BURHAN

Calcul des probabilités : l'essentiel

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-des-probabilites/resume

Chapitre	Semestre
Calcul des probabilités	Semestre 2

Dénombrer : rappels de 1re année

Propriété : Principe multiplicatif

Une situation se décompose en k choix successifs. Si le premier choix peut se faire de n_1 façons, puis, quel que soit ce premier choix, le deuxième de n_2 façons, et ainsi de suite jusqu'au k-ième choix, qui peut se faire de n_k façons, alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

En particulier, le nombre de listes de p éléments, distincts ou non, choisis dans un ensemble à n éléments est n^p.

Propriété : Arrangements et permutations

Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

- Le nombre de listes de p éléments **distincts** choisis dans un ensemble à n éléments (arrangements de p éléments parmi n) est

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n-1) \times \cdots \\ &\quad \times (n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

- Le nombre de façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble (permutations) est $A_n^n = n!$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et, par convention, $0! = 1$.

Propriété : Combinaisons

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (combinaisons de p éléments parmi n) est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Pour $1 \leq p \leq n$, on a aussi $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$. On a $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$ et $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Listes de p éléments, avec répétition possible

$$n^p$$

Arrangements de p éléments parmi n

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinaisons de p éléments parmi n

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Permutations de n éléments

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Méthode : Choisir le modèle de dénombrement d'un tirage

1. **Lire** la façon de tirer : tous les objets à la fois, ou l'un après l'autre, avec ou sans remise.
2. **Tous à la fois** (tirage simultané) : l'ordre est sans importance et aucun objet ne se répète ; on compte avec C_n^p.
3. **L'un après l'autre sans remise** : l'ordre importe et aucun objet ne se répète ; on compte avec A_n^p.
4. **L'un après l'autre avec remise** : l'ordre importe et un objet peut revenir ; on compte avec n^p.
5. **Contrôler** le modèle sur un très petit cas, en écrivant toutes les issues.

Exemple

Une urne contient 11 boules numérotées de 1 à 11. On tire 2 boules.

- Tirage simultané : $C_{11}^2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$ tirages.
- Tirage successif sans remise : $A_{11}^2 = 11 \times 10 = 110$ tirages.
- Tirage successif avec remise : $11^2 = 121$ tirages.

On retrouve $A_{11}^2 = 2! \times C_{11}^2$: chaque paire de boules se range de $2! = 2$ façons.

Attention : Ordre et remise dans un tirage

Dans un tirage **simultané**, l'ordre n'existe pas : compter avec A_n^p compterait $p!$ fois chaque groupe. Dans un tirage **successif sans remise**, une boule tirée ne revient pas : compter avec n^p ajouterait des tirages impossibles. Pour une probabilité, l'univers et l'événement se comptent avec le **même** modèle.

Expérience aléatoire et événements

Définition : Expérience aléatoire, univers, événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.

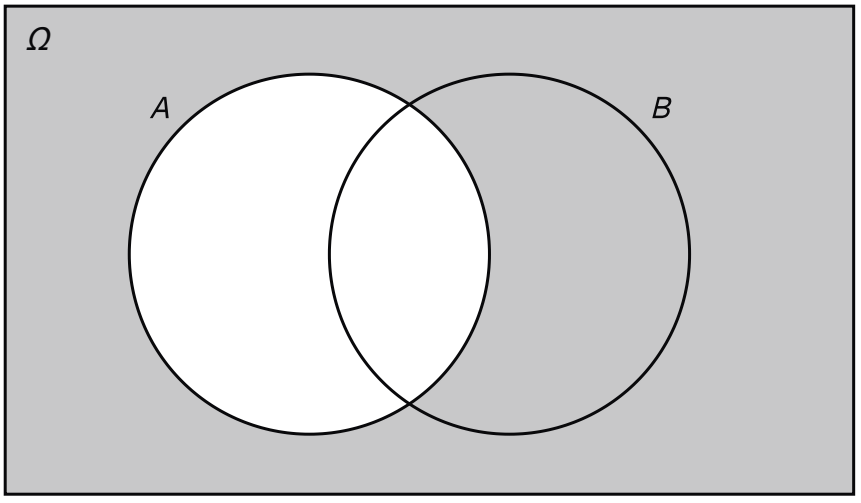
- Chaque résultat possible est une **issue** ; l'ensemble des issues est l'**univers**, noté Ω. Dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini.

- Un **événement** est une partie de Ω. L'événement A est **réalisé** lorsque l'issue obtenue appartient à A.
- Un événement formé d'une seule issue est un **événement élémentaire** ; Ω est l'**événement certain** ; l'ensemble vide $\varnothing$ est l'**événement impossible**.

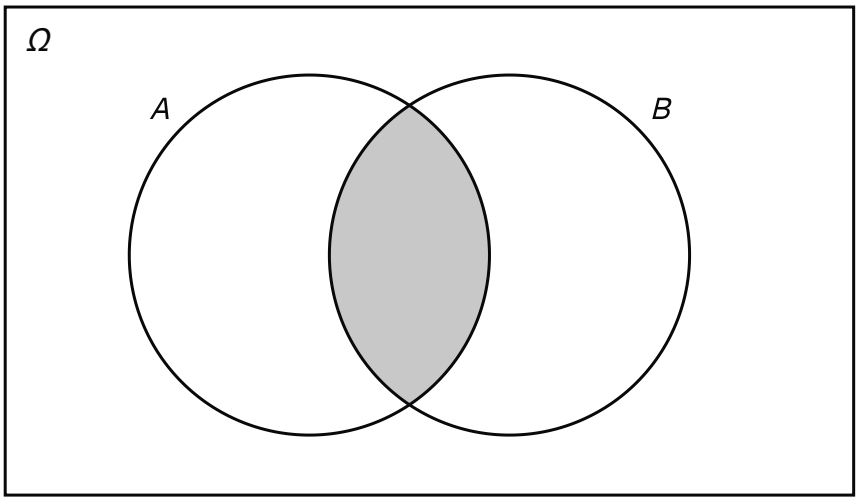
Définition : Opérations sur les événements

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

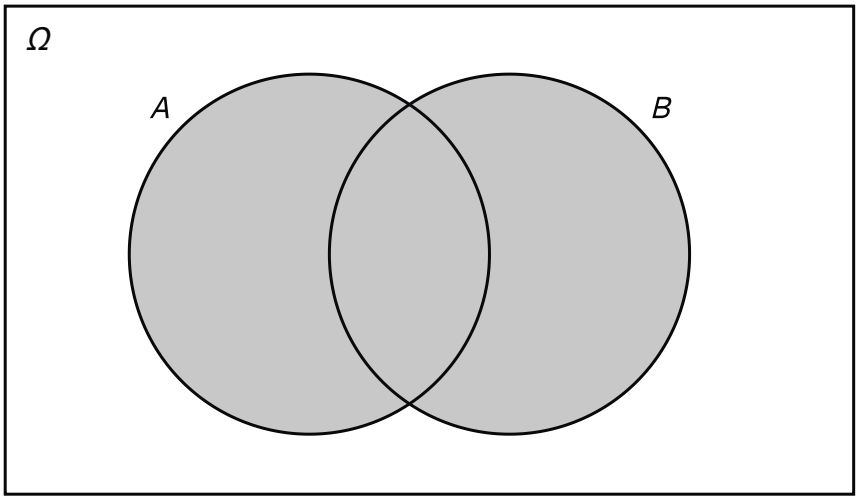
- L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est formé des issues de Ω qui ne sont pas dans A : il est réalisé exactement quand A ne l'est pas.
- L'événement $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé quand A et B le sont tous les deux.
- L'événement $A \cup B$ (« A ou B ») est réalisé quand au moins l'un des deux l'est.
- A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$: ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.



Ā, teinté, occupe tout Ω hors du cercle A : la partie de B extérieure à A en fait partie.



A ∩ B, teinté : la lentille où les deux cercles se recouvrent, et rien d'autre.



A ∪ B, teinté : les deux cercles entiers, lentille commune comprise, puisque le « ou » n'est pas exclusif.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré, aux faces numérotées de 1 à 6. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- A : « obtenir un nombre pair », $A = \{2, 4, 6\}$; B : « obtenir au moins 5 », $B = \{5, 6\}$.
- $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- C : « obtenir 1 », $C = \{1\}$. Comme $A \cap C = \varnothing$, les événements A et C sont incompatibles.

Attention : « Ou » n'est pas exclusif

L'événement $A \cup B$ est réalisé dès que l'un des deux l'est, **y compris quand les deux le sont**. Avec le dé de l'exemple, l'issue 6 réalise A et B : elle appartient à $A \cup B$. L'événement « exactement un des deux » est $\{2, 4, 5\}$: on a retiré l'issue de $A \cap B$.

Probabilité d'un événement

Définition : Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. Définir une **probabilité** p sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un réel p_i tel que :

- pour tout i, $p_i \geq 0$;
- $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des issues qui le composent. On pose $p(\varnothing) = 0$; on a $p(\Omega) = 1$.

Propriété : Propriétés d'une probabilité

Soit p une probabilité sur un univers fini Ω, et A et B deux événements.

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- En particulier, si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple

Un dé cubique est truqué : les faces 1, 2, 3 et 4 ont chacune la probabilité $0{,}1$ et la face 5 la probabilité $0{,}2$. La somme des six probabilités vaut 1, donc la face 6 a la probabilité $1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

- A : « nombre pair » ; $p(A) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}6$ et $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
- B : « au moins 5 » ; $p(B) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$. De plus $A \cap B = \{6\}$, donc $p(A \cap B) = 0{,}4$.
- $p(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}8$. Contrôle : $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ et $0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}8$.

Méthode : Passer par l'événement contraire

1. **Repérer** les formulations « au moins un », « au plus », « pas tous » : leur contraire se décrit plus simplement.
2. **Écrire** ce contraire en mots : pour « au moins une boule blanche », c'est « aucune boule blanche ».

3. **Calculer** $p(\overline{A})$, puis conclure avec $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

Attention : Probabilité d'une réunion

Additionner $p(A)$ et $p(B)$ ne donne $p(A \cup B)$ que si A et B sont **incompatibles**. Sinon, les issues de $A \cap B$ sont comptées deux fois et il faut retrancher $p(A \cap B)$. Avec le dé truqué, $0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$: un résultat plus grand que 1 trahit l'oubli.

Équiprobabilité

Propriété : Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues d'un univers fini Ω ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas, chaque issue a la probabilité $\dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$ et, pour tout événement A,

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Autrement dit, $p(A)$ est le nombre d'issues favorables à A divisé par le nombre d'issues possibles.

Méthode : Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

1. **Justifier** l'équiprobabilité par un mot de l'énoncé : « au hasard », « indiscernables au toucher », « équilibré ».
2. **Compter** les issues possibles, $\text{card}(\Omega)$, avec le modèle qui convient au tirage.
3. **Compter** les issues favorables avec ce **même** modèle.
4. **Diviser** : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$, puis simplifier la fraction.

Exemple

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 4 blanches et 8 noires. On tire simultanément 2 boules : il y a équiprobabilité et $\text{card}(\Omega) = C_{12}^2 = 66$.

- « Deux boules blanches » : $C_4^2 = 6$ issues, donc la probabilité vaut $\dfrac{6}{66} = \dfrac{1}{11}$.
- « Au moins une boule blanche » : son contraire, « aucune boule blanche », compte $C_8^2 = 28$ issues et a pour probabilité $\dfrac{28}{66} = \dfrac{14}{33}$. La probabilité cherchée vaut $1 - \dfrac{14}{33} = \dfrac{19}{33}$.

Probabilité conditionnelle

Définition : Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est le réel

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

C'est la probabilité que B soit réalisé lorsqu'on sait que A l'est.

Propriété : Probabilités composées

Soit A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$. Alors

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

Exemple

On reprend le dé équilibré, avec $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{5, 6\}$. On a $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Donc :

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}, \\ p_B(A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Une urne contient 2 boules rouges et 3 vertes ; on tire deux boules l'une après l'autre, sans remise. On note R_1 « rouge au premier tirage » et R_2 « rouge au second ». Alors :

$$\begin{aligned} p(R_1 \cap R_2) &= p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Méthode : Traduire un énoncé en probabilités conditionnelles

1. **Nommer** chaque événement par une lettre. Les mots « parmi » ou « sachant que » annoncent une probabilité conditionnelle $p_A(B)$; une part de toute la population donne $p(A)$ ou $p(A \cap B)$.
2. **Ranger** les données dans un arbre pondéré, tracé sur ton cahier, ou dans un tableau : les branches issues d'un même nœud portent des probabilités de somme 1.
3. **Multiplier** le long d'un chemin pour obtenir une intersection : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
4. **Diviser** pour obtenir une probabilité conditionnelle : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Attention : Ne pas confondre les probabilités conditionnelles

En général, $p_A(B)$, $p_B(A)$ et $p(A \cap B)$ sont trois nombres différents : avec le dé de l'exemple, ils valent $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. « Parmi les boules marquées, la part des rouges » est une probabilité conditionnelle ; « la part des boules à la fois marquées et rouges » est la probabilité d'une intersection.

Formule des probabilités totales

Définition : Système complet d'événements

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un univers Ω forment un **système complet d'événements** lorsque :

- ils sont deux à deux incompatibles ;
- leur réunion est Ω : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$;
- aucun n'est de probabilité nulle.

Ainsi, une issue appartient toujours à l'un d'eux, et à un seul. Pour tout événement A tel que $0 < p(A) < 1$, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.

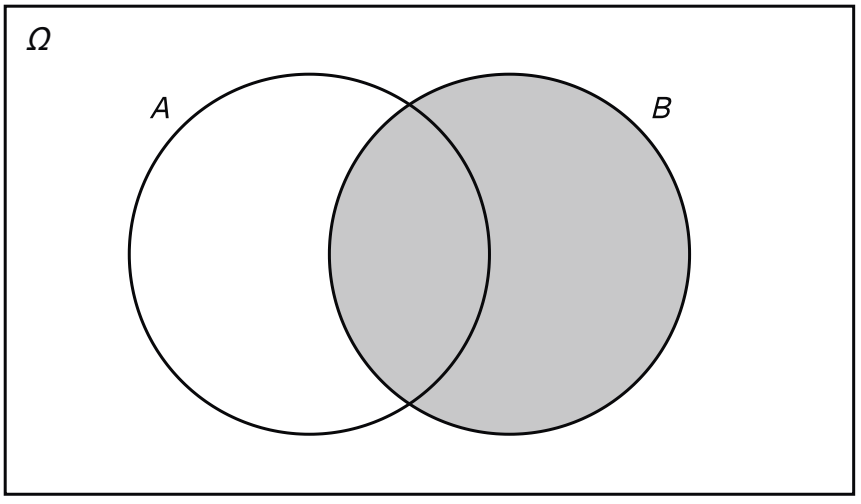
Propriété : Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements et B un événement. Alors

$$\begin{aligned} p(B) = {} & p(A_1) \times p_{A_1}(B) \\ & + p(A_2) \times p_{A_2}(B) \\ & + \cdots \\ & + p(A_n) \times p_{A_n}(B). \end{aligned}$$

En particulier, si $0 < p(A) < 1$:

$$\begin{aligned} p(B) = {} & p(A) \times p_A(B) \\ & + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B). \end{aligned}$$



A et Ā se partagent Ω sans se recouvrir ; B, teinté, s'y trouve coupé en B ∩ A et B ∩ Ā, les deux termes de la formule.

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

1. **Choisir** un système complet d'événements qui découpe la situation, par exemple A et $\overline{A}$; vérifier qu'aucun n'est de probabilité nulle.
2. **Écrire** $p(B)$ comme la somme des produits $p(A_i) \times p_{A_i}(B)$: un produit par chemin de l'arbre qui aboutit à B.
3. **Calculer**, puis contrôler que le résultat est compris entre 0 et 1.
4. **Remonter**, si l'on demande $p_B(A_i)$: $p_B(A_i) = \dfrac{p(A_i) \times p_{A_i}(B)}{p(B)}$.

Exemple

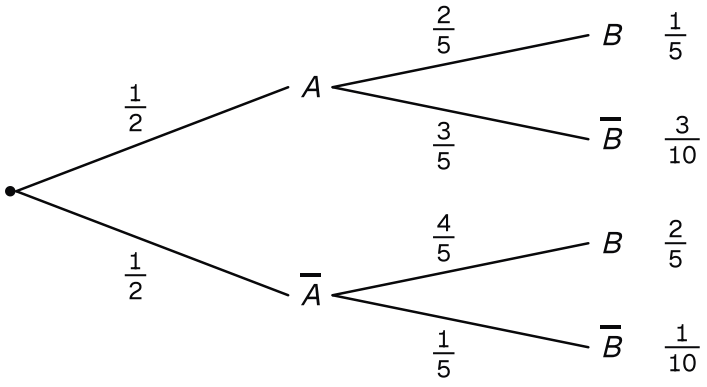
On lance une pièce équilibrée. Sur pile, on tire une boule dans une urne U_1 qui contient 2 boules blanches et 3 noires ; sur face, dans une urne U_2 qui contient 4 blanches et 1 noire.

On note A « obtenir pile » et B « tirer une boule blanche ». Les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet :

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Sachant que la boule est blanche, la probabilité d'avoir obtenu pile vaut :

$$\begin{aligned} p_B(A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Pile ou face, puis une boule tirée dans l'urne correspondante : deux chemins sur quatre aboutissent à une boule blanche.

Indépendance et épreuves répétées

Définition : Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Propriété : Indépendance et probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p_A(B) = p(B).$$

Autrement dit, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Exemple

Avec le dé équilibré, $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{5, 6\}$:

$$\begin{aligned} p(A) \times p(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} = p(A \cap B). \end{aligned}$$

Les événements A et B sont indépendants ; on le retrouve avec $p_A(B) = \frac{1}{3} = p(B)$.

En revanche, avec $D = \{4, 5, 6\}$, on a $p(A \cap D) = \frac{1}{3}$ et $p(A) \times p(D) = \frac{1}{4}$: les événements A et D ne sont pas indépendants.

Méthode : Étudier l'indépendance de deux événements

1. **Calculer** $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$, chacune pour elle-même.
2. **Comparer** $p(A \cap B)$ au produit $p(A) \times p(B)$, en fractions exactes.
3. **Conclure** : en cas d'égalité, A et B sont indépendants ; sinon, ils ne le sont pas. Lorsque $p(A) \neq 0$, comparer $p_A(B)$ et $p(B)$ revient au même.

Attention : Incompatibles n'est pas indépendants

Deux événements incompatibles, de probabilités non nulles, ne sont **jamais** indépendants : $p(A \cap B) = 0$, alors que $p(A) \times p(B) > 0$. Avec le dé, $A = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1\}$ sont incompatibles, et pourtant $p(A) \times p(C) = \frac{1}{12} \neq 0$. L'indépendance se prouve par un calcul.

Propriété : Épreuves indépendantes et répétées

On répète n fois, dans les mêmes conditions et de façon indépendante, une épreuve au cours de laquelle un événement S (le « succès ») a la probabilité p, avec $0 < p < 1$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que S soit réalisé exactement k fois est

$$C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}.$$

Exemple

On jette un dé équilibré à trois reprises, de façon indépendante. Le succès est « obtenir 6 », de probabilité $\dfrac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir exactement deux fois 6 vaut :

$$\begin{aligned} & C_3^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{15}{216} = \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

Variable aléatoire, espérance, variance

Définition : Variable aléatoire et loi de probabilité

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire, muni d'une probabilité p.

- Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de Ω.
- On note $x_1, x_2, \ldots, x_r$ les valeurs prises par X, et $(X = x_i)$ l'événement formé des issues auxquelles X associe x_i.
- La **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $p(X = x_i)$ pour i allant de 1 à r. On la présente dans un tableau, et l'on a toujours $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \cdots + p(X = x_r) = 1$.

Méthode : Déterminer la loi d'une variable aléatoire

1. **Lister** les valeurs possibles de X à partir de l'expérience.
2. **Traduire** chaque événement $(X = x_i)$ par une phrase, puis **calculer** sa probabilité.
3. **Présenter** la loi dans un tableau à deux lignes : les valeurs x_i, puis les probabilités $p(X = x_i)$.
4. **Contrôler** que la somme des probabilités vaut 1.

Exemple

On lance un dé équilibré. On gagne 3 points si l'on obtient 6, 2 points si l'on obtient 4 ou 5, et l'on perd 1 point sinon. Le gain X prend les valeurs -1, 2 et 3 :

x_i	-1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Contrôle : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1$.

Attention : La somme des probabilités d'une loi vaut 1

Si la somme des probabilités d'une loi n'est pas exactement 1, la loi est fausse : une valeur de X manque, ou une probabilité est mal calculée. Oublier la valeur 3 dans l'exemple donnerait $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Le contrôle se fait en fractions exactes, sans arrondir en cours de route.

Définition : Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1,\dots,x_r$ avec les probabilités $p_i=p(X=x_i)$.

- L'**espérance** de X est $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_rp_r$.
- La **variance** de X est

$$\begin{aligned}V(X)=&(x_1-E(X))^2p_1\\&+(x_2-E(X))^2p_2\\&+\cdots\\&+(x_r-E(X))^2p_r.\end{aligned}$$

- L'**écart-type** de X est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs obtenues pour X est proche de $E(X)$; la variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs autour de $E(X)$.

Propriété : Formule de calcul de la variance

Avec les notations de la définition de l'espérance et de la variance, on pose $E(X^2)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+\cdots+x_r^2p_r$. Alors

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2.$$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type

1. **Ajouter** au tableau de la loi la ligne des produits x_ip_i : leur somme donne $E(X)$.
2. **Ajouter** la ligne des produits $x_i^2p_i$: leur somme donne $E(X^2)$.
3. **Calculer** $V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$, vérifier que $V(X)\geq 0$, puis $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.
4. **Interpréter** $E(X)$ dans la situation, avec son unité : gain moyen par partie, nombre moyen d'objets.

Exemple

Avec le gain X du jeu de dé précédent :

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-3+4+3}{6} = \frac{2}{3}, \\ E(X^2) &= 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} \\ &\quad + 9 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3+8+9}{6} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{10}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{30-4}{9} = \frac{26}{9}, \end{aligned}$$

et $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{26}}{3} \approx 1{,}70$.

Sur un grand nombre de parties, le joueur gagne en moyenne $\dfrac{2}{3}$ de point par partie.

Attention : Variance : le carré de l'espérance

Dans $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, on retranche le **carré** de l'espérance, et $E(X^2)$ se calcule avec les carrés x_i^2. Retrancher $E(X)$ au lieu de son carré donnerait ici $\dfrac{10}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$, et non $\dfrac{26}{9}$. Une variance négative signale une erreur ; l'écart-type est la racine carrée de la variance.

Loi binomiale

Définition : Loi binomiale

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve qui n'a que deux issues : le succès S, de probabilité p (avec $0 < p < 1$), et l'échec $\overline{S}$, de probabilité $1 - p$. La variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n; p)$. Elle prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$ et, d'après la propriété des épreuves indépendantes et répétées, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$p(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}.$$

Propriété : Espérance et variance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors

$$E(X) = np$$

et

$$V(X) = np(1-p).$$

Méthode : Reconnaître une loi binomiale

1. **Décrire** l'épreuve et ses deux issues : le succès, que l'on précise, et l'échec.
2. **Vérifier** que l'épreuve est répétée n fois dans les mêmes conditions, de façon indépendante : tirage **avec** remise, lancers successifs.
3. **Vérifier** que X compte les succès.
4. **Conclure** : X suit $\mathcal{B}(n;p)$, avec n et p donnés ; alors $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple

Une urne contient 4 boules, dont 1 rouge. On tire 5 fois une boule **avec** remise, et X compte les boules rouges obtenues. Les tirages sont indépendants et n'ont que deux issues, donc X suit $\mathcal{B}\left(5;\frac{1}{4}\right)$.

Deux boules rouges.

$$\begin{aligned} p(X=2) &= C_5^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= 10 \times \frac{1}{16} \times \frac{27}{64} \\ &= \frac{135}{512}. \end{aligned}$$

Au moins une boule rouge.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ &= 1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024}. \end{aligned}$$

Espérance et variance.

- $E(X) = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$;
- $V(X) = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$.

Attention : Sans indépendance, pas de loi binomiale

Si l'on tire plusieurs boules **sans** remise, chaque tirage modifie le contenu de l'urne pour le suivant : les tirages ne sont pas indépendants, et le nombre de boules d'une couleur ne suit pas une loi binomiale. On compte alors avec les combinaisons, sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

Quelle formule pour quelle question ?

Méthode : Quelle formule pour quelle question ?

- « Combien de tirages ? » : simultané, C_n^p ; successif sans remise, A_n^p ; successif avec remise, n^p.
- « Au hasard », issues de même probabilité : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.
- « Au moins un », « au plus », « pas tous » : $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.
- « A ou B » : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- « Sachant que », « parmi » : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
- « A, puis B », un chemin de l'arbre : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
- Probabilité d'un événement qui dépend d'une première étape : probabilités totales sur un système complet, $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$.
- « Sachant B, quelle est la probabilité de l'étape A_i ? » : $p_B(A_i) = \dfrac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$.
- « A et B sont-ils indépendants ? » : comparer $p(A \cap B)$ et $p(A) \times p(B)$.
- « Exactement k succès en n épreuves indépendantes » : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- « Gain moyen » : $E(X)$; « dispersion » : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- « Nombre de succès » : loi $\mathcal{B}(n ; p)$, avec $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Événement contraire

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Réunion

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Équiprobabilité

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Probabilité conditionnelle, si p(A) est non nulle

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Probabilités composées

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Probabilités totales

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$$

Indépendance

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Espérance

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_r p_r$$

Variance

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Loi binomiale

$$p(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

Espérance et variance d'une loi binomiale

$$E(X) = np$$
$$V(X) = np(1-p)$$