BURHAN

# Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Calcul intégral | Application | 8 |

## Exercice 1

## Trois intégrales par une primitive usuelle

### 1.

D'après des données fictives, la recette marginale d'un atelier de couture vaut $6x^2 - 4x + 2$ milliers de dirhams par centaine d'articles, quand il en produit $x$ centaines.

Calculer $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$, puis interpréter ce nombre.

INDICE

**Outil :** une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

**Début :** traite les trois termes un par un.

### 2.

Calculer $\int_1^4 \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

**Début :** écris $\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

### 3.

Calculer $\int_1^2 \left(2x - \dfrac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

**Point délicat :** le signe moins devant $\dfrac{4}{x^2}$.

### Exercice 2

## Reconnaître une forme composée

**1.**

Calculer $\int_0^1 4x(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$.

**Début :** pose $u(x)=x^2+2$, puis compare $4x$ à $u'(x)$.

**2.**

Calculer $\int_0^2 \dfrac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec $u$ strictement positive, est $\ln u$.

**Point délicat :** justifie que le dénominateur ne s'annule pas.

**3.**

Calculer $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $u'e^u$ est $e^u$.

**Début :** avec $u(x)=\dfrac{x}{2}$, on a $u'(x)=\dfrac{1}{2}$ ; il manque un facteur.

### Exercice 3

## Chasles, linéarité et valeur absolue

Soit $f$ une fonction continue sur $[0;5]$. On sait que :

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$$
$$\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 10$$

**1.**

Calculer $\int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t$, puis $\int_5^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

**Outil :** la relation de Chasles avec $a=0$, $c=3$ et $b=5$.

**Ensuite :** échanger les bornes change le signe.

**2.**

Calculer $\int_0^3 \big(2f(t)+4\big)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

**Outil :** la linéarité sépare la somme et sort le facteur $2$.

**Point délicat :** l'intégrale de la constante $4$ sur $[0;3]$.

**3.**

Calculer $\int_{-1}^{2} |2x|\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Début :** $2x$ est négatif pour $x \leq 0$ et positif pour $x \geq 0$.

**Outil :** coupe l'intégrale en $0$ par la relation de Chasles.

**Exercice 4**

## Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

On pose :

$$I = \int_0^1 \frac{2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Aucune primitive usuelle ne permet de calculer $I$.

**1.**

Justifier que, pour tout $x$ de $[0;1]$ :

$$1 \leq \frac{2}{1+x^4} \leq 2$$

INDICE

**Début :** pour $0 \leq x \leq 1$, encadre d'abord $x^4$, puis $1+x^4$.

**Point délicat :** le passage à l'inverse change le sens.

**2.**

En déduire un encadrement de $I$.

INDICE

**Outil :** l'encadrement d'une intégrale, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

**Point délicat :** vérifie l'ordre des bornes.

**3.**

On pose :

$$K = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^4} + 2x\right)\mathrm{d}x$$

Exprimer $K$ en fonction de $I$, puis encadrer $K$.

INDICE

**Outil :** la linéarité sépare $K$ en deux intégrales.

**Ensuite :** calcule la seconde avec une primitive.

**Exercice 5**

## Le bénéfice moyen d'une boutique

D'après des données fictives, une boutique de quartier réalise le jour $t$ de son premier mois d'activité un bénéfice journalier $B(t)$, en milliers de dirhams, avec, pour $t$ dans $[0;6]$ :

$$B(t) = \frac{t^2}{4} + 2$$

**1.**

Calculer $\int_0^6 B(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \frac{t^3}{3}$.

**Début :** une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{4}$ s'obtient en divisant par $4$.

**2.**

En déduire le bénéfice journalier moyen sur $[0;6]$, et l'interpréter.

INDICE

**Outil :** la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur $b-a$ de l'intervalle.

**Point délicat :** garde l'unité de $B$.

**3.**

Déterminer le jour $t$ de $[0;6]$ où le bénéfice journalier est égal à sa valeur moyenne.

INDICE

**Début :** résous l'équation $B(t) = 5$.

**Point délicat :** garde seulement la solution qui appartient à $[0;6]$.

### Exercice 6

## Deux intégrations par parties guidées

**1.**

Calculer $\int_0^1 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ par parties, en posant $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = 4x$.

INDICE

**Début :** une primitive de $x \mapsto e^{2x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$, donc $u(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$.

**Ensuite :** $v'(x) = 4$.

**2.**

Calculer $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ par parties, en posant $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = \ln x$.

INDICE

**Début :** une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

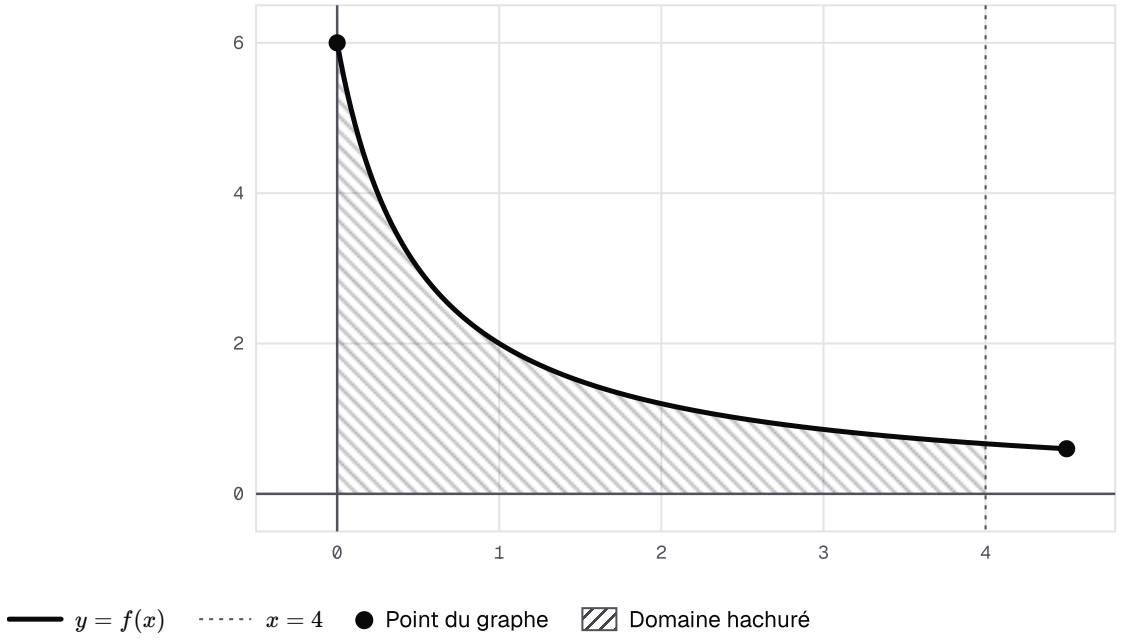
**Point délicat :** le produit $u(x)v'(x)$ porte un signe moins.

### Exercice 7

## Aire sous une courbe positive

Dans un repère orthogonal d'unités $2$ cm sur chaque axe, on considère la courbe de la fonction $f$ définie sur $[0;4]$ par $f(x)=\dfrac{6}{2x+1}$.

Dessine-la sur ton cahier, avec le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=4$.




**La courbe de f(x) = 6/(2x + 1) sur [0 ; 4] et le domaine hachuré entre elle et l'axe des abscisses.**

### 1.

Calculer l'aire de ce domaine en unités d'aire.

INDICE

**Outil :** pour une fonction continue et positive, l'aire est l'intégrale.

**Début :** avec $u(x)=2x+1$, écris $\dfrac{6}{2x+1}=3\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

### 2.

Donner cette aire en cm², puis une valeur approchée au centième.

INDICE

**Outil :** une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ en cm².

**Ensuite :** utilise la calculatrice pour $\ln 3$.

### Exercice 8

## Une aire sous l'axe des abscisses

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=2x^2-4x$. Le repère a pour unités $1{,}5$ cm sur chaque axe.

**1.**

Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;2]$.

INDICE

**Début :** factorise $f(x)$ par $2x$.

**Ensuite :** donne le signe de chaque facteur sur $[0;2]$.

**2.**

Calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

**Outil :** une primitive de $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

**Point délicat :** le résultat doit être cohérent avec le signe trouvé.

**3.**

En déduire l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=2$, en u.a. puis en cm².

INDICE

**Outil :** pour une fonction négative, l'aire est l'opposé de l'intégrale.

**Ensuite :** calcule l'aire d'une unité en cm².