BURHAN

Calcul intégral

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-integral/cours

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

Intégrale et primitive

Un coût marginal

Un atelier fabrique des sacs en cuir (données fictives). Quand il produit q sacs par jour, son **coût marginal**, en dirhams, est $C_m(q) = 3q + 15$.

Le coût marginal est la dérivée du coût total C : pour tout $q \geq 0$, $C'(q) = C_m(q)$.

Le gérant veut passer de 10 à 20 sacs par jour. Combien cette hausse va-t-elle coûter ?

Devine : Une prédiction

Le coût marginal vaut $C_m(10) = 45$ dirhams et $C_m(20) = 75$ dirhams. Que vaut le coût des sacs ajoutés, $C(20) - C(10)$?

A. Exactement 450 dirhams, dix sacs au coût marginal du départ.

Faux.

Ce calcul garde le coût marginal de départ. Or il augmente avec q : le vrai coût est plus grand.

B. Exactement 30 dirhams, l'écart entre 75 et 45.

Faux.

C'est la hausse du coût marginal, pas le coût des dix sacs ajoutés.

C. Un montant strictement compris entre 450 et 750 dirhams.

Juste.

Juste : le coût marginal passe de 45 à 75. Le coût des dix sacs est donc entre 10×45 et 10×75 .

D. Exactement 750 dirhams, dix sacs au coût marginal final.

Faux.

Ce calcul applique le coût marginal le plus élevé à tous les sacs : il surestime.

Correction

Une primitive de C_m est $q \mapsto \dfrac{3}{2}q^2 + 15q$. Le coût total s'écrit donc $C(q) = \dfrac{3}{2}q^2 + 15q + k$, où k est le coût fixe.

On calcule le coût total pour 20 sacs, puis pour 10 sacs :

$$C(20) = 600 + 300 + k,$$
$$C(10) = 150 + 150 + k.$$

Dans la différence, k disparaît :

$$C(20) - C(10) = 600.$$

Les dix sacs ajoutés coûtent 600 dirhams, entre 450 et 750. Le coût fixe k n'a joué aucun rôle.

En clair. Pour connaître $C(20) - C(10)$, une primitive de C_m suffit. Le coût fixe k n'intervient pas : toutes les primitives donnent la même différence.

Ce nombre porte un nom : c'est l'**intégrale** de C_m entre 10 et 20, notée $\int_{10}^{20} C_m(q)\,\mathrm{d}q$.

Ce geste, la différence des valeurs d'une primitive, porte tout le chapitre. Avec lui, tu vas calculer des montants, des prix moyens et des aires. Tu étudieras aussi des suites définies par des intégrales.

La définition

Définition : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, et a et b deux réels de I. Le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle l'**intégrale de a à b de f**. On le note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ce réel ne dépend pas de la primitive choisie : deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante k, et $\big(F(b)+k\big) - \big(F(a)+k\big) = F(b) - F(a)$.

Les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale. La lettre x est **muette** : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple : une intégrale avec des crochets

On calcule $\int_1^2 (5x^4 + 3)\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto 5x^4 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto x^5 + 3x$ en est une primitive. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_1^2 (5x^4 + 3)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[x^5 + 3x\big]_1^2 \\ &= (32 + 6) - (1 + 3) = 34.\end{aligned}$$

Vérifie : Une autre primitive

Pour le même calcul, Salma choisit la primitive $x \mapsto x^5 + 3x + 7$. Quel résultat obtient-elle ?

A. Le nombre 41, car la constante 7 s'ajoute au résultat.
Faux.
La constante apparaît dans $F(2)$ et dans $F(1)$: elle s'élimine dans la différence.

B. Le nombre 48, car la constante compte deux fois.

Faux.

La constante est ajoutée dans $F(2)$, puis retranchée avec $F(1)$: elle ne compte pas.

C. Un autre nombre, car le choix de la primitive change tout.

Faux.

Deux primitives diffèrent d'une constante : la différence $F(2) - F(1)$ ne change pas.

D. Le nombre 34, comme avec la première primitive.

Juste.

Juste : $(32 + 6 + 7) - (1 + 3 + 7) = 45 - 11 = 34$.

Correction

Avec la primitive de Salma :

$$\begin{aligned}&\left[x^5 + 3x + 7\right]_1^2 \\ &= 45 - 11 = 34.\end{aligned}$$

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Cette constante s'élimine dans $F(b) - F(a)$: l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

Attention : les parenthèses du crochet

✗ « $\left[x^3 + x\right]_{-1}^2 = 2^3 + 2 - (-1)^3 + (-1) = 10 + 1 - 1 = 10$. »

✓ Ici, $F(a)$ est une somme : on l'entoure de parenthèses avant de la retrancher.

$$\begin{aligned}&\left[x^3 + x\right]_{-1}^2 \\ &= (8 + 2) - \left((-1)^3 + (-1)\right) \\ &= 10 - (-2) = 12.\end{aligned}$$

Sans parenthèses, le signe moins ne porte que sur le premier terme de $F(a)$.

Bornes égales ou échangées

En clair. Passer de 10 sacs à 10 sacs ne coûte rien. Si on échange les bornes, on calcule $C(10) - C(20) = -600$: le signe change.

Pourquoi est-ce vrai ? Tout se lit sur la différence $F(b) - F(a)$.

Propriété : Intégrale à bornes égales ou échangées

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I. Alors

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. Par définition de l'intégrale, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$.

Étape 2. Toujours par définition, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve n'utilise que la **définition**. On écrit chaque intégrale comme une différence de valeurs d'une primitive : valeur à la borne du haut, moins valeur à la borne du bas. Échanger les bornes, c'est échanger les deux termes d'une différence. On obtient son opposé.

Vérifie : La borne répétée

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

A. Parce que, par définition, elle vaut $F(a) - F(a)$.

Juste.
Juste : la même valeur est retranchée à elle-même.

B. Parce qu'une fonction continue s'annule en a.

Faux.
Rien n'oblige $f(a)$ à valoir 0 : la fonction $x \mapsto 5x^4 + 3$ vaut 8 en 1.

C. Parce que la primitive F s'annule en a.

Faux.
Une primitive ne s'annule pas forcément en a ; la preuve n'en a pas besoin.

D. Parce que c'est une convention, sans justification.

Faux.
Ce n'est pas une convention : la définition le donne.

Correction
Par définition de l'intégrale, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$, pour n'importe quelle primitive F. La preuve n'utilise rien d'autre que l'existence d'une primitive.

Exemple : des bornes égales, puis échangées

- $\int_3^3 (x^7 - 5x)\,\mathrm{d}x = 0$: les bornes sont égales, aucun calcul n'est nécessaire.
- La fonction $x \mapsto 7x^6$ a pour primitive $x \mapsto x^7$, donc $\int_0^1 7x^6\,\mathrm{d}x = 1 - 0 = 1$. En échangeant les bornes, $\int_1^0 7x^6\,\mathrm{d}x = -1$.

Une intégrale peut donc être négative alors que la fonction est positive.

Reconnaître une primitive

Méthode : calculer une intégrale avec une primitive

1. **Contrôler** la continuité de la fonction à intégrer sur tout le segment délimité par les bornes.
2. **Repérer la forme** : x^n, $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$, ou $u'e^u$. Écrire une primitive F, puis la dériver au brouillon pour la contrôler.
3. **Conclure** : écrire $[F(x)]_a^b$, puis $F(b) - F(a)$, avec des parenthèses autour de $F(a)$.

Exemple : la fonction $x \mapsto 3x^2e^{x^3}$ est de la forme $u'e^u$, avec $u : x \mapsto x^3$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 3x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x\\&= \left[e^{x^3}\right]_0^1 = e - 1.\end{aligned}$$

Exemple : deux formes composées

- Pour $\int_0^1 3x^2(x^3+1)^3\,\mathrm{d}x$, la forme est $u'u^3$, avec $u : x \mapsto x^3 + 1$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{(x^3+1)^4}{4}$. L'intégrale vaut $\dfrac{2^4}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$.
- Pour $\int_0^1 \dfrac{5}{5x+3}\,\mathrm{d}x$, la forme est $\dfrac{u'}{u}$, avec $u : x \mapsto 5x + 3$, strictement positive sur $[0;1]$. L'intégrale vaut $[\ln(5x+3)]_0^1 = \ln 8 - \ln 3 = \ln\dfrac{8}{3}$.

À toi : Une forme à reconnaître

Calcule $\int_0^1 \dfrac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compare le numérateur à la dérivée du dénominateur.

Indice 2

La dérivée de $x \mapsto x^3 + 1$ est $x \mapsto 3x^2$: la fonction est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Indice 3

Point délicat : vérifie que $x^3 + 1 > 0$ sur $[0;1]$, puis n'oublie pas que $\ln 1 = 0$.

Réponse

Sur $[0;1]$, la fonction $u : x \mapsto x^3 + 1$ est strictement positive, et $u'(x) = 3x^2$. La fonction à intégrer est de la forme $\dfrac{u'}{u}$: une primitive est $x \mapsto \ln(x^3+1)$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\\&= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.\end{aligned}$$

Intégrale et aire

Une aire sous une droite

Devine : Une aire à la main

Dans un repère orthogonal, dessine la droite d'équation $y = 3x + 1$ entre $x = 0$ et $x = 2$. Le domaine compris entre cette droite, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est un trapèze. Quelle est son aire, en unités d'aire ?

A. 2 u.a. : un rectangle de hauteur 1 seulement.

Faux.

Tu oublies le triangle posé sur ce rectangle.

B. 6 u.a. : un triangle de hauteur 6 seulement.

Faux.

Tu oublies le rectangle de hauteur 1 sous ce triangle.

C. 8 u.a. : un rectangle plus un triangle.

Juste.

Juste : $2 \times 1 + \dfrac{2 \times 6}{2} = 2 + 6 = 8$.

D. 14 u.a. : un rectangle de hauteur 7.

Faux.

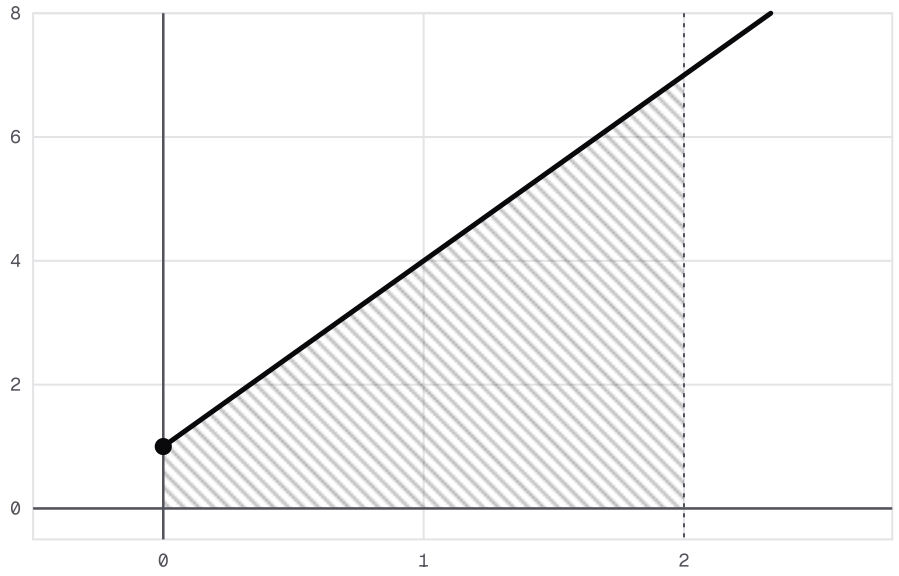
La hauteur 7 n'est atteinte qu'en $x = 2$: ce rectangle déborde du domaine.

Correction

Le domaine se découpe en deux morceaux :

- un rectangle de base 2 et de hauteur 1, d'aire 2 u.a. ;
- un triangle de base 2 et de hauteur $7 - 1 = 6$, d'aire 6 u.a.

L'aire totale vaut $2 + 6 = 8$ u.a.



La droite y = 3x + 1 de x = 0 à x = 2 et le trapèze hachuré qu'elle délimite avec l'axe des abscisses.

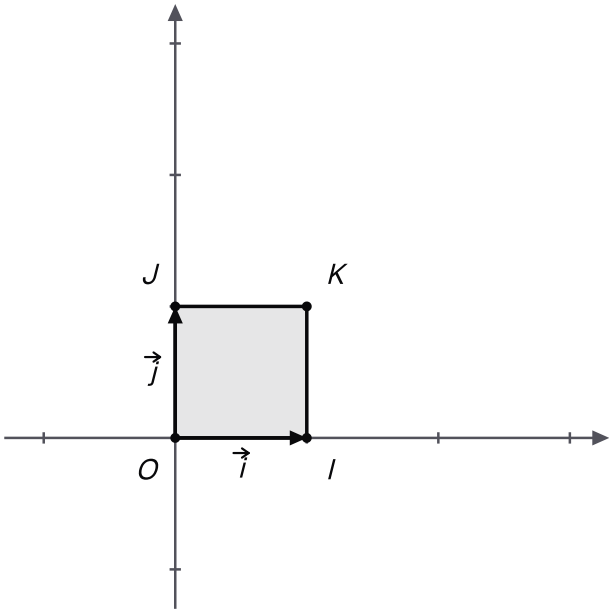
Calculons maintenant l'intégrale de la même fonction. Une primitive de $x \mapsto 3x + 1$ est $x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2 + x$, donc :

$$\begin{aligned} &\int_0^2 (3x + 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^2 \\ &= 6 + 2 = 8. \end{aligned}$$

On retrouve l'aire du trapèze. Ce n'est pas un hasard : la fonction est positive sur $[0; 2]$.

Unité d'aire. Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Une aire en u.a. se convertit ensuite en cm². Tu le feras dans la section sur le calcul d'aires.



L'unité d'aire : le rectangle construit sur les vecteurs i et j, teinté, mesure 1 u.a.

Le lien entre intégrale et aire

Propriété : Intégrale d'une fonction positive et aire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'**unité d'aire**, notée u.a., est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;b]$, avec $a<b$, et C_f sa courbe. L'aire du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aire.

Remarque : Statut de ce résultat

Ce résultat est admis. Le programme ne construit pas l'aire d'un domaine limité par une courbe. On l'accepte, et on s'en sert pour calculer.

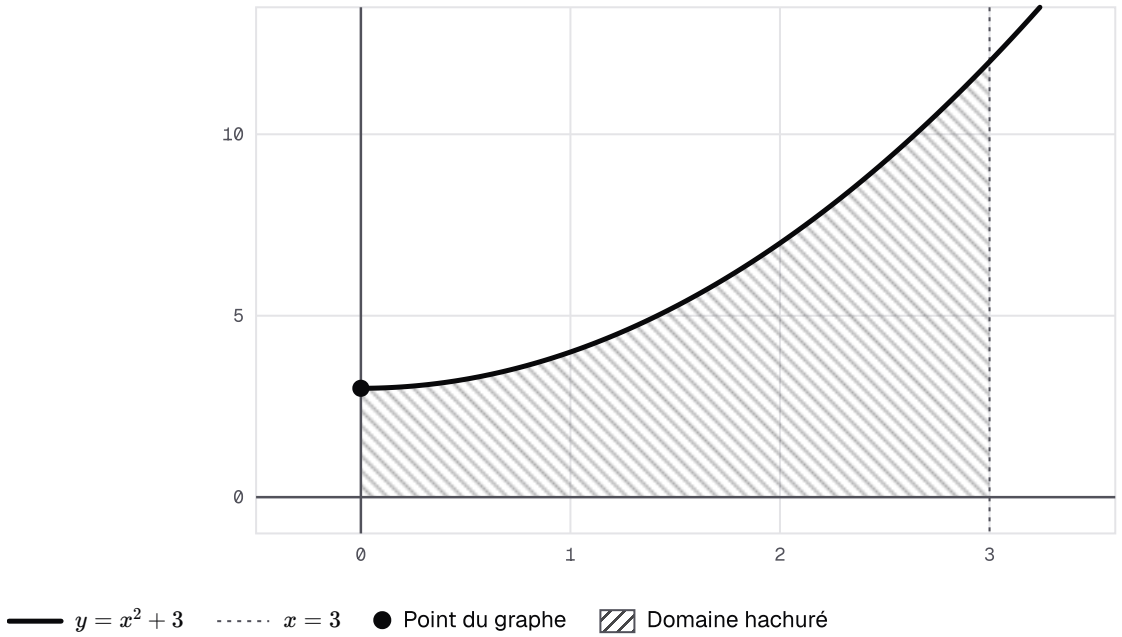
Exemple : une région sous un arc de parabole

Prends $x\mapsto x^2+3$ sur $[0;3]$. Elle y est continue, et ses valeurs ne descendent jamais sous 3 : elle est positive.

Dessine la région comprise entre l'arc de parabole et l'axe des abscisses, de l'abscisse 0 à l'abscisse 3. Sa mesure se calcule par une intégrale :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 (x^2+3)\,\mathrm{d}x\\&= \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^3\\&= 9+9=18.\end{aligned}$$

Cette région occupe donc 18 u.a.



La région sous l'arc de parabole y = x² + 3, entre les abscisses 0 et 3 : elle mesure 18 u.a.

Vérifie : Une intégrale négative

On donne $\int_0^3 (x^2-9)\,\mathrm{d}x = -18$. Sur $[0;3]$, la courbe de $x \mapsto x^2-9$ est sous l'axe des abscisses. Que vaut l'aire du domaine limité par cette courbe, l'axe et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$?

A. Elle vaut -18 u.a., comme l'intégrale.

Faux.

Une aire est positive : un nombre négatif ne peut pas être une aire.

B. Elle vaut 18 u.a., l'opposé de l'intégrale.

Juste.

Juste : ce domaine est le symétrique, par rapport à l'axe, de celui situé sous la courbe de $x \mapsto 9-x^2$.

C. Elle vaut 0 u.a., car la courbe est sous l'axe.

Faux.

Le domaine existe bien : il est seulement situé sous l'axe.

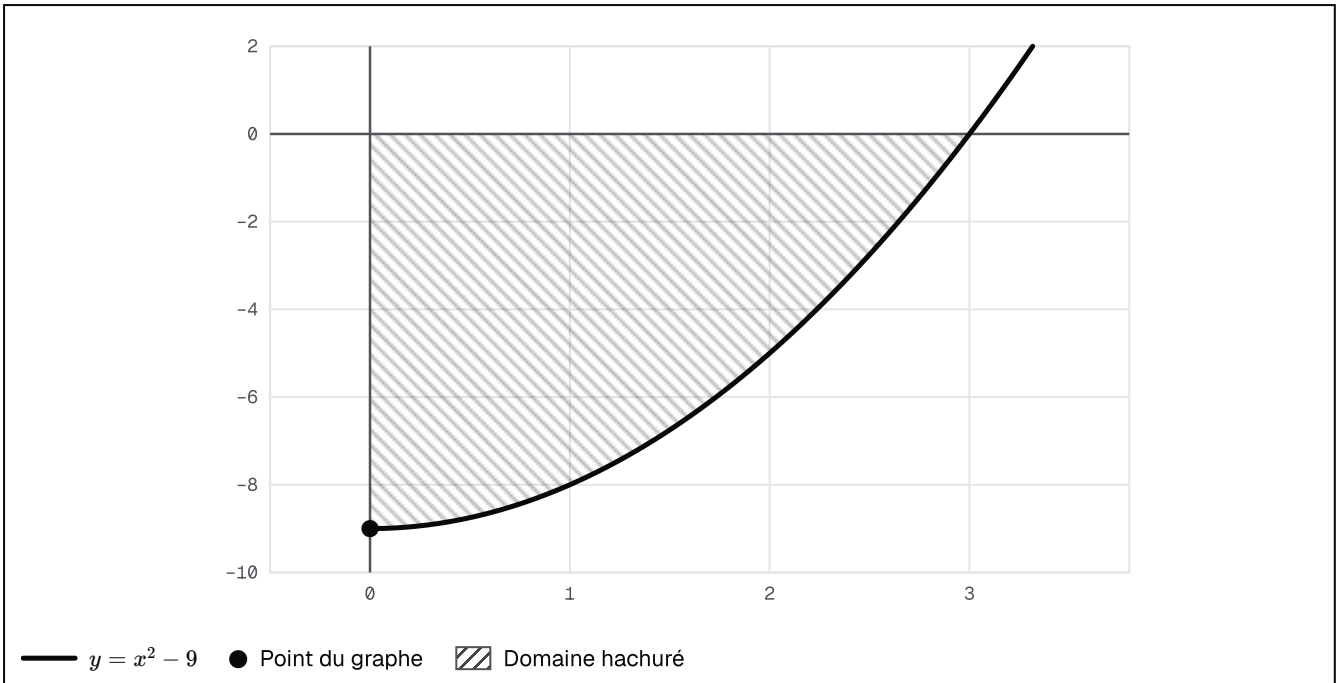
Correction

La fonction est négative sur $[0;3]$: l'intégrale n'est pas une aire.

Le domaine est le symétrique de celui situé sous la courbe de $x \mapsto 9 - x^2$, qui est positive. Or :

$$\int_0^3 (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 27 - 9 = 18.$$

Le domaine a donc pour aire 18 u.a. La règle générale arrive dans la section sur le calcul d'aires.



Sur [0 ; 3], la courbe de x ↦ x² - 9 reste sous l'axe des abscisses : le domaine hachuré est situé en dessous.

Quand la fonction change de signe

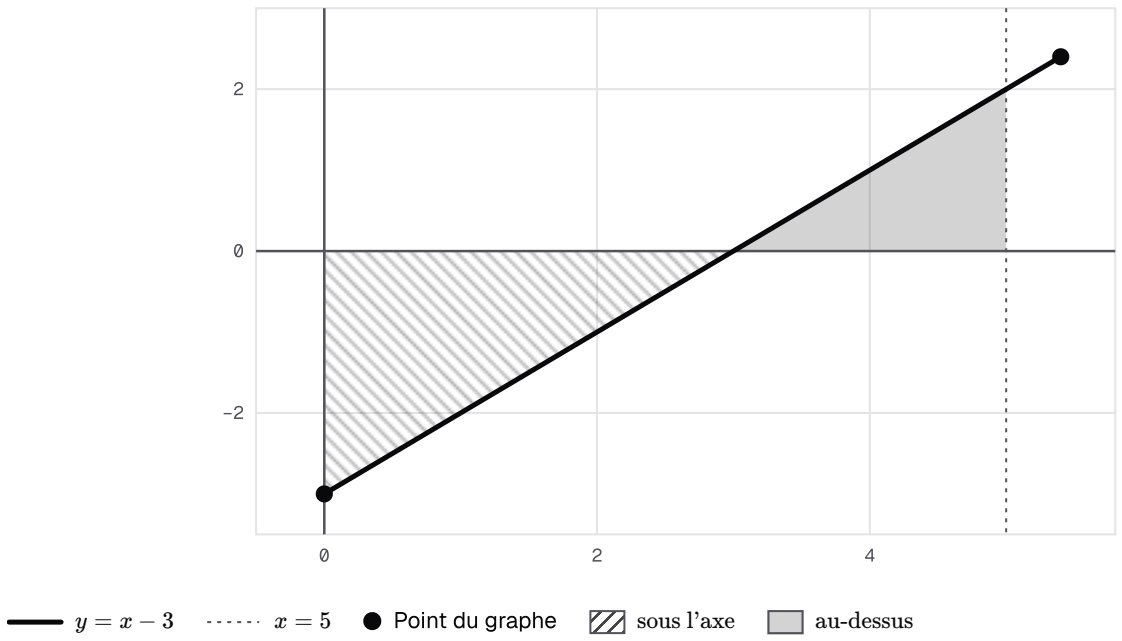
Attention : une intégrale n'est pas toujours une aire

✗ « Le domaine limité par la droite d'équation $y = x - 3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$ a pour aire $\int_0^5 (x-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}$. »

✓ La fonction change de signe en 3. Le domaine est formé de deux triangles :

- sous l'axe, sur $[0;3]$, d'aire $\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$;
- au-dessus, sur $[3;5]$, d'aire $\frac{2 \times 2}{2} = 2$.

L'aire vaut $\frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$ u.a.



La droite y = x - 3 entre x = 0 et x = 5 : un triangle sous l'axe, hachuré, puis un triangle au-dessus, teinté.

En clair. L'intégrale compte positivement les parties au-dessus de l'axe, et négativement celles en dessous. Ici, $2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$: on retrouve l'intégrale.

Pour une aire, chaque partie compte positivement.

À toi : Deux calculs d'une même aire

Calcule de deux façons l'aire du domaine limité par la droite d'équation $y = 5 - x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. D'abord avec une figure, puis avec une intégrale. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule les ordonnées de la droite en $x = 1$ et en $x = 3$: le domaine est un trapèze.

Indice 2

Une primitive de $x \mapsto 5 - x$ est $x \mapsto 5x - \frac{x^2}{2}$.

Indice 3

Point délicat : avant d'écrire « aire = intégrale », vérifie que $5 - x \geq 0$ sur $[1; 3]$.

Réponse

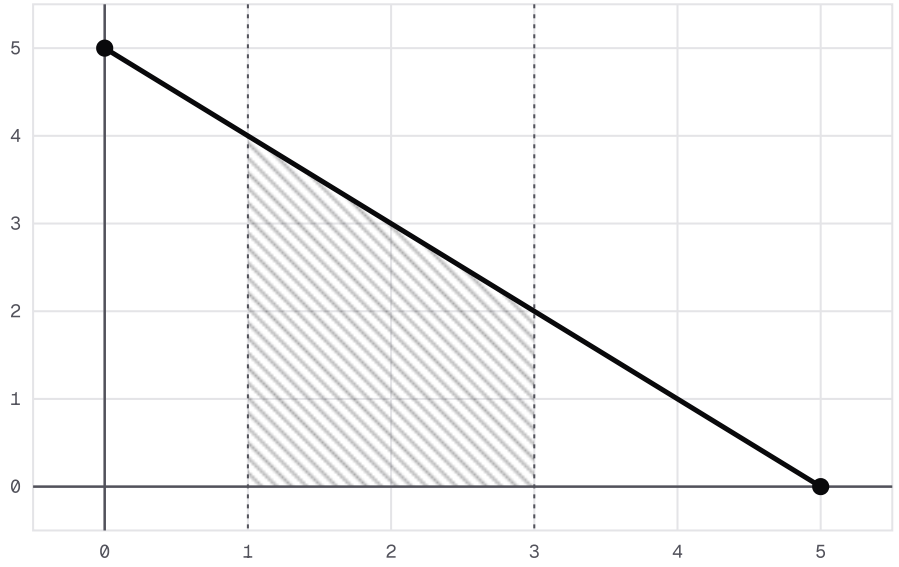
Pour tout x de $[1; 3]$, $5 - x \geq 2$: la fonction est positive.

Avec la figure. Les ordonnées valent 4 en $x = 1$ et 2 en $x = 3$. Le trapèze a pour aire $\frac{(4 + 2) \times 2}{2} = 6$ u.a.

Avec l'intégrale. Une primitive de $x \mapsto 5 - x$ est $x \mapsto 5x - \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (5-x)\,\mathrm{d}x &= \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 \\ &= \left(15 - \frac{9}{2}\right) \\ &\quad - \left(5 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 6.\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux calculs donnent une aire de 6 u.a.



Le domaine de l'exercice : sous la droite y = 5 - x, entre les droites verticales x = 1 et x = 3.

À retenir

Si f est positive sur $[a;b]$, avec $a<b$, l'intégrale de a à b est l'aire sous la courbe, en u.a.

Sinon, l'intégrale fait un bilan : les parties situées sous l'axe y comptent négativement.

Relation de Chasles et linéarité

Un tarif à deux tranches

Une coopérative fictive vend de l'eau d'irrigation. Le **prix marginal** du mètre cube, en dirhams, dépend de la quantité x déjà achetée :

$$p(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 3x - 9 & \text{si } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

Au-delà de 4 m³, chaque mètre cube coûte de plus en plus cher. La fonction p est continue sur $[0;6]$: en 4, les deux formules donnent 3.

Le montant des 6 premiers mètres cubes est $\int_0^6 p(x)\,\mathrm{d}x$.

Devine : Le montant à payer

Combien coûtent les 6 premiers mètres cubes ?

A. 18 dirhams, tout au prix de la première tranche.

Faux.

Tu factures tout au prix 3, alors que la seconde tranche coûte plus cher.

B. 30 dirhams, la seconde tranche au prix 9.

Faux.

Le prix 9 n'est atteint qu'au sixième mètre cube : la seconde tranche coûte moins.

C. 24 dirhams, en calculant tranche par tranche.

Juste.

Juste : 12 dirhams pour la première tranche, et 12 pour la seconde.

D. 54 dirhams, tout au prix final 9.

Faux.

Le prix 9 n'est atteint qu'à la fin : ce calcul surestime beaucoup.

Correction

La formule change en 4 : d'après la relation de Chasles, on coupe l'intégrale en ce point.

Première tranche. $\int_0^4 3\,\mathrm{d}x = 3 \times 4 = 12$.

Seconde tranche. On intègre la seconde formule, qui vaut aussi 3 en 4 :

$$\begin{aligned}&\int_4^6 (3x-9)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - 9x\right]_4^6\\ &= (54-54) - (24-36)\\ &= 12.\end{aligned}$$

Conclusion. Les 6 premiers mètres cubes coûtent $12 + 12 = 24$ dirhams.

Relation de Chasles

En clair. Pour le tarif, on a coupé $[0;6]$ en 4, puis additionné les deux morceaux.

Pourquoi est-ce vrai ? Avec une primitive F, les deux morceaux valent $F(4) - F(0)$ et $F(6) - F(4)$. Leur somme vaut $F(6) - F(0)$.

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. Par définition de l'intégrale, $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(c)$.

Étape 2. En additionnant, $F(c)$ disparaît : la somme vaut $F(b) - F(a)$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit les deux intégrales avec la **même primitive** F. Dans la somme, la valeur au point de coupure apparaît une fois avec le signe plus, une fois avec le signe moins : elle s'élimine. Le point c n'a donc pas besoin d'être entre a et b.

Vérifie : Le terme qui disparaît

Dans la preuve de la relation de Chasles, on additionne $F(c) - F(a)$ et $F(b) - F(c)$. Quel terme s'élimine ?

A. Le terme $F(a)$.

Faux.
Il reste dans le résultat $F(b) - F(a)$.

B. Aucun terme : on garde les quatre.

Faux.
La somme se simplifie : un terme apparaît deux fois, avec des signes contraires.

C. Le terme $F(b)$.

Faux.
Il reste dans le résultat.

D. Le terme $F(c)$.

Juste.
Juste : il apparaît avec les deux signes.

Correction

On additionne les deux différences :

$$\begin{aligned} &F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Le terme $F(c)$ disparaît : il reste l'intégrale de a à b.

Exemple : couper, même hors de l'intervalle

Retrouver un morceau. Une fonction g continue sur $[0;5]$ vérifie $\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 7$ et $\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. D'après la relation de Chasles, $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4$.

Couper hors de l'intervalle. Le point de coupure peut sortir de l'intervalle. Avec le point 2 :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^1 3x^2\,\mathrm{d}x\\ &= 8 + (1-8) = 1.\end{aligned}$$

Linéarité

En clair. Si la coopérative ajoute une taxe de 1 dirham par mètre cube, le prix marginal devient $p(x)+1$. Le montant augmente de $\int_0^6 1\,\mathrm{d}x = 6$ dirhams : on intègre chaque terme à part.

Pourquoi est-ce vrai ? Une somme de primitives est une primitive de la somme.

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I, et α un réel. Alors

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Soit F et G des primitives de f et g sur I. D'après les opérations sur les dérivées, $(F+G)' = f+g$ et $(\alpha F)' = \alpha f$: $F+G$ est une primitive de $f+g$, et αF une primitive de αf.

Étape 2. Par définition de l'intégrale, $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \big(F(b)+G(b)\big) - \big(F(a)+G(a)\big) = \big(F(b)-F(a)\big) + \big(G(b)-G(a)\big)$, qui est la somme des deux intégrales.

Étape 3. De même, $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha\big(F(b)-F(a)\big)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur les **opérations sur les dérivées** : $F+G$ est une primitive de $f+g$, et αF une primitive de αf. On regroupe ensuite les termes de la différence. Rien de tel n'existe pour un produit de deux fonctions.

Vérifie : Une primitive de la somme

Dans la preuve de la linéarité, quelle primitive de $f+g$ utilise-t-on ?

A. La fonction $F+G$.

Juste.

Juste : sa dérivée est $F'+G'=f+g$.

B. La fonction $F\times G$.

Faux.

Sa dérivée est $F'G+FG'$, pas $f+g$.

C. La fonction F seule.

Faux.

Sa dérivée est f seulement.

D. La fonction $f+g$.

Faux.

C'est la fonction à intégrer, pas une primitive.

Correction

D'après les opérations sur les dérivées, $(F+G)'=F'+G'=f+g$: $F+G$ est une primitive de $f+g$. On applique la définition de l'intégrale avec cette primitive, puis on regroupe.

Exemple : un calcul par combinaison

On pose $I=\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^1 \dfrac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

La somme. Par linéarité :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

L'intégrale I. La fonction de I est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u : x\mapsto e^x+1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\begin{aligned} I &= \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 \\ &= \ln(e+1)-\ln 2. \end{aligned}$$

L'intégrale J. On en déduit $J=1-I=1-\ln(e+1)+\ln 2$, sans chercher de primitive pour J.

Une valeur absolue

Méthode : une valeur absolue ou une fonction par morceaux

1. **Chercher les points de coupure** : là où l'expression dans la valeur absolue change de signe, ou là où la formule change.
2. **Couper** l'intégrale en ces points avec la relation de Chasles. Sur chaque morceau, écrire la fonction sans valeur absolue.
3. **Calculer** chaque intégrale, puis faire la somme.

Exemple : $x+1 \leq 0$ sur $[-3;-1]$ et $x+1 \geq 0$ sur $[-1;1]$, donc :

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^{1} |x+1| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{-1} (-x-1) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-1}^{1} (x+1) \, \mathrm{d}x \\ &= 2+2 = 4.\end{aligned}$$

Attention : la valeur absolue ne sort pas de l'intégrale

✗ « $\int_{-2}^{2} |x^3| \, \mathrm{d}x = \left| \int_{-2}^{2} x^3 \, \mathrm{d}x \right| = 0.$ »

✓ La valeur absolue ne sort pas de l'intégrale. On coupe en 0, là où x^3 change de signe :

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} |x^3| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} (-x^3) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{0}^{2} x^3 \, \mathrm{d}x \\ &= 4+4 = 8.\end{aligned}$$

Dans le calcul fautif, le 0 vient de deux morceaux qui se compensent : $-4+4$.

À toi : Une valeur absolue

Calcule $\int_0^4 |x-3| \, \mathrm{d}x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Cherche où $x-3$ change de signe, puis coupe l'intégrale en ce point.

Indice 2

Sur $[0;3]$, $|x-3| = 3-x$; sur $[3;4]$, $|x-3| = x-3$.

Indice 3

Point délicat : chaque morceau doit donner un nombre positif ; sinon, revois le signe.

Réponse

Pour tout x de $[0;3]$, $x-3 \leq 0$, donc $|x-3| = 3-x$. Pour tout x de $[3;4]$, $x-3 \geq 0$, donc $|x-3| = x-3$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\int_0^4 |x-3|\,\mathrm{d}x\\&= \int_0^3 (3-x)\,\mathrm{d}x\\&\quad + \int_3^4 (x-3)\,\mathrm{d}x\\&= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.\end{aligned}$$

Ordre et encadrement

Comparer sans tout calculer

Devine : Deux intégrales à comparer

Sans calcul, laquelle des intégrales $A = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ et $B = \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x$ est la plus grande ?

A. L'intégrale B, car l'exposant 5 dépasse 3.

Faux.

Sur $[0;1]$, une puissance plus grande donne un nombre plus petit ou égal : $0{,}5^5 < 0{,}5^3$.

B. L'intégrale A, car $x^5 \leq x^3$ sur $[0;1]$.

Juste.

Juste : la fonction de A est au-dessus de celle de B.

C. Elles sont égales, car les bornes sont les mêmes.

Faux.

Les bornes sont les mêmes, mais les fonctions diffèrent.

D. On ne peut rien dire sans les calculer.

Faux.

Comparer les fonctions suffit, comme tu vas le voir.

Correction

Pour tout x de $[0;1]$, $x^3 - x^5 = x^3(1-x^2)$, avec $x^3 \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$. Donc $x^5 \leq x^3$.

Le calcul le confirme : $A = \dfrac{1}{4}$ et $B = \dfrac{1}{6}$, avec $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{4}$.

En clair. Si une fonction est en dessous d'une autre sur $[a;b]$, son intégrale est plus petite. On compare ainsi des intégrales sans les calculer. Une seule précaution : les bornes doivent être dans l'ordre croissant, $a \leq b$.

Positivité et comparaison

Pourquoi est-ce vrai ? Si f est positive sur $[a;b]$, une primitive F a une dérivée positive : elle est croissante. Avec $a \leq b$, on a donc $F(a) \leq F(b)$, c'est-à-dire une intégrale positive.

La comparaison s'en déduit avec la fonction $g - f$.

Propriété : Positivité et comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, avec $a \leq b$.

- **Positivité** : si $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- **Comparaison** : si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

L'hypothèse $a \leq b$ est indispensable : les bornes doivent être dans l'ordre croissant.

Démonstration

Étape 1. Positivité. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. Sa dérivée $F' = f$ est positive sur $[a;b]$, donc F est croissante sur $[a;b]$ (signe de la dérivée et variations).

Étape 2. Comme $a \leq b$ et F est croissante, $F(a) \leq F(b)$: par définition de l'intégrale, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geq 0$.

Étape 3. Comparaison. La fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a;b]$. D'après l'étape 2, $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Par linéarité, cette intégrale vaut $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où l'inégalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées. D'abord, une intégrale positive vient d'une primitive **croissante**, grâce au signe de la dérivée. Ensuite, pour comparer f et g, on étudie la différence $g - f$. On se ramène ainsi à la positivité, puis la linéarité sépare les deux intégrales.

Vérifie : Si les bornes étaient rangées à l'envers

Retire l'hypothèse $a \leq b$ de la preuve de la positivité. Quel passage ne tient plus ?

A. Affirmer que F est dérivable.
Faux.
Toute primitive est dérivable : les bornes n'y sont pour rien.

B. Tirer $F(a) \leq F(b)$ du sens de variation de F.
Juste.
Juste : la croissance range $F(a)$ et $F(b)$ comme a et b. Avec $b < a$, elle donnerait $F(b) \leq F(a)$.

C. Affirmer que f est continue.
Faux.
C'est une hypothèse de l'énoncé, posée sans lien avec les bornes.

D. Séparer deux intégrales par linéarité.

Faux.
La linéarité vaut quelles que soient les bornes.

Correction
Le signe de f rend F croissante, et cela ne dépend pas des bornes.

Ce qui en dépend, c'est la lecture : de a vers b, une fonction croissante ne redescend jamais, d'où $F(b) - F(a) \geq 0$. Si $b < a$, la même fonction donne $F(b) \leq F(a)$, et l'intégrale est négative ou nulle.

Exemple : majorer sans calculer

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$ (chapitre du logarithme). Les deux fonctions sont continues sur $[1;3]$, et les bornes vérifient $1 \leq 3$. D'après la propriété de comparaison :

$$\int_1^3 \ln x \, \mathrm{d}x \leq \int_1^3 (x-1) \, \mathrm{d}x.$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x-1) \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

On majore donc l'intégrale de $\ln x$ par 2, sans en connaître de primitive.

Encadrer une intégrale

En clair. Sur $[4;6]$, le prix marginal de l'eau reste entre 3 et 9 dirhams. Le montant de cette tranche est donc entre $3 \times 2 = 6$ et $9 \times 2 = 18$ dirhams.

Pourquoi est-ce vrai ? On compare la fonction à deux fonctions constantes, dont les intégrales se calculent tout de suite.

Propriété : Encadrement d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a \leq b$, et m et M deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de $[a;b]$. Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Démonstration

Étape 1. La fonction constante $x \mapsto m$ a pour primitive $x \mapsto mx$. Par définition de l'intégrale, $\int_a^b m \,\mathrm{d}x = mb - ma = m(b-a)$. De même, $\int_a^b M \,\mathrm{d}x = M(b-a)$.

Étape 2. Comme $a \leq b$ et $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a;b]$, la propriété de comparaison donne $\int_a^b m \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M \,\mathrm{d}x$.

Étape 3. On remplace les deux intégrales extrêmes par leurs valeurs de l'étape 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'encadrement est un cas particulier de la **comparaison** : on compare f aux fonctions constantes m et M. L'intégrale de la constante m sur $[a;b]$ vaut $m(b-a)$. L'hypothèse $a \leq b$ vient de la comparaison.

Vérifie : L'intégrale d'une constante

Dans la preuve de l'encadrement, que vaut $\int_a^b m \,\mathrm{d}x$?

A. m

Faux.
Il manque la longueur de l'intervalle : une primitive de $x \mapsto m$ est $x \mapsto mx$.

B. $m(a-b)$

Faux.
C'est l'opposé : on calcule la valeur en b moins la valeur en a.

C. 0

Faux.
Seule une constante nulle, ou des bornes égales, donnent 0.

D. $m(b-a)$

Juste.
Juste : $mb - ma = m(b-a)$.

Correction
Une primitive de $x \mapsto m$ est $x \mapsto mx$. Par définition, $\int_a^b m \,\mathrm{d}x = mb - ma = m(b-a)$.

Exemple : encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

Soit $K = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^3} \,\mathrm{d}x$.

Encadrer la fonction. Pour tout x de $[0;1]$, $1 \leq 1 + x^3 \leq 2$. La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1.$$

Intégrer. La fonction est continue sur $[0;1]$, et $b-a=1$. L'encadrement d'une intégrale donne $\frac{1}{2} \leq K \leq 1$.

La calculatrice affiche $K \approx 0{,}836$.

Méthode, piège et à toi

Méthode : encadrer ou comparer des intégrales

1. **Encadrer la fonction** sur $[a;b]$: avec ses variations, ou avec une inégalité connue sur e^x ou sur $\ln x$.
2. **Contrôler l'ordre des bornes** : il faut $a \leq b$.
3. **Intégrer l'encadrement** grâce à la comparaison, puis calculer les intégrales des deux fonctions qui encadrent.

Attention : l'ordre des bornes

✗ « Sur $[0;1]$, $x^3 \geq 0$, donc $\int_1^0 x^3\,\mathrm{d}x \geq 0$. »

✓ Les bornes sont dans l'ordre décroissant : la positivité ne s'applique pas. En fait, $\int_1^0 x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$.

Échange d'abord les bornes, puis intègre l'inégalité.

À toi : Encadrer avec une puissance

Soit $J = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x$. Montre que $\frac{1}{8} \leq J \leq \frac{1}{4}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Encadre d'abord $x+1$ sur $[0;1]$, puis son inverse.
Indice 2
Multiplie l'encadrement de l'inverse par x^3, puis intègre chaque membre de 0 à 1.
Indice 3
Point délicat : multiplier par x^3 conserve le sens, car $x^3 \geq 0$ sur $[0;1]$. Les bornes vérifient bien $0 \leq 1$.

Réponse
Encadrer la fonction. Pour tout x de $[0;1]$, $1 \leq x+1 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$. On multiplie par x^3, qui est positif :

$$\frac{x^3}{2} \leq \frac{x^3}{x+1} \leq x^3.$$

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0;1]$, et $0 \leq 1$. La comparaison donne :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x \le J \le \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$ et $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Conclusion. $\frac{1}{8} \le J \le \frac{1}{4}$.

Valeur moyenne

Un prix qui varie

Le prix d'une matière première fictive, en dirhams par kilogramme, suit sur trois mois le modèle $p(t) = 3t^2 - 9t + 15$. Ici, t est le temps en mois, avec $t \in [0;3]$ (données fictives).

Le prix vaut 15 au départ, baisse, puis remonte à 15 au bout de trois mois. Un acheteur s'approvisionne sans interruption : quel prix moyen paie-t-il ?

Devine : Le prix moyen

Le prix le plus bas, $8{,}25$ dirhams, est atteint en $t = 1{,}5$. Selon toi, où se situe le prix moyen sur les trois mois ?

A. Il est égal à 15 dirhams.

Faux.
Entre le début et la fin, le prix reste sous 15 dirhams : la moyenne ne peut pas atteindre 15.

B. Il est inférieur ou égal à $8{,}25$ dirhams.

Faux.
Le prix ne descend jamais sous $8{,}25$, et il ne reste pas à ce niveau : la moyenne est au-dessus.

C. Il est strictement entre $8{,}25$ et 15 dirhams.

Juste.
Juste : le prix moyen tient compte de tous les instants, pas seulement des bornes ou du creux.

Correction

Le prix moyen tient compte de tous les instants. On l'obtient en divisant l'intégrale par la durée 3 :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\int_0^3 (3t^2 - 9t + 15)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 15t\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{63}{2} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Le prix moyen vaut $10{,}5$ dirhams par kilogramme.

En clair. Sur une durée $b - a$, la moyenne d'une grandeur qui varie est son intégrale divisée par la durée. C'est la version continue de « la somme divisée par le nombre de valeurs ».

La définition

Définition : Valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le réel

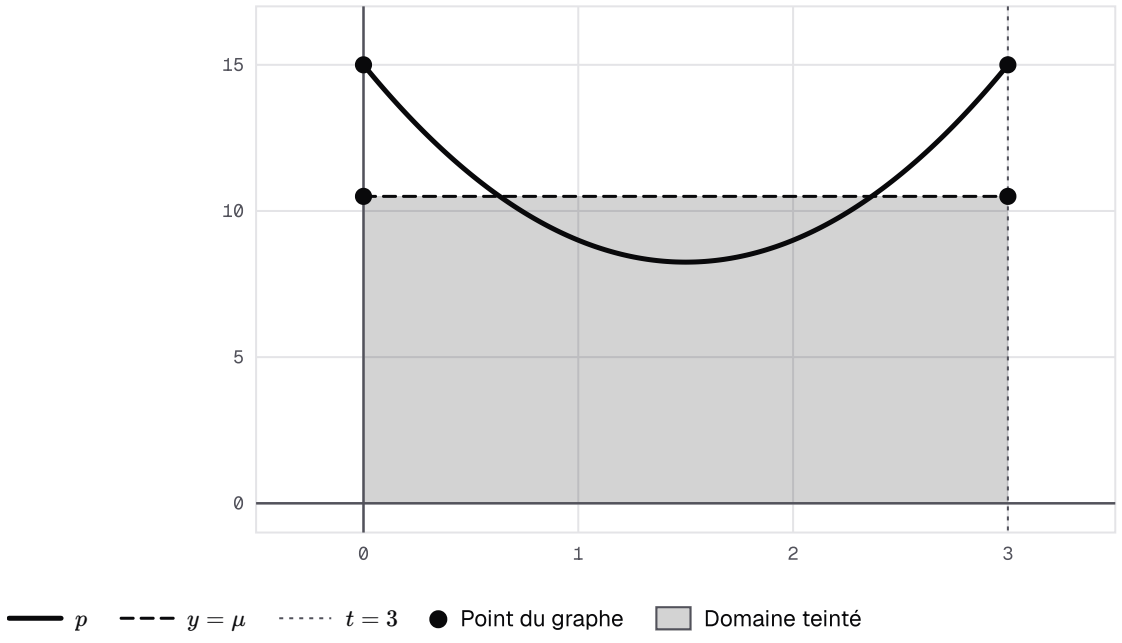
$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque f est positive, le rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe de f entre a et b.

Exemple : le rectangle de même aire

Pour le prix p, l'intégrale vaut $\frac{63}{2}$ et la durée vaut 3. Le rectangle de base $[0; 3]$ et de hauteur $\mu = \frac{21}{2}$ a pour aire $3 \times \frac{21}{2} = \frac{63}{2}$ u.a. : la même que le domaine sous la courbe.

Dessine-le. La courbe passe au-dessus du rectangle près des bords, et en dessous au milieu.



Le prix p sur trois mois et le rectangle teinté de hauteur 21/2 : même aire que le domaine sous la courbe.

Vérifie : L'unité d'une valeur moyenne

Un coût marginal s'exprime en dirhams par unité produite. Dans quelle unité s'exprime sa valeur moyenne sur $[a;b]$?

A. En dirhams, comme un coût total.

Faux.

C'est l'unité de l'intégrale, avant la division par $b-a$.

B. En dirhams par unité, comme lui.

Juste.

Juste : on divise une intégrale par la longueur $b-a$, ce qui redonne l'unité de la fonction.

C. En unités d'aire, comme une intégrale.

Faux.

La valeur moyenne est une hauteur de rectangle, pas une aire.

Correction

L'intégrale du coût marginal est un coût, en dirhams. On la divise par un nombre d'unités, $b-a$. La valeur moyenne s'exprime donc en dirhams par unité, comme le coût marginal.

La valeur moyenne est atteinte

En clair. Le prix moyen $10{,}5$ est compris entre le prix minimal $8{,}25$ et le prix maximal 15.

Pourquoi est-ce vrai ? On encadre la fonction entre son minimum et son maximum, puis on intègre cet encadrement.

Propriété : La valeur moyenne est atteinte

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, et μ sa valeur moyenne sur $[a;b]$. Si m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a;b]$, alors $m\leq\mu\leq M$, et il existe au moins un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=\mu$.

Démonstration

Étape 1. La fonction f est continue sur le segment $[a;b]$: l'image de ce segment est un segment $[m;M]$ (admis au chapitre de la continuité), donc $m\leq f(x)\leq M$ pour tout x de $[a;b]$.

Étape 2. D'après l'encadrement d'une intégrale, $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq M(b-a)$. Comme $b-a>0$, on divise par $b-a$ sans changer le sens : $m\leq\mu\leq M$.

Étape 3. Le réel μ appartient donc à $[m;M]$, qui est l'image de $[a;b]$ par f : il existe au moins un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=\mu$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois outils s'enchaînent :

- l'**image d'un segment** par une fonction continue donne m et M ;
- l'**encadrement d'une intégrale** donne $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$;
- on divise enfin par $b-a>0$.

Le réel μ est alors dans l'image $[m;M]$: il est atteint.

Vérifie : Diviser sans changer le sens

Dans la preuve, on divise l'encadrement par $b-a$. Pourquoi le sens des inégalités ne change-t-il pas ?

A. Parce que f est continue.

Faux.
La continuité sert à obtenir m et M, pas à diviser.

B. Parce que $b-a>0$.

Juste.
Juste : l'hypothèse $a<b$ le garantit.

C. Parce que μ est positif.

Faux.
Le signe de μ ne joue aucun rôle : seul compte le signe du diviseur.

D. Parce qu'une division ne change rien.

Faux.
Diviser par un nombre négatif change le sens.

Correction
L'hypothèse $a<b$ donne $b-a>0$. Diviser par un réel strictement positif conserve le sens : $m \leq \mu \leq M$.

Exemple : un prix moyen atteint deux fois

On cherche les instants t de $[0;3]$ où $p(t)=\dfrac{21}{2}$. L'équation s'écrit $3t^2-9t+\dfrac{9}{2}=0$, soit, en divisant par 3 :

$$t^2-3t+\frac{3}{2}=0.$$

Le discriminant vaut $9-6=3$. Les solutions sont :

- $t_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}63$;
- $t_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}37$.

Elles sont toutes deux dans $[0;3]$. Le réel c de la propriété existe, mais il n'est pas toujours unique.

Méthode, piège et à toi

Méthode : calculer et interpréter une valeur moyenne

1. **Contrôler** que la fonction est continue sur $[a;b]$, avec $a<b$.
2. **Intégrer** la fonction de a à b.
3. **Diviser** par la longueur $b-a$, puis **interpréter** avec l'unité de la fonction : un prix moyen, un coût moyen.

Attention : la moyenne des valeurs aux bornes

✗ « La valeur moyenne de $x \mapsto 3\sqrt{x}$ sur $[0;1]$ vaut $\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}$. »

✓ On intègre, puis on divise par la longueur 1.

Une primitive. La fonction $x \mapsto 2x\sqrt{x}$ a pour dérivée $2\sqrt{x}+2x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=3\sqrt{x}$ sur $]0;1]$. En 0, le quotient $\dfrac{2x\sqrt{x}-0}{x-0}=2\sqrt{x}$ tend vers $0=3\sqrt{0}$. C'est donc une primitive de $x \mapsto 3\sqrt{x}$ sur $[0;1]$.

Le calcul.

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^1 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2x\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

La valeur moyenne vaut 2, et non $\dfrac{3}{2}$: les valeurs aux bornes ignorent tout ce qui se passe entre elles.

À toi : Un second modèle de prix

Sur un autre marché fictif, le prix de la matière première, en dirhams par kilogramme, suit le modèle $s(t)=5+3e^{-t}$ pour $t\in[0;1]$, en mois. Calcule le prix moyen sur ce mois, puis donne-en une valeur approchée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la définition avec $a=0$ et $b=1$: la longueur vaut 1.
Indice 2
Une primitive de $t \mapsto e^{-t}$ est $t \mapsto -e^{-t}$.
Indice 3
Point délicat : attention au signe devant $F(0)$; ici $-3e^{0}=-3$, et c'est ce nombre que tu retranches.

Réponse

La longueur de $[0;1]$ vaut 1. Une primitive de $t \mapsto 5+3e^{-t}$ est $t \mapsto 5t-3e^{-t}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^1 (5+3e^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= \left[5t-3e^{-t}\right]_0^1 \\ &= 5-3e^{-1}+3 \\ &= 8-\frac{3}{e}.\end{aligned}$$

Le prix moyen vaut environ $6{,}90$ dirhams par kilogramme. Il est bien compris entre le prix final $5+3e^{-1}\approx 6{,}10$ et le prix initial 8.

Le mot du prof. Une valeur moyenne se lit avec son unité : un prix moyen en dirhams par kilogramme, un coût moyen en dirhams par unité. Écris toujours la phrase de conclusion. Elle montre que tu as compris ce que tu as calculé.

Intégration par parties

L'intégrale d'un produit

Une entreprise fictive lance un nouvel article (données fictives). Quand elle en a déjà vendu x milliers, sa **recette marginale** vaut $R_m(x) = 3x\,e^x$, en milliers de dirhams par millier d'articles. La recette des mille premiers articles est donc $\int_0^1 3x\,e^x\,\mathrm{d}x$.

Cette fois, la fonction est un produit, et aucune forme connue ne donne sa primitive.

Devine : Un produit à intégrer

On cherche $\int_0^1 3x\,e^x\,\mathrm{d}x$. On sait que $\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$ et $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1$. L'intégrale cherchée vaut-elle le produit $\frac{3}{2}(e-1)$?

A. Oui, d'après la linéarité de l'intégrale.

Faux.
La linéarité permet de couper une somme ou de sortir une constante. Elle ne sépare jamais deux facteurs.

B. Oui, car les deux fonctions sont positives.

Faux.
Le signe ne change rien : l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

C. Non, ce produit n'est pas l'intégrale.

Juste.
Juste : l'intégrale vaut 3, et le produit environ $2{,}58$.

Correction
Non. Pour tout réel x, la dérivée de $x \mapsto (3x-3)e^x$ en x vaut $3e^x + (3x-3)e^x = 3x\,e^x$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 3x\,e^x\,\mathrm{d}x\\&= [(3x-3)e^x]_0^1\\&= 0-(-3)=3.\end{aligned}$$

Or $\frac{3}{2}(e-1)\approx 2{,}58$: le produit des intégrales n'est pas l'intégrale du produit. La recette des mille premiers articles vaut 3 milliers de dirhams.

Reste à trouver $(3x-3)e^x$ sans la deviner. La linéarité ne suffit pas : l'outil vient de la dérivée d'un produit, $(uv)'=u'v+uv'$. En l'intégrant, on échange l'intégrale de $u'v$ contre une autre, que l'on choisit plus simple.

La formule

Pourquoi est-ce vrai ? La fonction uv est une primitive de $u'v+uv'$. Par définition, l'intégrale de $u'v+uv'$ de a à b vaut donc $[u(x)\,v(x)]_a^b$. La linéarité sépare ensuite les deux termes.

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, et a et b deux réels de I. Alors

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la dérivée d'un produit, $(uv)'=u'v+uv'$ sur I. Cette fonction est continue, car u, v, u' et v' le sont : uv est une primitive de $u'v+uv'$ sur I.

Étape 2. Par définition de l'intégrale, $\int_a^b \big(u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b$.

Étape 3. Par linéarité, le membre de gauche vaut $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$. On isole la première intégrale, ce qui donne la formule.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La formule est la **dérivée d'un produit**, lue à l'envers puis intégrée. On isole ensuite l'intégrale de $u'v$ par linéarité. Les hypothèses comptent : u' et v' doivent être continues. Sinon, les intégrales ne sont pas définies dans ce chapitre.

Vérifie : Le point de départ

De quelle formule de dérivation part la preuve de l'intégration par parties ?

A. La dérivée d'une composée, $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Faux.

La preuve n'utilise aucune composée.

B. La dérivée d'un quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Faux.

Aucun quotient n'apparaît dans la formule.

C. La dérivée d'une somme, $(u + v)' = u' + v'$.

Faux.

Elle sert dans la linéarité, mais le point de départ est un produit.

D. La dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$.

Juste.

Juste : uv est une primitive de $u'v + uv'$.

Correction

D'après la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$: uv est une primitive de $u'v + uv'$. On intègre de a à b, puis on sépare les deux intégrales par linéarité.

Exemple : un polynôme fois une exponentielle

On calcule $\int_0^1 (3x+1)e^x \,\mathrm{d}x$.

Choix des facteurs. On pose $u' : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto 3x+1$. Alors $u : x \mapsto e^x$ et $v' : x \mapsto 3$: ces fonctions sont continues sur $[0;1]$.

Formule.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (3x+1)e^x \,\mathrm{d}x \\
&= [(3x+1)e^x]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 3e^x \,\mathrm{d}x \\
&= (4e-1) - 3(e-1) \\
&= e + 2.
\end{aligned}$$

Bien choisir les facteurs

Méthode : intégrer par parties

1. **Repérer le produit** et répartir les rôles. Le facteur v est celui que la dérivation simplifie : un polynôme, $\ln x$. Le facteur u' est celui dont tu connais une primitive : e^x, une puissance de x.
2. **Écrire** u et v', et contrôler qu'elles sont continues sur l'intervalle.

3. **Appliquer** la formule. Si l'intégrale restante est plus compliquée que celle de départ, échange les rôles.

Vérifie : Quel choix pour un logarithme ?

Pour calculer $\int_1^e 3x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ par parties, quel choix rend l'intégrale restante directement calculable, sans logarithme ?

A. $u' : x \mapsto 3x^2$ et $v : x \mapsto \ln x$.

Juste.

Juste : $u : x \mapsto x^3$ et $v' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, dont le produit vaut x^2.

B. $u' : x \mapsto \ln x$ et $v : x \mapsto 3x^2$.

Faux.

Il faut d'abord une primitive de $\ln x$, et l'intégrale restante contient encore $\ln x$.

C. $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto 3x^2 \ln x$.

Faux.

v' contient encore $\ln x$: l'intégrale restante fait réapparaître l'intégrale de départ. On ne conclut qu'en résolvant une équation, un détour inutile ici.

Correction

On choisit $u' : x \mapsto 3x^2$ et $v : x \mapsto \ln x$. Alors $u : x \mapsto x^3$ et $v' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. L'intégrale restante porte sur $x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2$: elle se calcule directement.

Exemple : un polynôme fois un logarithme

Avec ce choix, toutes les fonctions sont continues sur $[1; e]$, et :

$$\begin{aligned}
&\int_1^e 3x^2 \ln x \, \mathrm{d}x \\
&= \left[x^3 \ln x\right]_1^e - \int_1^e x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= e^3 - \frac{e^3 - 1}{3} \\
&= \frac{2e^3 + 1}{3}.
\end{aligned}$$

Exemple : le logarithme seul

Pour $\int_1^3 \ln x \, \mathrm{d}x$, on écrit $\ln x = 1 \times \ln x$. On choisit $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto \ln x$, donc $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Ces fonctions sont continues sur $[1; 3]$.

$$\begin{aligned}&\int_1^3 \ln x \,\mathrm{d}x\\&= [x\ln x]_1^3 - \int_1^3 1\,\mathrm{d}x\\&= 3\ln 3 - 2 \approx 1{,}30.\end{aligned}$$

Dans la section sur l'ordre, tu avais majoré cette intégrale par 2 : c'est cohérent.

Un piège, puis à toi

Attention : un produit ne s'intègre pas facteur par facteur

✗ « $\int_0^1 3x\,e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}(e-1)$. »

✓ On peut couper une somme ou sortir une constante, jamais séparer deux facteurs. Ici, l'intégration par parties donne 3, alors que $\dfrac{3}{2}(e-1) \approx 2{,}58$.

Devant un produit, cherche une forme composée connue ou intègre par parties.

À toi : À toi d'intégrer par parties

Calcule $\int_0^1 (5-x)e^x\,\mathrm{d}x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le polynôme $5-x$ se simplifie quand on le dérive : prends-le pour v.
Indice 2
Dérive $5-x$, et cherche une primitive de e^x : tu as alors les quatre fonctions de la formule.
Indice 3
Point délicat : la formule retranche $\int_0^1 -e^x\,\mathrm{d}x$; moins par moins donne plus.

Réponse
On pose $u' : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto 5-x$, d'où $u : x \mapsto e^x$ et $v' : x \mapsto -1$. Ces fonctions sont continues sur $[0;1]$.

La formule retranche $\int_0^1 e^x \times (-1)\,\mathrm{d}x$, d'où un signe plus :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (5-x)e^x\,\mathrm{d}x\\&= [(5-x)e^x]_0^1\\&\quad + \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\\&= (4e-5) + (e-1)\\&= 5e-6.\end{aligned}$$

Le mot du prof. L'intégration par parties tient en une ligne, mais tout se joue dans le choix de u' et de v. Écris ces quatre fonctions avant d'appliquer la formule. C'est la partie que le correcteur lit en premier.

Calcul d'aires

Quand la courbe passe sous l'axe

Une entreprise fictive produit q centaines d'articles (données fictives). En milliers de dirhams par centaine, sa recette marginale est $R_m(q) = 3q + 2$ et son coût marginal $C_m(q) = q^2 + 2$.

Sur $[1;3]$, la courbe de R_m passe au-dessus de celle de C_m : chaque centaine ajoutée rapporte plus qu'elle ne coûte. Sur $[3;5]$, c'est l'inverse.

Le **bénéfice** se lit dans l'écart entre les deux courbes. Une intégrale de cet écart fait le bilan des gains et des pertes ; une aire les additionne.

Ici, $C_m(q) - R_m(q) = q^2 - 3q$: on l'étudie avec la variable x.

Devine : Une intégrale et une aire

On donne $\int_1^5 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$. Sur $[1;5]$, la courbe de $x \mapsto x^2 - 3x$ passe sous l'axe des abscisses, puis au-dessus. Le domaine limité par cette courbe, l'axe et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ a-t-il une aire de $\dfrac{16}{3}$ u.a. ?

A. Oui, l'aire est égale à l'intégrale.

Faux.

Ce serait vrai pour une fonction positive. Ici, une partie du domaine est sous l'axe.

B. Non, l'aire est plus petite que $\dfrac{16}{3}$ u.a.

Faux.

Dans l'intégrale, la partie sous l'axe est retranchée. L'aire l'ajoute : elle est plus grande.

C. Non, l'aire est plus grande que $\dfrac{16}{3}$ u.a.

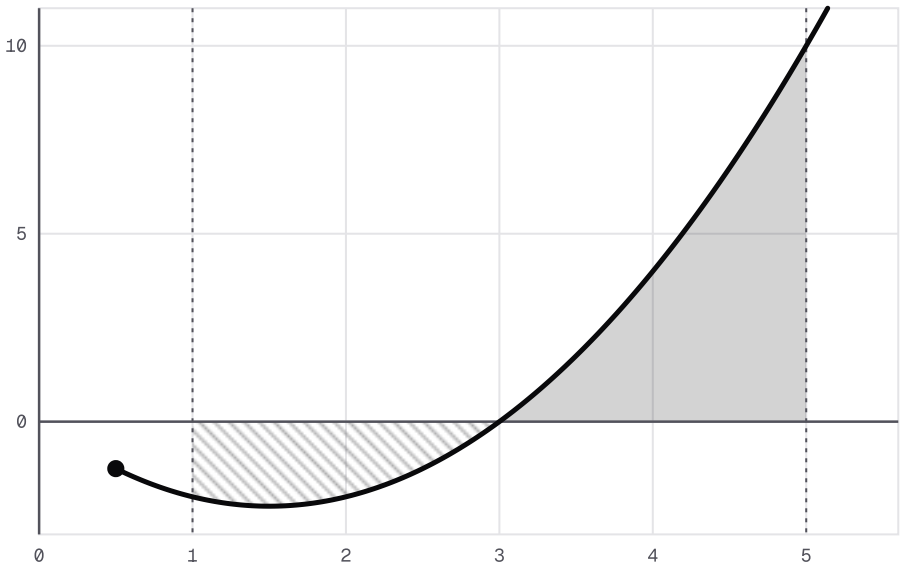
Juste.

Juste : l'aire compte positivement la partie sous l'axe.

Correction

L'intégrale fait un bilan : la partie sous l'axe y est comptée négativement. L'aire compte chaque partie positivement : elle est donc plus grande.

Étudier le signe d'abord. On factorise : $x^2 - 3x = x(x-3)$. Sur $[1;3]$, $x > 0$ et $x - 3 \leq 0$: la fonction est négative. Sur $[3;5]$, elle est positive. L'aire se calcule morceau par morceau, en changeant le signe de la partie négative. Tu vas trouver 12 u.a.



La courbe de x ↦ x² - 3x sur [1 ; 5] : sous l'axe jusqu'à 3, puis au-dessus ; les deux parties sont marquées différemment.

Aire entre une courbe et l'axe

Propriété : Aire entre une courbe et l'axe des abscisses

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$. L'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est

$$\mathcal{A}=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

En particulier, si f est **négative** sur $[a;b]$, alors $\mathcal{A}=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ u.a. Si f change de signe, on découpe $[a;b]$ aux points où f s'annule en changeant de signe.

Démonstration

Idée de la preuve. **Étape 1.** Si f est positive sur $[a;b]$, c'est l'aire sous la courbe, admise. **Étape 2.** Si f est négative, la courbe de $-f$ est la symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses ; on admet que cette symétrie conserve les aires, donc $\mathcal{A}=\int_a^b \big(-f(x)\big)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité. **Étape 3.** Si f change de signe, on découpe $[a;b]$ aux points, supposés en nombre fini, où elle s'annule ; on admet que l'aire du domaine est la somme des aires des morceaux, et la relation de Chasles regroupe les intégrales de $|f|$. Ce qui est omis : la conservation et l'additivité des aires, admises faute de définition de l'aire.

Remarque : Ce qui est admis

Cet énoncé est esquissé, pas démontré. On admet deux faits sur les aires : leur **conservation** par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, et leur **additivité** quand on découpe un domaine en morceaux. Avec ces deux faits, l'énoncé découle de l'aire sous une courbe positive.

Vérifie : Un logarithme sous l'axe

Par parties, on trouve $\int_{e^{-1}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{e} - 1$. Sur $[e^{-1}; 1]$, $\ln x \leq 0$. Quelle est l'aire du domaine limité par la courbe de $\ln$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$?

A. $1 - \dfrac{2}{e}$ u.a.

Juste.

Juste : la fonction est négative, l'aire est l'opposé de l'intégrale.

B. $\dfrac{2}{e} - 1$ u.a.

Faux.

Ce nombre est négatif, car $\dfrac{2}{e} < 1$: ce n'est pas une aire.

C. $1 + \dfrac{2}{e}$ u.a.

Faux.

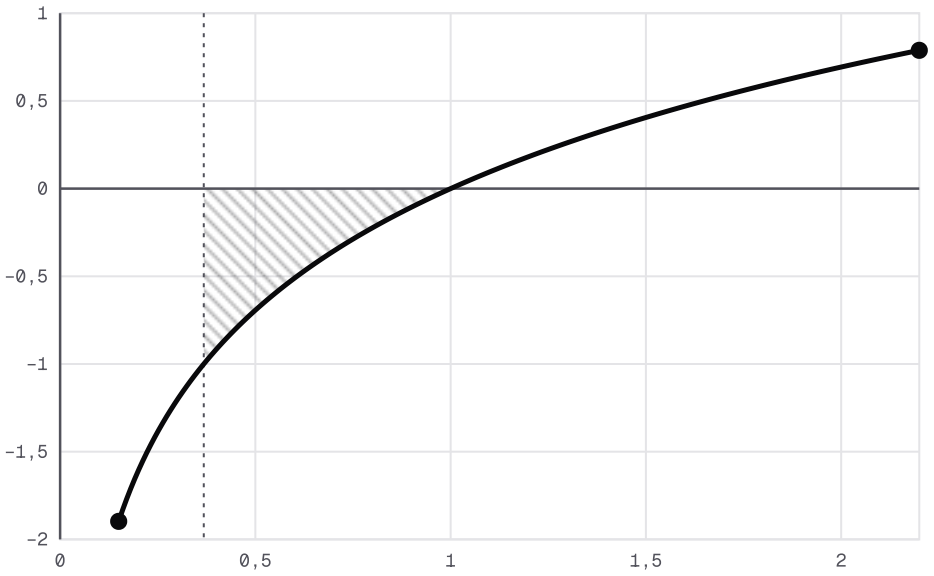
Tu as changé le signe d'un seul terme. C'est l'intégrale entière qui change de signe.

Correction

La fonction $\ln$ est négative sur $[e^{-1}; 1]$. D'après l'aire entre une courbe et l'axe :

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{2}{e} - 1\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

L'aire vaut $1 - \dfrac{2}{e}$ u.a., soit environ $0{,}26$ u.a.



Entre x = 1/e et x = 1, la courbe de ln est sous l'axe : le domaine hachuré est situé en dessous.

Exemple : l'aire de l'entrée

Pour $x \mapsto x^2 - 3x$ sur $[1;5]$, on coupe en 3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_1^3 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_3^5 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{10}{3} + \frac{26}{3} = 12.\end{aligned}$$

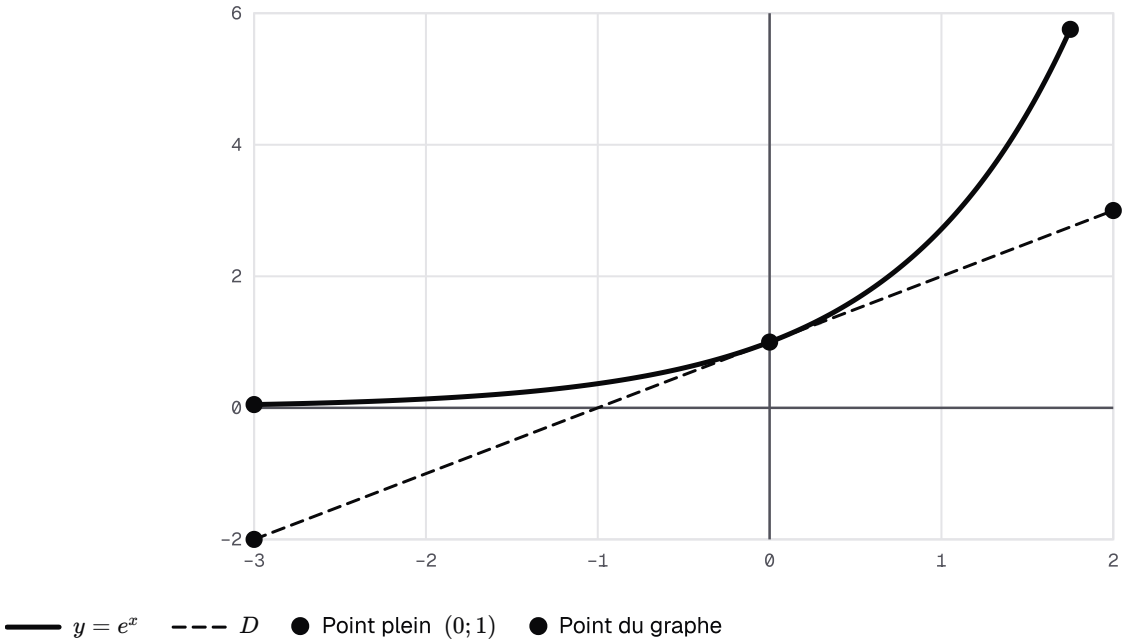
L'aire vaut 12 u.a., alors que l'intégrale vaut $\dfrac{26}{3} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{16}{3}$.

Aire entre deux courbes

La position relative d'abord. Compare la courbe de $\exp$ et la droite D d'équation $y = x + 1$. On étudie la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée $x \mapsto e^x - 1$ est négative sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$. Donc g a pour minimum $g(0) = 0$: pour tout réel x, $g(x) \geq 0$.

La courbe de $\exp$ est donc au-dessus de D.



La courbe de exp au-dessus de la droite D d'équation y = x + 1 ; elles se touchent au point (0 ; 1).

Propriété : Aire du domaine limité par deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, avec $a<b$, telles que $g(x)\leq f(x)$ pour tout x de $[a;b]$. L'aire du domaine limité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est

$$\mathcal{A}=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Dans le cas général, $\mathcal{A}=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$ u.a. : on découpe aux points où les courbes se coupent.

Démonstration

Idée de la preuve. **Étape 1.** Continue sur le segment $[a;b]$, g est minorée : on choisit un réel k tel que $g+k\geq 0$ sur $[a;b]$, et on admet qu'une translation verticale conserve les aires. **Étape 2.** Le domaine est celui sous la courbe de $f+k$, privé de celui sous la courbe de $g+k$: par l'aire sous la courbe, $\mathcal{A}=\int_a^b \big(f(x)+k\big)\,\mathrm{d}x-\int_a^b \big(g(x)+k\big)\,\mathrm{d}x$, et par linéarité les termes en k s'éliminent. **Étape 3.** En général, on découpe $[a;b]$ aux points, supposés en nombre fini, où les courbes se coupent : sur chaque morceau, $f-g$ garde un signe, on applique ce qui précède à (f,g) ou à (g,f), et la relation de Chasles regroupe les intégrales de $|f-g|$. Ce qui est omis : la conservation des aires par translation et leur additivité, admises.

Remarque : Ce qui est admis

Cet énoncé est lui aussi esquissé. On admet la **conservation** des aires par une translation verticale des deux courbes, et leur **additivité**. L'esquisse ramène alors le domaine à une différence de deux aires sous des courbes positives.

Vérifie : Quelle différence intégrer ?

Pour l'aire du domaine limité par la courbe de $\exp$, la droite D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$, quelle fonction intègre-t-on sur $[-1;1]$?

A. La fonction $x \mapsto (x+1) - e^x$.

Faux.

C'est le bas moins le haut : l'intégrale serait négative.

B. $x \mapsto e^x - (x+1)$, puis son opposée sur $[-1;0]$.

Faux.

La courbe et la droite se touchent en 0, mais la courbe reste au-dessus : le signe ne change pas.

C. La fonction $x \mapsto e^x - (x+1)$.

Juste.

Juste : la courbe est au-dessus de D sur tout l'intervalle.

Correction

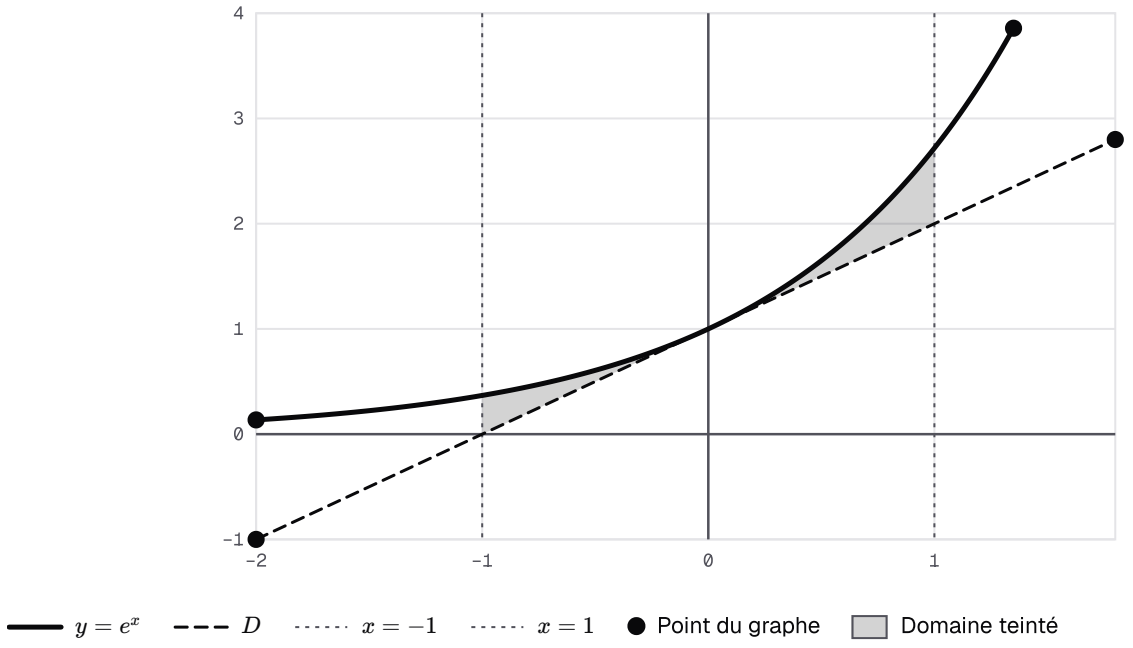
On a montré que $e^x - x - 1 \geq 0$ pour tout réel x. Sur $[-1;1]$, on intègre donc $x \mapsto e^x - (x+1)$, le haut moins le bas, sans découpage.

Exemple : le calcul de cette aire

La fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ est continue et positive sur $[-1;1]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^{1} (e^x - x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(e - \frac{3}{2}\right) - \left(e^{-1} + \frac{1}{2}\right) \\ &= e - e^{-1} - 2.\end{aligned}$$

L'aire vaut $e - e^{-1} - 2$ u.a., soit environ $0{,}35$ u.a.



Le domaine teinté entre la courbe de exp, au-dessus, et la droite D, de x = -1 à x = 1.

Méthode, unités, Coin examen

Méthode : calculer une aire en u.a., puis en cm²

1. **Étudier le signe** de $f(x)$ sur $[a;b]$, ou celui de $f(x) - g(x)$ pour deux courbes.
2. **Couper** $[a;b]$ là où ce signe change. Sur chaque morceau, intégrer la fonction rendue positive, puis additionner.
3. **Calculer** l'aire en u.a., puis **convertir** : 1 u.a. représente $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ cm², les normes étant en centimètres.

Exemple : passer aux centimètres carrés

- Avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm, 1 u.a. représente $0{,}5$ cm². L'aire de l'entrée, 12 u.a., vaut donc 6 cm².
- Avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, 1 u.a. représente 4 cm². L'aire entre la courbe de $\exp$ et D vaut $4(e - e^{-1} - 2)$ cm², soit environ $1{,}40$ cm².

Attention : une aire est positive et a une unité

✗ « Le domaine limité par la courbe de $x \mapsto x^2 - 3x$, l'axe et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ a pour aire $-\dfrac{10}{3}$. »

✓ Un résultat négatif signale un oubli de signe : l'aire vaut $\frac{10}{3}$ u.a.

Avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm, 1 u.a. représente 3 cm². L'aire vaut alors 10 cm².

À toi : Une aire entre une parabole et une droite

Calcule l'aire du domaine limité par la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ et la droite d'équation $y = 3x - 1$. Donne-la en u.a., puis en cm², avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3$ cm. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche les abscisses des points d'intersection : résous $x^2 + 1 = 3x - 1$.
Indice 2
Les solutions sont 1 et 2. Étudie le signe de $(3x - 1) - (x^2 + 1) = -x^2 + 3x - 2$ sur $[1; 2]$.
Indice 3
Point délicat : la droite est au-dessus sur $[1; 2]$. Intègre le haut moins le bas, puis multiplie par 9 cm².

Réponse
Points d'intersection. L'équation $x^2 + 1 = 3x - 1$ s'écrit $x^2 - 3x + 2 = 0$: ses solutions sont 1 et 2.

Position. Pour tout x de $[1; 2]$, $(3x - 1) - (x^2 + 1) = -(x - 1)(x - 2) \geq 0$: la droite est au-dessus.

Aire.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Conversion. Ici, 1 u.a. représente $3 \times 3 = 9$ cm².

Conclusion. L'aire vaut $\frac{1}{6}$ u.a., soit $\frac{9}{6} = 1{,}5$ cm².

Remarque : Coin examen : une aire dans un problème

Dans un problème de l'épreuve, on étudie la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 3 + \frac{3\ln x}{x}$, et la droite D d'équation $y = x - 3$. Le repère vérifie $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm.

On demande l'aire, en cm², de la région comprise entre C_f, la droite D et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Rédaction attendue :

« Pour tout x de $[1;e]$, $\ln x \geq 0$, donc $f(x)-(x-3)=\dfrac{3\ln x}{x}\geq 0$: C_f est au-dessus de D sur $[1;e]$. L'aire vaut $\int_1^e \dfrac{3\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\dfrac{3}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\dfrac{3}{2}$ u.a. Comme 1 u.a. représente 2 cm², l'aire vaut 3 cm². »

Chaque étape rapporte des points : le signe, l'intégrale, l'unité.

Suites d'intégrales

Une suite définie par des intégrales

Devine : Que devient l'intégrale ?

Dans un modèle fictif, le stock d'un article encore invendu après n semaines de promotion, en milliers d'unités, vaut $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{x+3}\,\mathrm{d}x$, pour tout entier naturel n. Quand n devient très grand, que devient I_n, selon toi ?

A. Le terme I_n tend vers $+\infty$.

Faux.

Sur $[0;1]$, $x^n\leq 1$: la fonction intégrée reste bornée, donc l'intégrale aussi.

B. Le terme I_n se rapproche de $\dfrac{1}{4}$.

Faux.

C'est la valeur de la fonction en $x=1$ seulement ; partout ailleurs, x^n s'écrase.

C. Le terme I_n ne dépend pas de n.

Faux.

La fonction intégrée change avec n : I_0 et I_1 diffèrent.

D. Le terme I_n se rapproche de 0.

Juste.

Juste : sur $[0;1[$, x^n devient très petit.

Correction

Sur $[0;1[$, x^n tend vers 0 quand n grandit, et le dénominateur reste entre 3 et 4. On s'attend donc à ce que I_n tende vers 0. La suite de la section le démontre par un encadrement.

Les premiers termes. Avec la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u : x\mapsto x+3$ est strictement positive sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \left[\ln(x+3)\right]_0^1 \\ &= \ln\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

soit $I_0\approx 0{,}288$.

Pour I_1, on écrit, pour tout x de $[0;1]$, $\dfrac{x}{x+3}=1-\dfrac{3}{x+3}$. Par linéarité, $I_1=1-3\ln\dfrac{4}{3}$, soit $I_1\approx 0{,}137$.

La suite semble décroissante.

Méthode : étudier une suite définie par des intégrales

1. **Sens de variation** : regrouper $I_{n+1} - I_n$ en une intégrale unique grâce à la linéarité. Avec des bornes rangées, le signe de la fonction sous l'intégrale donne celui de la différence.
2. **Encadrement** : encadrer la fonction sous l'intégrale, puis intégrer par comparaison.
3. **Limite** : conclure avec les théorèmes de comparaison des suites.

Sens de variation, encadrement, limite

Sens de variation. Pour tout entier naturel n, par linéarité :

$$\begin{aligned} &I_{n+1} - I_n \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+3}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Il reste à trouver le signe de la fonction sous l'intégrale, sur $[0;1]$.

Vérifie : Le signe de la différence

Sur $[0;1]$, quel est le signe de $\dfrac{x^n(x-1)}{x+3}$, et qu'en déduit-on ?

A. Positif : la suite (I_n) est croissante.

Faux.

Le facteur $x-1$ est négatif sur $[0;1]$.

B. Négatif ou nul : la suite (I_n) est décroissante.

Juste.

Juste : $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $x+3 > 0$.

C. Il dépend de la parité de n : on ne conclut pas.

Faux.

Sur $[0;1]$, $x \geq 0$, donc $x^n \geq 0$ quel que soit n.

Correction

Pour tout x de $[0;1]$, $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $x+3 > 0$: la fonction est négative ou nulle.

Les bornes vérifient $0 \leq 1$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ par positivité. La suite (I_n) est décroissante.

Exemple : l'encadrement et la limite

Pour tout x de $[0;1]$, $3 \leq x+3 \leq 4$. Comme $x^n \geq 0$, on en tire :

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{x+3} \leq \frac{x^n}{3}.$$

Or $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$, et les bornes vérifient $0 \leq 1$. La comparaison donne :

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

Les deux bornes tendent vers 0. D'après les théorèmes de comparaison, (I_n) converge vers 0.

Attention : un majorant seul ne donne pas la limite

✗ « $I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$ et $\frac{1}{3(n+1)}$ tend vers 0, donc (I_n) converge vers 0. »

✓ Il manque une minoration qui tend aussi vers 0. La suite constante égale à -1 vérifie elle aussi $-1 \leq \frac{1}{3(n+1)}$, sans tendre vers 0.

Écris les deux inégalités, ici $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n$ et $I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$, avant de conclure.

À toi : Une relation entre deux termes

Montre que, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$. Déduis-en I_1 à partir de $I_0 = \ln\frac{4}{3}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Regroupe $I_{n+1} + 3I_n$ en une seule intégrale par linéarité.

Indice 2

Les deux fonctions ont le même dénominateur : additionne les numérateurs, puis mets x^n en facteur.

Indice 3

Point délicat : pour $n = 0$, la relation donne $I_1 + 3I_0 = 1$; isole I_1 sans oublier le facteur 3.

Réponse

Soit n un entier naturel. Les deux fonctions ont le même dénominateur ; par linéarité :

$$\begin{aligned} & I_{n+1} + 3I_n \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + 3x^n}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+3)}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on obtient $I_1 + 3I_0 = 1$, donc $I_1 = 1 - 3I_0 = 1 - 3\ln\frac{4}{3}$. On retrouve la valeur calculée plus haut.

Coin examen et synthèse

Remarque : Coin examen : une suite d'intégrales guidée

À l'examen de fin d'année, une suite d'intégrales se traite par questions guidées. On te demande de « montrer que (I_n) est décroissante », puis de « montrer que $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$ », enfin d'« en déduire la limite ».

Rédaction attendue pour la dernière question :

« Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$. Or les deux bornes tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après les théorèmes de comparaison, (I_n) converge vers 0. »

Une question qui donne son résultat se rédige jusqu'à ce résultat, sans sauter d'étape.

Vérifie : La bonne conclusion

Un élève a montré que (I_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-il conclure, avant l'encadrement ?

A. La suite converge vers 0, car elle est minorée par 0.
Faux.
Un minorant n'est pas forcément la limite : il faut l'encadrement.

B. La suite tend vers $-\infty$, car elle décroît.
Faux.
Une suite décroissante et minorée ne peut pas tendre vers $-\infty$.

C. La suite converge, mais sa limite reste inconnue.
Juste.
Juste : une suite décroissante et minorée converge ; l'encadrement donne ensuite la limite.

Correction
Une suite décroissante et minorée converge (chapitre des suites). Le minorant 0 ne donne pas la limite. C'est l'encadrement $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$ qui prouve qu'elle vaut 0.

À retenir : le chapitre en six gestes

- **Calculer** : une primitive, un crochet, $F(b) - F(a)$.
- **Couper** : la relation de Chasles, pour une valeur absolue ou un tarif à tranches.
- **Comparer** : intégrer une inégalité, avec des bornes dans l'ordre croissant.
- **Moyenner** : diviser l'intégrale par $b - a$, et donner l'unité.
- **Intégrer par parties** : choisir u' et v, puis appliquer la formule.
- **Mesurer une aire** : étudier le signe, intégrer le haut moins le bas, convertir en cm².

Le mot du prof. Tu sais maintenant passer d'un coût marginal à un coût, d'un prix qui varie à un prix moyen, d'une courbe à une aire. Dans un problème, la question d'intégrale arrive à la fin de l'étude de fonction. Garde-lui du temps : elle se rédige en quelques lignes.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul intégral » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)