BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	7

Exercice 1

Transformer l'écriture avant d'intégrer

1.

Vérifier que, pour tout x de $[0;1]$:

$$\frac{2x^2+4x+4}{x+1} = 2x+2+\frac{2}{x+1}$$

INDICE

Début : réduis le membre de droite au dénominateur $x+1$.

Point délicat : développe $(2x+2)(x+1)$ sans oublier de terme.

CORRIGÉ

Dénominateur. Soit x dans $[0;1]$. Alors $x+1 \geq 1 > 0$, donc $x+1 \neq 0$.

Réduction au même dénominateur. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned} & 2x+2+\frac{2}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1)+2}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+4x+2+2}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+4x+4}{x+1} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0;1]$, $\frac{2x^2+4x+4}{x+1} = 2x+2+\frac{2}{x+1}$.

2.

En déduire $\int_0^1 \dfrac{2x^2+4x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$, est $\ln u$.

Début : intègre la forme obtenue à la question 1, terme par terme.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction intégrée est continue sur $[0;1]$, car $x+1>0$ sur cet intervalle.

Primitive. D'après la question 1, la fonction s'écrit $x\mapsto 2x+2+\dfrac{2}{x+1}$. Avec $u(x)=x+1>0$ et $u'(x)=1$, une primitive de $x\mapsto\dfrac{2}{x+1}$ est $x\mapsto 2\ln(x+1)$. Une primitive de la fonction intégrée est donc :

$$x\mapsto x^2+2x+2\ln(x+1)$$

Calcul.

$$\begin{aligned}&\left[x^2+2x+2\ln(x+1)\right]_0^1\\&=(1+2+2\ln 2)\\&\quad-(0+0+2\ln 1)\\&=3+2\ln 2\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 \dfrac{2x^2+4x+4}{x+1}\,\mathrm{d}x=3+2\ln 2$.

3.

Calculer $\int_0^{\ln 2} \dfrac{2e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Début : pose $u(x)=e^x+2$ et calcule $u'(x)$.

Point délicat : $e^{\ln 2}=2$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=e^x+2$ pour tout réel x. Alors $u(x)>0$ et $u'(x)=e^x$: la fonction intégrée s'écrit $\dfrac{2u'}{u}$. Elle est continue sur $[0;\ln 2]$, et une primitive est $x\mapsto 2\ln(e^x+2)$.

Calcul. Comme $e^{\ln 2}=2$ et $e^0=1$:

$$\begin{aligned}&\left[2\ln(e^x+2)\right]_0^{\ln 2}\\&=2\ln(2+2)-2\ln(1+2)\\&=2\ln 4-2\ln 3\\&=2\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^{\ln 2} \dfrac{2e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x=2\ln\dfrac{4}{3}$.

Exercice 2

Valeur absolue et fonction par morceaux

On veut calculer :

$$L = \int_0^2 |e^x - 2| \, \mathrm{d}x$$

1.

Étudier le signe de $e^x - 2$ sur $[0; 2]$.

INDICE

Outil : la fonction exponentielle est strictement croissante.

Début : résous $e^x = 2$.

CORRIGÉ

Annulation. Pour tout réel x, $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. De plus $0 < \ln 2 < 2$, car $1 < 2 < e^2$ et $\ln$ est strictement croissante.

Signe. L'exponentielle est strictement croissante et $e^{\ln 2} = 2$:

- pour x dans $[0; \ln 2]$, $e^x \leq 2$;
- pour x dans $[\ln 2; 2]$, $e^x \geq 2$.

Conclusion. $e^x - 2 \leq 0$ sur $[0; \ln 2]$ et $e^x - 2 \geq 0$ sur $[\ln 2; 2]$.

2.

Calculer $\int_0^{\ln 2}(2-e^x)\,\mathrm{d}x$, puis $\int_{\ln 2}^{2}(e^x-2)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $x\mapsto e^x$ est $x\mapsto e^x$.

Point délicat : $e^{\ln 2}=2$ et $e^0=1$.

CORRIGÉ

Les deux fonctions intégrées sont continues sur $\mathbb{R}$.

Premier morceau. Une primitive de $x\mapsto 2-e^x$ est $x\mapsto 2x-e^x$:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\ln 2}(2-e^x)\,\mathrm{d}x\\&=\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}\\&=(2\ln 2-2)-(0-1)\\&=2\ln 2-1\end{aligned}$$

Second morceau. Une primitive de $x\mapsto e^x-2$ est $x\mapsto e^x-2x$:

$$\begin{aligned}&\int_{\ln 2}^{2}(e^x-2)\,\mathrm{d}x\\&=\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{2}\\&=(e^2-4)-(2-2\ln 2)\\&=e^2-6+2\ln 2\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^{\ln 2}(2-e^x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$ et $\int_{\ln 2}^{2}(e^x-2)\,\mathrm{d}x=e^2-6+2\ln 2$.

3.

En déduire la valeur exacte de L, puis une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en $\ln 2$.

Début : sur chaque morceau, remplace la valeur absolue grâce à la question 1.

CORRIGÉ

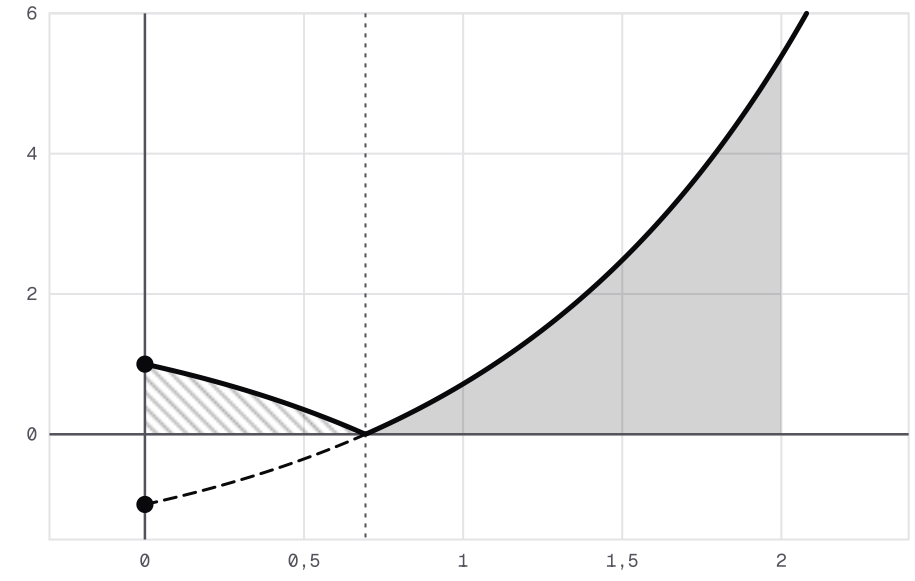
Chasles. La fonction $x \mapsto |e^x - 2|$ est continue sur $[0;2]$. D'après la question 1, elle vaut $2 - e^x$ sur $[0;\ln 2]$ et $e^x - 2$ sur $[\ln 2;2]$. Donc :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\ln 2}^{2} (e^x - 2)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Somme. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} L &= (2\ln 2 - 1) \\ &\quad + (e^2 - 6 + 2\ln 2) \\ &= e^2 - 7 + 4\ln 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $L = e^2 - 7 + 4\ln 2$, soit environ $3{,}16$.



L'intégrale L lue sur la courbe de x ↦ |eˣ - 2| : deux morceaux, de part et d'autre de ln 2.

4.

Même découpage pour une fonction définie par morceaux. D'après des données fictives, une coopérative agricole paie l'eau d'irrigation par tranches. Pour x milliers de mètres cubes déjà consommés, le mètre cube suivant coûte $p(x)$ dirhams, avec :

- $p(x) = 2$ si $0 \leq x \leq 4$;
- $p(x) = \dfrac{3x}{2} - 4$ si $4 < x \leq 6$.

Vérifier que p est continue en 4, puis calculer $\int_0^6 p(x)\,\mathrm{d}x$ et l'interpréter.

INDICE

Début : compare la valeur $p(4)$ et l'expression de la seconde tranche prise en $x = 4$.

Outil : coupe l'intégrale en 4 par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Continuité en 4. On a $p(4) = 2$. Pour $x > 4$, $p(x) = \dfrac{3x}{2} - 4$, et $\lim\limits_{x \to 4^+} p(x) = \dfrac{3 \times 4}{2} - 4 = 2$. Les deux tranches se raccordent : p est continue en 4. Chaque expression étant continue sur sa tranche, p est continue sur $[0;6]$.

Chasles. On coupe l'intégrale en 4 :

$$\begin{aligned}
&\int_0^6 p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_4^6 \left(\frac{3x}{2} - 4\right)\mathrm{d}x \\
&= [2x]_0^4 + \left[\frac{3x^2}{4} - 4x\right]_4^6
\end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}
&\int_0^6 p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 8 \\
&\quad + \big((27 - 24) - (12 - 16)\big) \\
&= 8 + 7 = 15
\end{aligned}$$

Conclusion. p est continue en 4 et $\int_0^6 p(x)\,\mathrm{d}x = 15$: les 6 premiers milliers de mètres cubes coûtent 15 milliers de dirhams à la coopérative (données fictives).

Exercice 3

Choisir les facteurs d'une intégration par parties

1.

D'après des données fictives, une petite usine de détergent a un coût marginal de $(4-2x)e^x$ milliers de dirhams par tonne, pour une production de x tonnes, x dans $[0;1]$. Ses coûts fixes valent 3 milliers de dirhams.

Calculer $\int_0^1 (4-2x)e^x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire le coût total de production d'une tonne.

INDICE

Outil : la formule d'intégration par parties.

Début : dérive le polynôme, et garde e^x comme u'.

CORRIGÉ

Choix des facteurs. Pour x dans $[0;1]$, on pose $u'(x)=e^x$ et $v(x)=4-2x$. Alors $u(x)=e^x$ et $v'(x)=-2$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$.

Intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4-2x)e^x \,\mathrm{d}x &= \big[(4-2x)e^x\big]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 (-2)e^x \,\mathrm{d}x \\ &= (2e-4) + 2\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x \\ &= (2e-4) + 2(e-1) \\ &= 4e-6\end{aligned}$$

Coût total. L'intégrale du coût marginal de 0 à 1 est le coût variable de la première tonne. On lui ajoute les coûts fixes :

$$\begin{aligned}C &= 3 + (4e-6) \\ &= 4e-3\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 (4-2x)e^x \,\mathrm{d}x = 4e-6$. Le coût total de production d'une tonne vaut $4e-3$ milliers de dirhams, soit environ $7{,}87$ milliers de dirhams (données fictives).

2.

Calculer $\int_1^e (2x-2)\ln x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

INDICE

Début : tu ne connais pas de primitive usuelle de $\ln$; c'est donc $\ln x$ que tu dérives.

Point délicat : simplifie $u(x)v'(x)$ avant d'intégrer.

CORRIGÉ

Choix des facteurs. Pour x dans $[1;e]$, on pose $u'(x)=2x-2$ et $v(x)=\ln x$. Alors $u(x)=x^2-2x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;e]$.

Intégration par parties. Comme $\ln e=1$, $\ln 1=0$ et $(x^2-2x)\times\dfrac{1}{x}=x-2$:

$$\begin{aligned}&\int_1^e (2x-2)\ln x\,\mathrm{d}x\\&=\left[(x^2-2x)\ln x\right]_1^e\\&\quad-\int_1^e (x^2-2x)\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=e^2-2e-\int_1^e (x-2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Intégrale restante.

$$\begin{aligned}&\int_1^e (x-2)\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^e\\&=\left(\frac{e^2}{2}-2e\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\\&=\frac{e^2}{2}-2e+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}&\int_1^e (2x-2)\ln x\,\mathrm{d}x\\&=e^2-2e-\left(\frac{e^2}{2}-2e+\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{e^2-3}{2}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_1^e (2x-2)\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{e^2-3}{2}$, soit environ $2{,}19$.

Exercice 4

La recette moyenne d'une boutique en ligne

D'après des données fictives, la recette journalière d'une boutique en ligne, t semaines après son lancement, vaut $r(t)$ milliers de dirhams, avec, pour t dans $[0;4]$:

$$r(t) = 2 + \frac{4t}{t^2+4}$$

1.

Calculer $\int_0^4 r(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Début : avec $u(t) = t^2+4$, compare $4t$ à $u'(t)$.

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$, est $\ln u$.

CORRIGÉ

Continuité. Pour tout réel t, $t^2+4 > 0$: r est continue sur $[0;4]$.

Primitive. Posons $u(t) = t^2+4$, avec $u(t) > 0$ et $u'(t) = 2t$. Pour tout t de $[0;4]$:

$$\frac{4t}{t^2+4} = 2 \times \frac{2t}{t^2+4}$$

Une primitive de r est donc $t \mapsto 2t + 2\ln(t^2+4)$.

Calcul.

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 r(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2t + 2\ln(t^2+4)\right]_0^4 \\
&= (8 + 2\ln 20) - 2\ln 4 \\
&= 8 + 2\ln 5
\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^4 r(t)\,\mathrm{d}t = 8 + 2\ln 5$.

2.

En déduire la recette journalière moyenne sur ces quatre semaines, puis une valeur approchée en dirhams.

INDICE

Outil : la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle.

Point délicat : l'unité est le millier de dirhams.

CORRIGÉ

Valeur moyenne. r est continue sur $[0;4]$ et $0<4$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 r(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}(8+2\ln 5) \\ &= 2+\frac{\ln 5}{2}\end{aligned}$$

Valeur approchée. À la calculatrice, $\mu \approx 2{,}80$.

Conclusion. La recette journalière moyenne vaut $2+\dfrac{\ln 5}{2}$ milliers de dirhams : la boutique encaisse en moyenne environ $2\,800$ dirhams par jour (données fictives).

3.

Montrer que, pour tout t de $[0;4]$:

$$r'(t) = \frac{4(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$$

En déduire le minimum et le maximum de r sur $[0;4]$, puis encadrer la recette moyenne.

INDICE

Outil : la dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ensuite : étudie le signe de $4 - t^2$ sur $[0;4]$.

CORRIGÉ

Dérivée. r est dérivable sur $[0;4]$, comme somme d'une constante et d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout t de $[0;4]$:

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{4(t^2+4) - 4t \times 2t}{(t^2+4)^2} \\ &= \frac{16 - 4t^2}{(t^2+4)^2} \\ &= \frac{4(4-t^2)}{(t^2+4)^2} \end{aligned}$$

Variations. Le dénominateur est strictement positif, donc $r'(t)$ a le signe de $4 - t^2 = (2-t)(2+t)$. Sur $[0;2]$, $4 - t^2 \geq 0$: r est croissante. Sur $[2;4]$, $4 - t^2 \leq 0$: r est décroissante.

Valeurs. $r(0) = 2$, $r(2) = 2 + \frac{8}{8} = 3$ et $r(4) = 2 + \frac{16}{20} = 2{,}8$. Le minimum de r sur $[0;4]$ vaut 2, atteint en 0 ; le maximum vaut 3, atteint en 2.

Encadrement. La valeur moyenne d'une fonction continue est comprise entre son minimum et son maximum : $2 \leq \mu \leq 3$, ce que confirme $\mu \approx 2{,}80$.

Conclusion. Pour tout t de $[0;4]$, $r'(t) = \frac{4(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$; le minimum de r vaut 2, son maximum 3, et $2 \leq \mu \leq 3$.

4.

Calculer $\dfrac{r(0)+r(4)}{2}$ et le comparer à la recette moyenne.

INDICE

Début : reprends les valeurs de la question 3.

Point délicat : la moyenne des valeurs aux bornes ne tient pas compte des valeurs intermédiaires.

CORRIGÉ

Calcul.

$$\frac{r(0)+r(4)}{2}=\frac{2+2{,}8}{2}=2{,}4$$

Comparaison. $2{,}4<2+\dfrac{\ln 5}{2}\approx 2{,}80$: la moyenne des valeurs aux bornes est inférieure à la recette moyenne μ.

Explication. Soit t dans $[0;4]$. Comme $t^2+4>0$:

$$\begin{aligned} & r(t)>2{,}8 \\ \Leftrightarrow\ & 4t>0{,}8(t^2+4) \\ \Leftrightarrow\ & t^2-5t+4<0 \\ \Leftrightarrow\ & 1<t<4 \end{aligned}$$

La recette dépasse donc $r(4)=2{,}8$ milliers de dirhams pour tout t de $]1;4[$, et elle atteint 3 en $t=2$.

Conclusion. $\dfrac{r(0)+r(4)}{2}=2{,}4$ est inférieur à la recette moyenne. La moyenne des deux valeurs aux bornes ignore les valeurs intermédiaires ; la valeur moyenne en tient compte.

Exercice 5

Aire entre une parabole et une droite

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$. Le repère orthogonal a pour unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1.

Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ pour tout réel x, puis donner les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

INDICE

Début : simplifie $g(x) - f(x)$, puis factorise par $\dfrac{x}{2}$.

Ensuite : dresse le signe des deux facteurs sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & g(x) - f(x) \\ &= \left(\frac{3x}{2} + 1\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \\ &= \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x}{2}(3 - x) \end{aligned}$$

Intersections. Ce produit est nul si et seulement si $x = 0$ ou $x = 3$: les courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

Signe.

- Sur $[0;3]$, $\dfrac{x}{2} \geq 0$ et $3 - x \geq 0$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$.
- Sur $]-\infty;0]$, $\dfrac{x}{2} \leq 0$ et $3 - x > 0$.
- Sur $[3;+\infty[$, $\dfrac{x}{2} > 0$ et $3 - x \leq 0$.

Dans ces deux derniers cas, $g(x) - f(x) \leq 0$.

Conclusion. La droite est au-dessus de la parabole sur $[0;3]$, et en dessous ailleurs ; les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

2.

Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes, en unités d'aire.

INDICE

Outil : si $f \leq g$ sur $[a;b]$, l'aire est $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Début : les bornes sont les abscisses des points d'intersection.

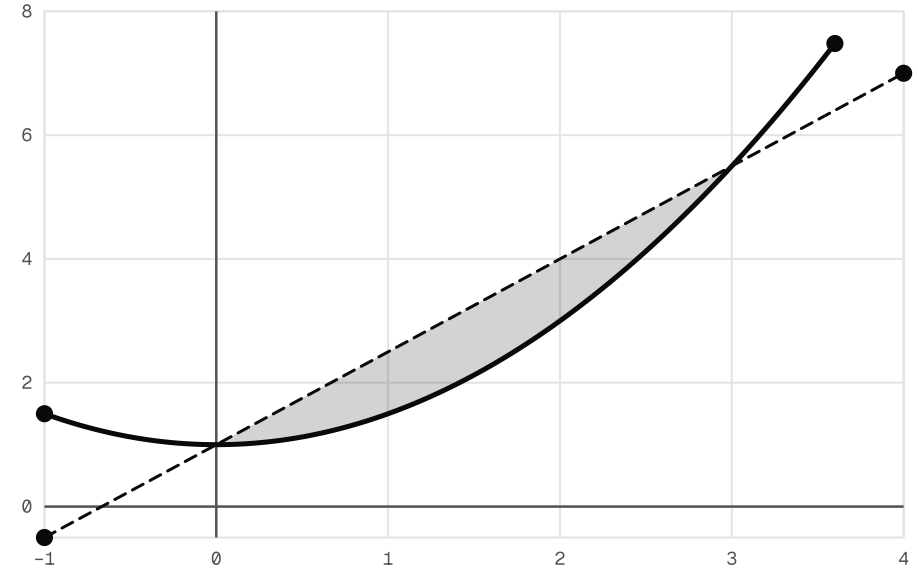
CORRIGÉ

Hypothèses. f et g sont continues sur $[0;3]$, avec $0<3$, et $f \leq g$ sur cet intervalle d'après la question 1.

Aire. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x}{2}-\dfrac{x^2}{2}$ est $x \mapsto \dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^3}{6}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^3 \left(\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right]_0^3 \\ &= \frac{27}{4}-\frac{27}{6} \\ &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du domaine vaut $\dfrac{9}{4}$ u.a.



La droite de g et la parabole de f se coupent en x = 0 et x = 3 ; entre elles, la droite est au-dessus.

3.

Convertir cette aire en cm².

INDICE

Outil : une unité d'aire vaut le produit des deux unités graphiques.

Point délicat : les deux axes n'ont pas la même unité.

CORRIGÉ

Unité. 1 u.a. $= 2 \times 1 = 2$ cm².

Conversion. $\mathcal{A} = \dfrac{9}{4} \times 2 = \dfrac{9}{2}$ cm².

Conclusion. L'aire du domaine vaut $\dfrac{9}{2}$ cm², soit $4{,}5$ cm².

Exercice 6

Une suite d'intégrales et sa limite

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{2x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.

Calculer I_1.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$, est $\ln u$.

Début : avec $u(x) = 1 + x^2$, que vaut $u'(x)$?

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = 1 + x^2$, avec $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2x$. Pour tout x de $[0;1]$, $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$; cette fonction est continue sur $[0;1]$.

Calcul.

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \end{aligned}$$

Conclusion. $I_1 = \ln 2$.

2.

Étudier le sens de variation de la suite (I_n).

INDICE

Début : par linéarité, écris $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale.

Point délicat : le signe de $x - 1$ sur $[0;1]$, et l'ordre des bornes.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier.

Différence. Par linéarité :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{2x^n(x-1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Signe. Pour x dans $[0;1]$, $2x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $1 + x^2 > 0$: la fonction intégrée, continue, est négative sur $[0;1]$. Les bornes vérifient $0 \leq 1$, donc, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

3.

Calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n. En déduire la valeur de I_3.

INDICE

Début : par linéarité, réunis les deux intégrales ; factorise $2x^n$ au numérateur.

Ensuite : prends $n = 1$.

CORRIGÉ

Relation. Soit $n \geq 1$. Par linéarité, puis en simplifiant par $1 + x^2 > 0$:

$$\begin{aligned} & I_n + I_{n+2} \\ &= \int_0^1 \frac{2x^n(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Valeur de I_3. Pour $n = 1$: $I_1 + I_3 = 1$. Avec $I_1 = \ln 2$ (question 1), on obtient $I_3 = 1 - \ln 2$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{2}{n+1}$, et $I_3 = 1 - \ln 2$.

4.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

En déduire la limite de (I_n).

INDICE

Début : sur $[0;1]$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$.

Outil : la propriété de comparaison, puis le théorème des gendarmes.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier.

Encadrement de la fonction. Pour x dans $[0;1]$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. On multiplie par $2x^n \geq 0$:

$$x^n \leq \frac{2x^n}{1+x^2} \leq 2x^n$$

Intégration. Les trois fonctions sont continues sur $[0;1]$ et $0 \leq 1$. La propriété de comparaison donne :

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \leq I_n \leq \int_0^1 2x^n \,\mathrm{d}x$$

Or $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

Limite. Les suites $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $\left(\frac{2}{n+1}\right)$ ont pour limite 0. D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$, et la suite (I_n) a pour limite 0.

Exercice 7

Aire entre une courbe exponentielle et une droite

On considère la courbe C de la fonction exponentielle et la droite D d'équation $y = e\,x$. Le repère est orthogonal, d'unités 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

1.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - e\,x$. Étudier les variations de h et en déduire que $h(x) \geq 0$ pour tout réel x.

INDICE

Début : calcule $h'(x)$ et cherche où elle s'annule.

Ensuite : le minimum de h donne son signe.

CORRIGÉ

Dérivée. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = e^x - e$.

Signe de $h'(x)$. L'exponentielle est strictement croissante et $e^1 = e$. Donc $h'(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$, et $h'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$.

Minimum. h est décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$. Elle admet donc en 1 un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $h(1) = e - e = 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $h(x) \geq h(1) = 0$.

2.

En déduire la position de la courbe C par rapport à D.

INDICE

Début : exprime $e^x - e\,x$ à l'aide de $h(x)$.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x, $e^x - e\,x = h(x)$.

Signe. D'après la question 1, $h(x) \geq 0$ pour tout réel x, et $h(1) = 0$.

Conclusion. La courbe C est au-dessus de la droite D sur $\mathbb{R}$. Elles se touchent au point d'abscisse 1.

3.

Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe C, la droite D et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

INDICE

Outil : l'aire entre deux courbes est l'intégrale de la différence positive.

Début : une primitive de $x \mapsto e^x - e\,x$ s'obtient terme par terme.

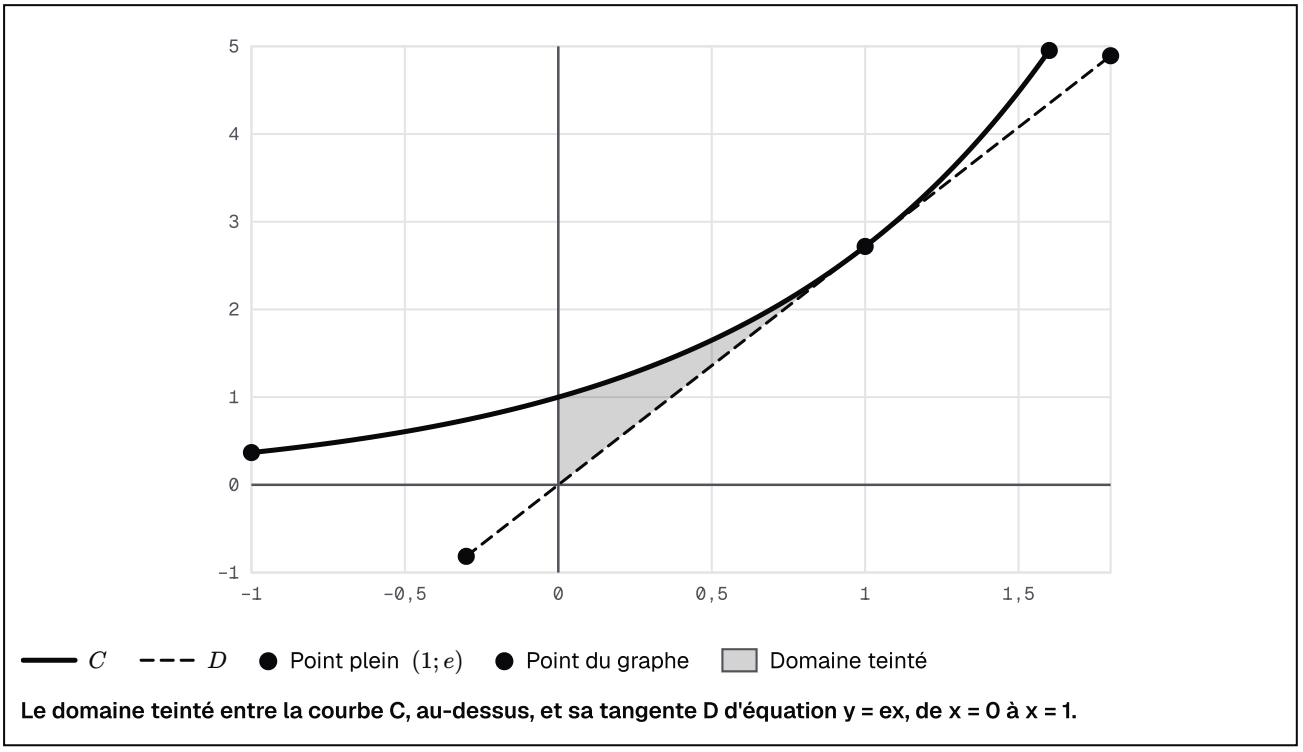
CORRIGÉ

Hypothèses. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e\,x$ sont continues sur $[0;1]$, avec $0 < 1$, et la courbe C est au-dessus de D d'après la question 2.

Aire. Une primitive de $x \mapsto e^x - e\,x$ est $x \mapsto e^x - \dfrac{e\,x^2}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (e^x - e\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[e^x - \frac{e\,x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(e - \frac{e}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{e}{2} - 1\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du domaine vaut $\dfrac{e}{2} - 1$ u.a.



Le domaine teinté entre la courbe C, au-dessus, et sa tangente D d'équation y = ex, de x = 0 à x = 1.

4.

Exprimer cette aire en cm² et l'arrondir au centième.

INDICE

Outil : une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ cm².

Point délicat : contrôle que le résultat est positif.

CORRIGÉ

Unité. 1 u.a. $= 2 \times 4 = 8$ cm².

Conversion. $\mathcal{A} = 8\left(\dfrac{e}{2} - 1\right) = 4e - 8$ cm².

Conclusion. L'aire vaut $4e - 8$ cm², soit environ $2{,}87$ cm². Ce nombre est positif, comme une aire doit l'être.