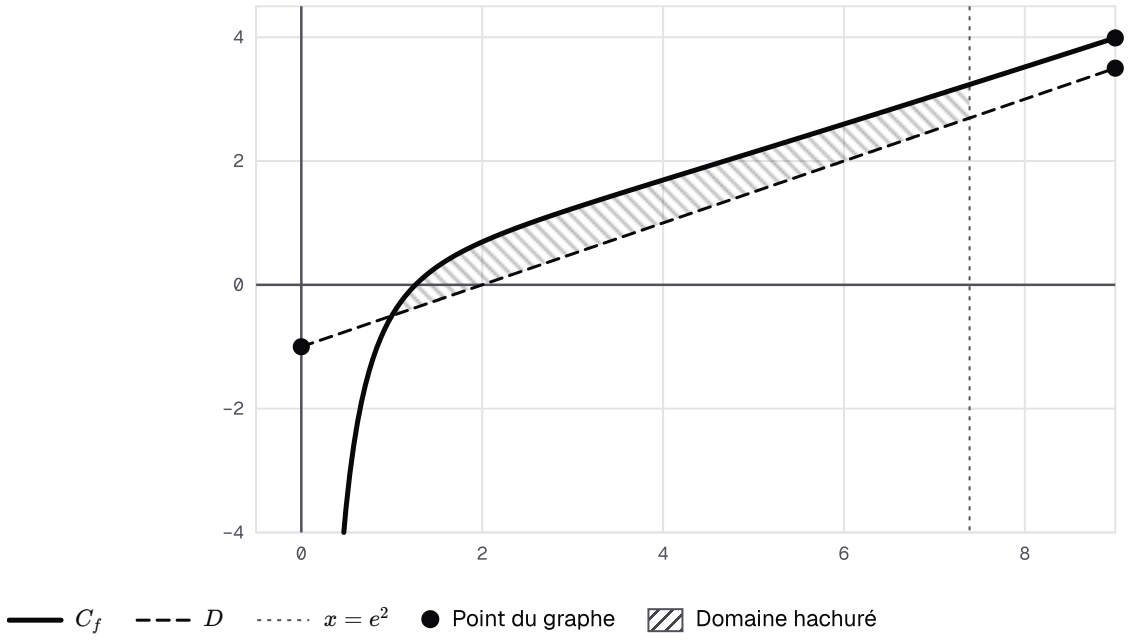
**Exercice 4** 4 pts

## Partie de problème : aire entre une courbe et une droite avec ln

Dans une étude de fonction, on considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{2\ln x}{x}$$

On note $C_f$ sa courbe et $D$ la droite d'équation $y=\frac{x}{2}-1$. Le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ vérifie $\|\vec{i}\|=1$ cm et $\|\vec{j}\|=2$ cm.




**La courbe de f, la droite D et le domaine hachuré entre elles, de x = 1 à x = e².**

**1.** 1 pts

Montrer que, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{2\ln x}{x}$$

puis que $C_f$ est au-dessus de $D$ sur $[1;+\infty[$.

INDICE

**Début :** simplifie la différence.

**Outil :** pour $x\geq 1$, $\ln x\geq 0$.

CORRIGÉ

**Différence.** Pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :

$$\begin{aligned}&f(x)-\left(\frac{x}{2}-1\right)\\&=\frac{x}{2}-1+\frac{2\ln x}{x}-\frac{x}{2}+1\\&=\frac{2\ln x}{x}\end{aligned}$$

**Signe.** Pour $x\geq 1$, $\ln x\geq 0$ et $x>0$, donc $\frac{2\ln x}{x}\geq 0$.

**Conclusion.** Pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $f(x)-\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{2\ln x}{x}$. Cette différence est positive sur $[1;+\infty[$ : $C_f$ est au-dessus de $D$ sur cet intervalle.

**2.** 0,5 pts

Montrer que la fonction $H$ définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x)=(\ln x)^2$ est une primitive de $x\mapsto\frac{2\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

INDICE

**Outil :** la dérivée de $u^2$ est $2u'u$.

**Début :** prends $u(x)=\ln x$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** On a $H=u^2$, avec $u(x)=\ln x$. La fonction $u$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$. Donc $H$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x>0$ :

$$\begin{aligned}H'(x)&=2\times\frac{1}{x}\times\ln x\\&=\frac{2\ln x}{x}\end{aligned}$$

**Conclusion.** $H$ est une primitive de $x\mapsto\frac{2\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

**3.** 1,5 pts

Montrer que l'aire du domaine limité par $C_f$, la droite $D$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ vaut $4$ u.a.

INDICE

**Outil :** l'aire entre deux courbes est l'intégrale de la différence, la courbe du dessus moins celle du dessous.

**Début :** utilise les questions 1 et 2.

CORRIGÉ

**Hypothèses.** $f$ et $x \mapsto \dfrac{x}{2} - 1$ sont continues sur $[1; e^2]$, avec $1 < e^2$. D'après la question 1, $C_f$ est au-dessus de $D$ sur cet intervalle.

**Aire.** D'après les questions 1 et 2, et comme $\ln e^2 = 2$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^{e^2} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[(\ln x)^2\right]_1^{e^2} \\ &= (\ln e^2)^2 - (\ln 1)^2 \\ &= 2^2 - 0 = 4\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'aire du domaine vaut $4$ u.a.

**4.** 1 pts

Montrer que cette aire vaut $8$ cm².

INDICE

**Outil :** une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

CORRIGÉ

**Unité.** $1$ u.a. $= 1 \times 2 = 2$ cm².

**Conversion.** $\mathcal{A} = 4 \times 2 = 8$ cm².

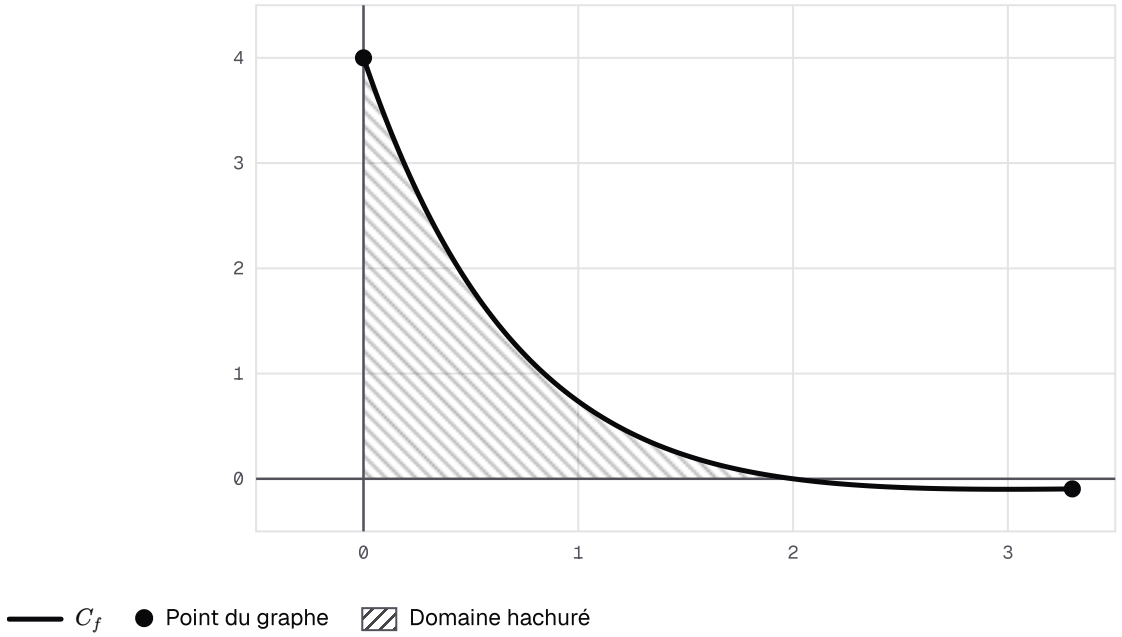
**Conclusion.** L'aire du domaine vaut $8$ cm².

## Exercice 5

4,5 pts

### Partie de problème : variations, parties et aire avec exp

Dans une étude de fonction, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-2x)e^{-x}$, et sa courbe $C_f$ dans un repère orthonormé d'unité $2$ cm.




**La courbe de f(x) = (4 - 2x)e⁻ˣ et le domaine hachuré sous elle, de x = 0 à x = 2.**

#### 1.

1 pts

Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = (2x-6)e^{-x}$.

INDICE

**Outil :** la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$.

**Début :** la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$.

CORRIGÉ

**Dérivabilité.** $f$ est le produit de $x \mapsto 4-2x$ et de $x \mapsto e^{-x}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= -2e^{-x} + (4-2x)(-e^{-x}) \\ &= (-2-4+2x)e^{-x} \\ &= (2x-6)e^{-x} \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = (2x-6)e^{-x}$.

**2.** `0,5 pts`

En déduire que $f$ est décroissante sur $[0;2]$, puis que, pour tout $x$ de $[0;2]$ :

$$0 \leq f(x) \leq 4$$

INDICE

**Début :** donne le signe de $2x-6$ sur $[0;2]$ ; $e^{-x}>0$.

**Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(2)$.

CORRIGÉ

**Variations.** Pour $x$ dans $[0;2]$, $2x-6 \leq -2 < 0$ et $e^{-x}>0$, donc $f'(x)<0$ : $f$ est décroissante sur $[0;2]$.

**Valeurs aux bornes.** $f(0)=4$ et $f(2)=0$.

**Encadrement.** Soit $x$ dans $[0;2]$. Comme $f$ est décroissante, $f(2) \leq f(x) \leq f(0)$.

**Conclusion.** $f$ est décroissante sur $[0;2]$ et, pour tout $x$ de $[0;2]$, $0 \leq f(x) \leq 4$.

**3.** 1,5 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{e^2}$$

INDICE

**Début :** pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 4 - 2x$.

**Point délicat :** $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -2$ : surveille les signes.

CORRIGÉ

**Facteurs.** Pour $x$ dans $[0;2]$, on pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 4 - 2x$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -2$ ; $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0;2]$.

**Intégration par parties.**

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-(4-2x)e^{-x}\right]_0^2 \\
&\quad - \int_0^2 (-e^{-x})(-2)\,\mathrm{d}x \\
&= (0+4) - \int_0^2 2e^{-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

**Intégrale restante.**

$$\begin{aligned}
\int_0^2 2e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-2e^{-x}\right]_0^2 \\
&= 2 - \frac{2}{e^2}
\end{aligned}$$

**Résultat.**

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= 4 - \left(2 - \frac{2}{e^2}\right) \\
&= 2 + \frac{2}{e^2}
\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \dfrac{2}{e^2}$.

**4.** 1,5 pts

Montrer que l'aire du domaine limité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ vaut $8 + \dfrac{8}{e^2}$ cm², puis en donner une valeur approchée au centième.

INDICE

**Outil :** d'après la question 2, $f$ est positive sur $[0;2]$ : l'aire est l'intégrale.

**Ensuite :** $1$ u.a. $= 2 \times 2$ cm².

CORRIGÉ

**Aire en u.a.** $f$ est continue et positive sur $[0;2]$, avec $0 < 2$. D'après la question 3 :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{e^2}$$

**Unité.** $1$ u.a. $= 2 \times 2 = 4$ cm².

**En cm².** $\mathcal{A} = 4\left(2 + \dfrac{2}{e^2}\right) = 8 + \dfrac{8}{e^2}$ cm².

**Conclusion.** L'aire du domaine vaut $8 + \dfrac{8}{e^2}$ cm², soit environ $9{,}08$ cm².