BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	7

Exercice 1

Transformer l'écriture avant d'intégrer

1.

Vérifier que, pour tout x de $[0;1]$:

$$\frac{2x^2+4x+4}{x+1} = 2x+2+\frac{2}{x+1}$$

INDICE

Début : réduis le membre de droite au dénominateur $x+1$.

Point délicat : développe $(2x+2)(x+1)$ sans oublier de terme.

2.

En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+4x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$, est $\ln u$.

Début : intègre la forme obtenue à la question 1, terme par terme.

3.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Début : pose $u(x)=e^x+2$ et calcule $u'(x)$.

Point délicat : $e^{\ln 2}=2$.

Exercice 2

Valeur absolue et fonction par morceaux

On veut calculer :

$$L = \int_0^2 |e^x - 2| \, \mathrm{d}x$$

1.

Étudier le signe de $e^x - 2$ sur $[0; 2]$.

INDICE

Outil : la fonction exponentielle est strictement croissante.

Début : résous $e^x = 2$.

2.

Calculer $\int_0^{\ln 2} (2 - e^x) \, \mathrm{d}x$, puis $\int_{\ln 2}^2 (e^x - 2) \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$.

Point délicat : $e^{\ln 2} = 2$ et $e^0 = 1$.

3.

En déduire la valeur exacte de L, puis une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en $\ln 2$.

Début : sur chaque morceau, remplace la valeur absolue grâce à la question 1.

4.

Même découpage pour une fonction définie par morceaux. D'après des données fictives, une coopérative agricole paie l'eau d'irrigation par tranches. Pour x milliers de mètres cubes déjà consommés, le mètre cube suivant coûte $p(x)$ dirhams, avec :

- $p(x) = 2$ si $0 \leq x \leq 4$;
- $p(x) = \dfrac{3x}{2} - 4$ si $4 < x \leq 6$.

Vérifier que p est continue en 4, puis calculer $\int_0^6 p(x) \, \mathrm{d}x$ et l'interpréter.

INDICE

Début : compare la valeur $p(4)$ et l'expression de la seconde tranche prise en $x = 4$.

Outil : coupe l'intégrale en 4 par la relation de Chasles.

Exercice 3

Choisir les facteurs d'une intégration par parties

1.

D'après des données fictives, une petite usine de détergent a un coût marginal de $(4-2x)e^{x}$ milliers de dirhams par tonne, pour une production de x tonnes, x dans $[0;1]$. Ses coûts fixes valent 3 milliers de dirhams.

Calculer $\int_{0}^{1}(4-2x)e^{x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire le coût total de production d'une tonne.

INDICE

Outil : la formule d'intégration par parties.

Début : dérive le polynôme, et garde e^{x} comme u'.

2.

Calculer $\int_{1}^{e}(2x-2)\ln x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

INDICE

Début : tu ne connais pas de primitive usuelle de $\ln$; c'est donc $\ln x$ que tu dérives.

Point délicat : simplifie $u(x)v'(x)$ avant d'intégrer.

Exercice 4

La recette moyenne d'une boutique en ligne

D'après des données fictives, la recette journalière d'une boutique en ligne, t semaines après son lancement, vaut $r(t)$ milliers de dirhams, avec, pour t dans $[0;4]$:

$$r(t) = 2 + \frac{4t}{t^2+4}$$

1.

Calculer $\int_0^4 r(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Début : avec $u(t) = t^2+4$, compare $4t$ à $u'(t)$.

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$, est $\ln u$.

2.

En déduire la recette journalière moyenne sur ces quatre semaines, puis une valeur approchée en dirhams.

INDICE

Outil : la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle.

Point délicat : l'unité est le millier de dirhams.

3.

Montrer que, pour tout t de $[0;4]$:

$$r'(t) = \frac{4(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$$

En déduire le minimum et le maximum de r sur $[0;4]$, puis encadrer la recette moyenne.

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Ensuite : étudie le signe de $4-t^2$ sur $[0;4]$.

4.

Calculer $\dfrac{r(0)+r(4)}{2}$ et le comparer à la recette moyenne.

INDICE

Début : reprends les valeurs de la question 3.

Point délicat : la moyenne des valeurs aux bornes ne tient pas compte des valeurs intermédiaires.

Exercice 5

Aire entre une parabole et une droite

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$. Le repère orthogonal a pour unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1.

Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ pour tout réel x, puis donner les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

INDICE

Début : simplifie $g(x) - f(x)$, puis factorise par $\dfrac{x}{2}$.

Ensuite : dresse le signe des deux facteurs sur $\mathbb{R}$.

2.

Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes, en unités d'aire.

INDICE

Outil : si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, l'aire est $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Début : les bornes sont les abscisses des points d'intersection.

3.

Convertir cette aire en cm².

INDICE

Outil : une unité d'aire vaut le produit des deux unités graphiques.

Point délicat : les deux axes n'ont pas la même unité.

Exercice 6

Une suite d'intégrales et sa limite

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{2x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.

Calculer I_1.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$, est $\ln u$.

Début : avec $u(x) = 1 + x^2$, que vaut $u'(x)$?

2.

Étudier le sens de variation de la suite (I_n).

INDICE

Début : par linéarité, écris $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale.

Point délicat : le signe de $x - 1$ sur $[0;1]$, et l'ordre des bornes.

3.

Calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n. En déduire la valeur de I_3.

INDICE

Début : par linéarité, réunis les deux intégrales ; factorise $2x^n$ au numérateur.

Ensuite : prends $n = 1$.

4.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

En déduire la limite de (I_n).

INDICE

Début : sur $[0;1]$, $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$.

Outil : la propriété de comparaison, puis le théorème des gendarmes.

Exercice 7

Aire entre une courbe exponentielle et une droite

On considère la courbe C de la fonction exponentielle et la droite D d'équation $y = e\,x$. Le repère est orthogonal, d'unités 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

1.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - e\,x$. Étudier les variations de h et en déduire que $h(x) \geq 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : calcule $h'(x)$ et cherche où elle s'annule.

Ensuite : le minimum de h donne son signe.

2.

En déduire la position de la courbe C par rapport à D.

INDICE

Début : exprime $e^x - e\,x$ à l'aide de $h(x)$.

3.

Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe C, la droite D et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

INDICE

Outil : l'aire entre deux courbes est l'intégrale de la différence positive.

Début : une primitive de $x \mapsto e^x - e\,x$ s'obtient terme par terme.

4.

Exprimer cette aire en cm² et l'arrondir au centième.

INDICE

Outil : une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ cm².

Point délicat : contrôle que le résultat est positif.