BURHAN

Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Application	8

Exercice 1

Trois intégrales par une primitive usuelle

1.

D'après des données fictives, la recette marginale d'un atelier de couture vaut $6x^2 - 4x + 2$ milliers de dirhams par centaine d'articles, quand il en produit x centaines.

Calculer $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$, puis interpréter ce nombre.

INDICE

Outil : une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Début : traite les trois termes un par un.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $x \mapsto 6x^2 - 4x + 2$ est un polynôme, donc elle est continue sur $[0;2]$.

Primitive. Terme par terme, une primitive de cette fonction est :

$$x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 2x$$

Calcul.

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x^3 - 2x^2 + 2x\right]_0^2 \\
&= (16 - 8 + 4) - 0 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut 12. Quand l'atelier passe de 0 à 2 centaines d'articles, sa recette augmente de 12 milliers de dirhams (données fictives).

2.

Calculer $\int_1^4 \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

Début : écris $\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$, qui contient $[1;4]$.

Primitive. Pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Une primitive est donc $x \mapsto 4\sqrt{x}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[4\sqrt{x}\right]_1^4 \\ &= 4 \times 2 - 4 \times 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_1^4 \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4$.

3.

Calculer $\int_1^2 \left(2x - \dfrac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Point délicat : le signe moins devant $\dfrac{4}{x^2}$.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $x \mapsto 2x - \dfrac{4}{x^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$, qui contient $[1;2]$.

Primitive. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{4}{x}$ est $x \mapsto -\dfrac{4}{x^2}$. Une primitive de la fonction est donc :

$$x \mapsto x^2 + \frac{4}{x}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left(2x - \frac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[x^2 + \frac{4}{x}\right]_1^2 \\
&= (4+2) - (1+4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_1^2 \left(2x - \dfrac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x = 1$.

Exercice 2

Reconnaître une forme composée

1.

Calculer $\int_0^1 4x(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$.

Début : pose $u(x)=x^2+2$, puis compare $4x$ à $u'(x)$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=x^2+2$ pour tout réel x. Alors $u'(x)=2x$ et, pour tout réel x :

$$4x(x^2+2)^3 = 2u'(x)\,u(x)^3$$

La fonction intégrée est un polynôme, continue sur $[0;1]$.

Primitive. Une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$. Comme $2\times\dfrac{u^4}{4}=\dfrac{u^4}{2}$, une primitive de la fonction intégrée est :

$$x\mapsto \frac{(x^2+2)^4}{2}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 4x(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(x^2+2)^4}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{81}{2}-\frac{16}{2}\\ &= \frac{65}{2}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 4x(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{65}{2}$.

2.

Calculer $\int_0^2 \dfrac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec u strictement positive, est $\ln u$.

Point délicat : justifie que le dénominateur ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Signe du dénominateur. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2+2x+4 &= (x+1)^2+3 \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

Le dénominateur est donc strictement positif, et la fonction intégrée est continue sur $[0;2]$.

Forme. Posons $u(x)=x^2+2x+4$. Alors $u'(x)=2x+2$: la fonction intégrée s'écrit $\dfrac{u'}{u}$, avec $u>0$. Une primitive est $x \mapsto \ln(x^2+2x+4)$.

Calcul.

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\ln(x^2+2x+4)\Big]_0^2 \\ &= \ln 12 - \ln 4 \\ &= \ln\frac{12}{4} = \ln 3 \end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^2 \dfrac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \ln 3$.

3.

Calculer $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $u'e^u$ est e^u.

Début : avec $u(x)=\dfrac{x}{2}$, on a $u'(x)=\dfrac{1}{2}$; il manque un facteur.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x)=\dfrac{x}{2}$. Alors $u'(x)=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout réel x :

$$e^{\frac{x}{2}} = 2\times\frac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}}$$

La fonction $x\mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0;2]$, et une primitive est $x\mapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2\\ &= 2e^{1}-2e^{0}\\ &= 2e-2\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2e-2$.

Exercice 3

Chasles, linéarité et valeur absolue

Soit f une fonction continue sur $[0;5]$. On sait que :

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$$
$$\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 10$$

1.

Calculer $\int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t$, puis $\int_5^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles avec $a=0$, $c=3$ et $b=5$.

Ensuite : échanger les bornes change le signe.

CORRIGÉ

Chasles. Les réels 0, 3 et 5 sont dans $[0;5]$, où f est continue. D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 10 - 4 = 6$$

Bornes échangées.

$$\int_5^3 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -6$$

Conclusion. $\int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 6$ et $\int_5^3 f(t)\,\mathrm{d}t = -6$.

2.

Calculer $\int_0^3 \big(2f(t)+4\big)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Outil : la linéarité sépare la somme et sort le facteur 2.

Point délicat : l'intégrale de la constante 4 sur $[0;3]$.

CORRIGÉ

Linéarité. Les fonctions f et $t \mapsto 4$ sont continues sur $[0;3]$. Par linéarité :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 \big(2f(t)+4\big)\,\mathrm{d}t\\&= 2\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^3 4\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Intégrale de la constante.

$$\int_0^3 4\,\mathrm{d}t = [4t]_0^3 = 12$$

Somme. Avec $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$:

$$2\times 4 + 12 = 20$$

Conclusion. $\int_0^3 \big(2f(t)+4\big)\,\mathrm{d}t = 20$.

3.

Calculer $\int_{-1}^{2} |2x|\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Début : $2x$ est négatif pour $x \leq 0$ et positif pour $x \geq 0$.

Outil : coupe l'intégrale en 0 par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Signe. Pour x dans $[-1;0]$, $2x \leq 0$, donc $|2x| = -2x$. Pour x dans $[0;2]$, $2x \geq 0$, donc $|2x| = 2x$. La fonction $x \mapsto |2x|$ est continue sur $[-1;2]$.

Chasles. On coupe l'intégrale en 0 :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{2} |2x|\,\mathrm{d}x\\&= \int_{-1}^{0} (-2x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2x\,\mathrm{d}x\\&= \big[-x^2\big]_{-1}^{0} + \big[x^2\big]_{0}^{2}\end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}&\big(0-(-1)\big) + (4-0)\\&= 1+4 = 5\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_{-1}^{2} |2x|\,\mathrm{d}x = 5$.

Exercice 4

Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

On pose :

$$I = \int_0^1 \frac{2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Aucune primitive usuelle ne permet de calculer I.

1.

Justifier que, pour tout x de $[0;1]$:

$$1 \leq \frac{2}{1+x^4} \leq 2$$

INDICE

Début : pour $0 \leq x \leq 1$, encadre d'abord x^4, puis $1+x^4$.

Point délicat : le passage à l'inverse change le sens.

CORRIGÉ

Soit x dans $[0;1]$.

Encadrement de $1+x^4$. Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq x^4 \leq 1$. On ajoute 1 :

$$1 \leq 1+x^4 \leq 2$$

Inverse. Ces nombres sont strictement positifs ; le passage à l'inverse change le sens des inégalités :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$$

Facteur 2. On multiplie par $2 > 0$:

$$1 \leq \frac{2}{1+x^4} \leq 2$$

Conclusion. Pour tout x de $[0;1]$, $1 \leq \dfrac{2}{1+x^4} \leq 2$.

2.

En déduire un encadrement de I.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une intégrale, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Point délicat : vérifie l'ordre des bornes.

CORRIGÉ

Hypothèses. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^4}$ est continue sur $[0;1]$, et les bornes vérifient $0 \leq 1$. D'après la question 1, elle est comprise entre $m = 1$ et $M = 2$.

Encadrement. Ici $b - a = 1 - 0 = 1$, donc :

$$1 \times 1 \leq I \leq 2 \times 1$$

Conclusion. $1 \leq I \leq 2$.

3.

On pose :

$$K = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^4} + 2x \right) \mathrm{d}x$$

Exprimer K en fonction de I, puis encadrer K.

INDICE

Outil : la linéarité sépare K en deux intégrales.

Ensuite : calcule la seconde avec une primitive.

CORRIGÉ

Linéarité. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^4}$ et $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[0;1]$, donc :

$$K = I + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$$

Calcul.

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

Donc $K = I + 1$.

Encadrement. On ajoute 1 aux trois membres de $1 \leq I \leq 2$:

$$2 \leq K \leq 3$$

Conclusion. $K = I + 1$ et $2 \leq K \leq 3$.

Exercice 5

Le bénéfice moyen d'une boutique

D'après des données fictives, une boutique de quartier réalise le jour t de son premier mois d'activité un bénéfice journalier $B(t)$, en milliers de dirhams, avec, pour t dans $[0;6]$:

$$B(t) = \frac{t^2}{4} + 2$$

1.

Calculer $\int_0^6 B(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Outil : une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$.

Début : une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{4}$ s'obtient en divisant par 4.

CORRIGÉ

Continuité. B est un polynôme, continu sur $[0;6]$.

Primitive. Une primitive de B est :

$$t \mapsto \frac{t^3}{12} + 2t$$

Calcul.

$$\begin{aligned}\int_0^6 B(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^3}{12} + 2t\right]_0^6 \\ &= \frac{216}{12} + 12 \\ &= 18 + 12 \\ &= 30\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^6 B(t)\,\mathrm{d}t = 30$.

2.

En déduire le bénéfice journalier moyen sur $[0;6]$, et l'interpréter.

INDICE

Outil : la valeur moyenne est l'intégrale divisée par la longueur $b-a$ de l'intervalle.

Point délicat : garde l'unité de B.

CORRIGÉ

Valeur moyenne. B est continue sur $[0;6]$ et $0<6$. Sa valeur moyenne sur $[0;6]$ est :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{6-0}\int_0^6 B(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{30}{6} = 5\end{aligned}$$

Conclusion. Le bénéfice journalier moyen vaut 5 milliers de dirhams : sur cette période, la boutique gagne en moyenne $5\,000$ dirhams par jour (données fictives).

3.

Déterminer le jour t de $[0;6]$ où le bénéfice journalier est égal à sa valeur moyenne.

INDICE

Début : résous l'équation $B(t)=5$.

Point délicat : garde seulement la solution qui appartient à $[0;6]$.

CORRIGÉ

Équation. On résout $B(t)=5$:

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{4}+2=5 &\Leftrightarrow \frac{t^2}{4}=3 \\ &\Leftrightarrow t^2=12\end{aligned}$$

Les solutions réelles sont $2\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$.

Solution retenue. Seule $2\sqrt{3}$ appartient à $[0;6]$, car $0<2\sqrt{3}=\sqrt{12}<\sqrt{36}=6$.

Conclusion. Le bénéfice journalier est égal à sa valeur moyenne pour $t=2\sqrt{3}\approx 3{,}46$, c'est-à-dire au cours du quatrième jour.

Exercice 6

Deux intégrations par parties guidées

1.

Calculer $\int_0^1 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ par parties, en posant $u'(x)=e^{2x}$ et $v(x)=4x$.

INDICE

Début : une primitive de $x\mapsto e^{2x}$ est $x\mapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$, donc $u(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}$.

Ensuite : $v'(x)=4$.

CORRIGÉ

Facteurs. Pour tout x de $[0;1]$, $u(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}$ et $v'(x)=4$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$.

Intégration par parties.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{e^{2x}}{2}\times 4x\right]_0^1\\&\quad-\int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\times 4\,\mathrm{d}x\\&=2e^2-\int_0^1 2e^{2x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Intégrale restante.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2e^{2x}\,\mathrm{d}x&=\left[e^{2x}\right]_0^1\\&=e^2-1\end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x\\&=2e^2-(e^2-1)\\&=e^2+1\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x=e^2+1$.

2.

Calculer $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ par parties, en posant $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $v(x)=\ln x$.

INDICE

Début : une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est $x\mapsto-\dfrac{1}{x}$.

Point délicat : le produit $u(x)v'(x)$ porte un signe moins.

CORRIGÉ

Facteurs. Pour tout x de $[1;2]$, $u(x)=-\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;2]$.

Intégration par parties. Comme $\ln 1=0$:

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2\\&\quad-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln 2}{2}+\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Intégrale restante.

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\\&=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Résultat.

$$\begin{aligned}&\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\\&=\frac{1-\ln 2}{2}\end{aligned}$$

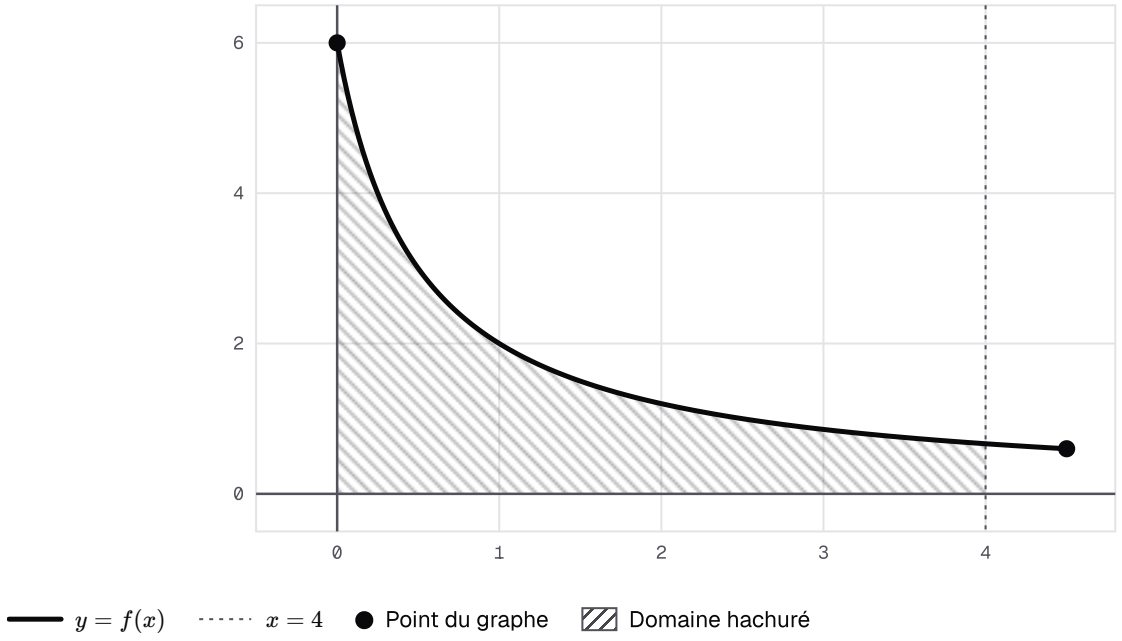
Conclusion. $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

Exercice 7

Aire sous une courbe positive

Dans un repère orthogonal d'unités 2 cm sur chaque axe, on considère la courbe de la fonction f définie sur $[0;4]$ par $f(x)=\dfrac{6}{2x+1}$.

Dessine-la sur ton cahier, avec le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=4$.



La courbe de f(x) = 6/(2x + 1) sur [0 ; 4] et le domaine hachuré entre elle et l'axe des abscisses.

1.

Calculer l'aire de ce domaine en unités d'aire.

INDICE

Outil : pour une fonction continue et positive, l'aire est l'intégrale.

Début : avec $u(x) = 2x + 1$, écris $\dfrac{6}{2x+1} = 3 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

CORRIGÉ

Hypothèses. Pour x dans $[0;4]$, $2x + 1 \geq 1 > 0$. Donc f est continue et $f(x) > 0$ sur $[0;4]$; de plus $0 < 4$. L'aire du domaine est l'intégrale de f de 0 à 4.

Primitive. Posons $u(x) = 2x + 1$, avec $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2$. Pour tout x de $[0;4]$, $f(x) = 3 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f est donc $x \mapsto 3\ln(2x+1)$.

Aire.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^4 \frac{6}{2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[3\ln(2x+1)\right]_0^4 \\ &= 3\ln 9 - 3\ln 1 \\ &= 6\ln 3\end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du domaine vaut $6\ln 3$ u.a.

2.

Donner cette aire en cm², puis une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : une unité d'aire vaut $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ en cm².

Ensuite : utilise la calculatrice pour $\ln 3$.

CORRIGÉ

Unité. 1 u.a. $= 2 \times 2 = 4$ cm².

Conversion. $\mathcal{A} = 6\ln 3 \times 4 = 24\ln 3$ cm².

Conclusion. L'aire vaut $24\ln 3$ cm², soit environ $26{,}37$ cm².

Exercice 8

Une aire sous l'axe des abscisses

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=2x^2-4x$. Le repère a pour unités $1{,}5$ cm sur chaque axe.

1.

Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;2]$.

INDICE

Début : factorise $f(x)$ par $2x$.

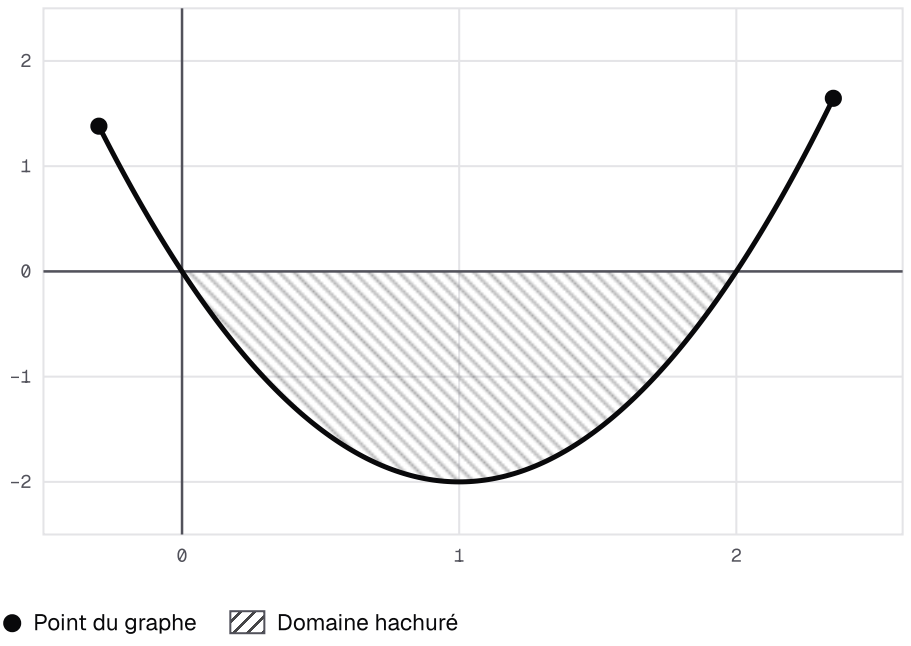
Ensuite : donne le signe de chaque facteur sur $[0;2]$.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout x de $[0;2]$, $f(x)=2x(x-2)$.

Signe. Pour x dans $[0;2]$, $2x\geq 0$ et $x-2\leq 0$: le produit est négatif.

Conclusion. Pour tout x de $[0;2]$, $f(x)\leq 0$: la courbe est sous l'axe des abscisses.



La courbe de f(x) = 2x² - 4x reste sous l'axe des abscisses entre 0 et 2 ; le domaine hachuré est en dessous.

2.

Calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Outil : une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Point délicat : le résultat doit être cohérent avec le signe trouvé.

CORRIGÉ

Primitive. f est continue sur $[0;2]$; une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{2x^3}{3} - 2x^2$$

Calcul.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} - 8 \\ &= -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{8}{3}$. Le résultat est négatif, comme la fonction.

3.

En déduire l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$, en u.a. puis en cm².

INDICE

Outil : pour une fonction négative, l'aire est l'opposé de l'intégrale.

Ensuite : calcule l'aire d'une unité en cm².

CORRIGÉ

Aire en u.a. f est continue et négative sur $[0;2]$, et $0 < 2$. L'aire est l'opposé de l'intégrale, calculée à la question 2 : $\mathcal{A} = -\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}$ u.a.

Unité. 1 u.a. $= 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ cm².

Conversion. $\mathcal{A} = \dfrac{8}{3} \times 2{,}25 = 6$ cm².

Conclusion. L'aire du domaine vaut $\dfrac{8}{3}$ u.a., soit 6 cm².