BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une urne à trois couleurs

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 rouges, 3 vertes et 2 jaunes (situation fictive). On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. 0,5 pts

Montrer que le nombre de tirages possibles est 120.

INDICE

Outil : un tirage simultané est une combinaison de 3 boules parmi 10.

CORRIGÉ

Un tirage simultané est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 10 boules :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\Omega) &= C_{10}^{3} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 120.\end{aligned}$$

Les boules sont tirées au hasard, donc ces 120 tirages ont tous la même probabilité.

Conclusion. On peut effectuer 120 tirages différents de 3 boules.

2. 1 pts

On considère l'événement A : « les trois boules tirées sont de la même couleur ». Montrer que $p(A) = \dfrac{11}{120}$.

INDICE

Début : sépare les cas « trois rouges » et « trois vertes » ; il n'y a que deux boules jaunes.

CORRIGÉ

Cas favorables. Trois boules de même couleur sont :

- trois rouges : $C_5^3 = 10$ tirages ;
- trois vertes : $C_3^3 = 1$ tirage ;
- trois jaunes : impossible, car l'urne n'en contient que deux.

Cardinal de A. Ces cas sont incompatibles, donc $\operatorname{card}(A) = 10 + 1 = 11$.

Conclusion. Par équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{11}{120}$.

3. 1,25 pts

Calculer la probabilité de l'événement « aucune boule verte n'est tirée ». En déduire la probabilité de l'événement B : « au moins une boule verte est tirée ».

INDICE

Outil : sans boule verte, les 3 boules sont prises parmi les 7 autres ; puis $p(B) = 1 - p(\overline{B})$.

CORRIGÉ

Aucune boule verte. Cet événement est $\overline{B}$. Les 3 boules sont alors choisies parmi les 7 boules rouges ou jaunes, soit $C_7^3 = 35$ tirages. Par équiprobabilité :

$$p(\overline{B}) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

Au moins une boule verte. Par l'événement contraire :

$$p(B) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

Conclusion. La probabilité de ne tirer aucune boule verte vaut $\frac{7}{24}$, et $p(B) = \frac{17}{24}$.

4. 1,25 pts

On considère l'événement C : « exactement deux des boules tirées sont rouges ». Montrer que $p(C) = \frac{5}{12}$.

INDICE

Point délicat : la troisième boule n'est pas rouge : elle est choisie parmi les 5 boules vertes ou jaunes.

CORRIGÉ

Cas favorables. On choisit 2 boules rouges parmi 5, de $C_5^2 = 10$ façons, puis 1 boule parmi les 5 qui ne sont pas rouges, de $C_5^1 = 5$ façons. D'après le principe multiplicatif :

$$\text{card}(C) = 10 \times 5 = 50.$$

Probabilité. Par équiprobabilité :

$$p(C) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

Conclusion. $p(C) = \frac{5}{12}$.

Exercice 2 — 5 pts

Contrôle de qualité de bouteilles d'huile

Une coopérative conditionne de l'huile d'olive sur deux chaînes. La chaîne A remplit $0{,}7$ des bouteilles et la chaîne B le reste. Une bouteille remplie par la chaîne A est mal fermée avec la probabilité $0{,}04$; une bouteille remplie par la chaîne B, avec la probabilité $0{,}1$ (données fictives). On choisit une bouteille au hasard et l'on note A : « la bouteille vient de la chaîne A », B : « la bouteille vient de la chaîne B » et D : « la bouteille est mal fermée ».

1. — 1 pts

Décrire l'arbre pondéré de la situation, que tu peux tracer sur ton cahier. Montrer que $p(A \cap D) = 0{,}028$.

INDICE

Outil : sur un chemin de l'arbre, on multiplie les probabilités des branches.

CORRIGÉ

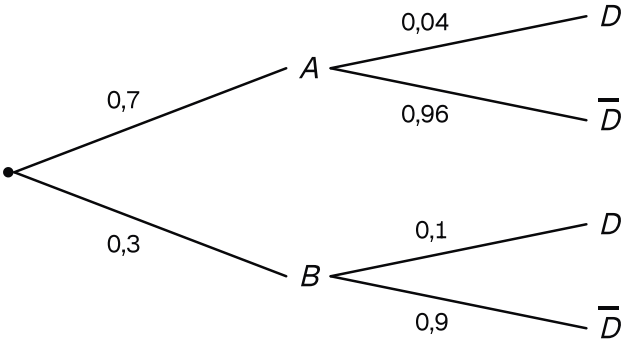
Arbre pondéré. Les probabilités manquantes s'obtiennent par complément à 1 : $p(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $p_A(\overline{D}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$ et $p_B(\overline{D}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

- De la racine partent une branche vers A, de probabilité $0{,}7$, et une branche vers B, de probabilité $0{,}3$.
- De A partent une branche vers D, de probabilité $0{,}04$, et une branche vers $\overline{D}$, de probabilité $0{,}96$.
- De B partent une branche vers D, de probabilité $0{,}1$, et une branche vers $\overline{D}$, de probabilité $0{,}9$.

Calcul de $p(A \cap D)$. Comme $p(A) = 0{,}7 \neq 0$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} p(A \cap D) &= p(A) \times p_A(D) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}04 \\ &= 0{,}028. \end{aligned}$$

Conclusion. L'arbre pondéré est décrit ci-dessus, et $p(A \cap D) = 0{,}028$.



L'arbre pondéré des bouteilles : la chaîne de remplissage, puis le bouchage.

2. 1 pts

Montrer que $p(D) = 0{,}058$.

INDICE

Début : A et B forment un système complet ; deux chemins mènent à D.

CORRIGÉ

Système complet. Chaque bouteille vient d'une chaîne et d'une seule, et $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}3$ sont non nulles : A et B forment un système complet d'événements.

Probabilités totales. Deux chemins de l'arbre mènent à D. D'après la formule des probabilités totales et la question 1 :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A) \times p_A(D) \\ &\quad + p(B) \times p_B(D) \\ &= 0{,}028 + 0{,}3 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}028 + 0{,}03 \\ &= 0{,}058. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(D) = 0{,}058$.

3. 0,5 pts

En déduire la probabilité que la bouteille choisie soit bien fermée.

INDICE

Outil : « bien fermée » est l'événement contraire de D.

CORRIGÉ

« La bouteille est bien fermée » est l'événement contraire de D. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} p(\overline{D}) &= 1 - p(D) \\ &= 1 - 0{,}058 \\ &= 0{,}942. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que la bouteille choisie soit bien fermée vaut $0{,}942$.

4. 1,5 pts

La bouteille choisie est mal fermée. Montrer que la probabilité qu'elle vienne de la chaîne B est $\dfrac{15}{29}$.

INDICE

Point délicat : on cherche $p_D(B)$; calcule d'abord $p(B \cap D)$ sur l'arbre.

CORRIGÉ

On cherche $p_D(B)$.

Calcul de $p(B \cap D)$. D'après la formule des probabilités composées, $p(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$.

Probabilité conditionnelle. Comme $p(D) \neq 0$, par définition :

$$\begin{aligned} p_D(B) &= \frac{p(B \cap D)}{p(D)} \\ &= \frac{0{,}03}{0{,}058} \\ &= \frac{30}{58} \\ &= \frac{15}{29}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que la bouteille est mal fermée, la probabilité qu'elle vienne de la chaîne B est $\dfrac{15}{29}$.

5. 1 pts

Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.

INDICE

Outil : compare $p(A \cap D)$ et $p(A) \times p(D)$.

CORRIGÉ

On compare $p(A \cap D)$ au produit $p(A) \times p(D)$:

$$\begin{aligned} p(A) \times p(D) &= 0{,}7 \times 0{,}058 \\ &= 0{,}0406. \end{aligned}$$

Or $p(A \cap D) = 0{,}028$ d'après la question 1, et $0{,}028 \neq 0{,}0406$.

Conclusion. Les événements A et D ne sont pas indépendants.

Exercice 3 — 5 pts

La roue de la librairie

Pour attirer des clients, une librairie propose un jeu (données fictives). Le joueur paie 20 dirhams pour jouer (c'est la mise), puis fait tourner une roue partagée en 10 secteurs de même taille. Un secteur fait gagner un bon de 100 dirhams, trois secteurs un bon de 20 dirhams, et les six autres ne font rien gagner. On note X le gain net du joueur, en dirhams : valeur du bon, moins la mise.

1. — 0,5 pts

Montrer que X prend les valeurs -20, 0 et 80.

INDICE

Outil : retranche la mise de 20 dirhams à la valeur du bon obtenu.

CORRIGÉ

Le joueur obtient un bon de 100, de 20 ou de 0 dirham, et il a payé une mise de 20 dirhams. Son gain net vaut donc :

- $100 - 20 = 80$ avec le bon de 100 dirhams ;
- $20 - 20 = 0$ avec le bon de 20 dirhams ;
- $0 - 20 = -20$ sans bon.

Conclusion. X prend les valeurs -20, 0 et 80.

2. — 1 pts

Déterminer la loi de probabilité de X.

INDICE

Début : les 10 secteurs ont la même probabilité $\frac{1}{10}$; compte les secteurs qui donnent chaque valeur.

CORRIGÉ

Les 10 secteurs sont de même taille : chacun a la probabilité $\frac{1}{10}$.

- Six secteurs donnent $X = -20$: $p(X = -20) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
- Trois secteurs donnent $X = 0$: $p(X = 0) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
- Un secteur donne $X = 80$: $p(X = 80) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Conclusion. La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-20	0	80
$p(X = x_i)$	$0{,}6$	$0{,}3$	$0{,}1$

Contrôle : $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$.

3. 1,25 pts

Montrer que $E(X) = -4$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : $E(X)$ est la somme des produits $x_i\,p(X = x_i)$; traduis ensuite son signe pour le joueur.

CORRIGÉ

Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= -20 \times 0{,}6 + 0 \times 0{,}3 \\ &\quad + 80 \times 0{,}1 \\ &= -12 + 0 + 8 \\ &= -4. \end{aligned}$$

Interprétation. Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 4 dirhams par partie : le jeu est favorable à la librairie.

Conclusion. $E(X) = -4$.

4. 1,25 pts

Montrer que $V(X) = 864$, puis en déduire une valeur approchée de $\sigma(X)$ à $0{,}01$ près.

INDICE

Point délicat : calcule $E(X^2)$ avec les carrés 400, 0 et $6\,400$, puis retranche $(-4)^2 = 16$.

CORRIGÉ

Calcul de $E(X^2)$. Les carrés des valeurs sont 400, 0 et $6\,400$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 400 \times 0{,}6 + 0 \times 0{,}3 \\ &\quad + 6\,400 \times 0{,}1 \\ &= 240 + 640 \\ &= 880. \end{aligned}$$

Variance. D'après la formule de calcul de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= 880 - (-4)^2 \\ &= 880 - 16 \\ &= 864. \end{aligned}$$

Écart-type. $\sigma(X) = \sqrt{864} \approx 29{,}39$ à $0{,}01$ près.

Conclusion. $V(X) = 864$ et $\sigma(X) \approx 29{,}39$.

5. 1 pts

La librairie veut rendre le jeu équitable, c'est-à-dire tel que l'espérance du gain net soit nulle, sans changer les bons. Quelle mise doit-elle demander ?

INDICE

Outil : avec une mise de m dirhams, le gain net est la valeur du bon moins m ; écris $E(X)$ en fonction de m.

CORRIGÉ

Gain net avec une mise m. Soit m la mise, en dirhams. X prend les valeurs $100-m$, $20-m$ et $-m$, avec les probabilités $0{,}1$, $0{,}3$ et $0{,}6$.

Espérance. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0{,}1(100-m) \\ &\quad + 0{,}3(20-m) \\ &\quad + 0{,}6\times(-m) \\ &= 10 - 0{,}1m + 6 - 0{,}3m \\ &\quad - 0{,}6m \\ &= 10 + 6 - m \\ &= 16 - m. \end{aligned}$$

Mise équitable. Le jeu est équitable si $E(X)=0$, c'est-à-dire si $16-m=0$, soit $m=16$.

Conclusion. La librairie doit demander une mise de 16 dirhams.

Exercice 4 4 pts

Les repas à bord d'un autocar

Dans un autocar de voyage, chaque voyageur commande un repas à bord avec la probabilité $0{,}3$, indépendamment des autres voyageurs (données fictives). On interroge 4 voyageurs et l'on note X le nombre de voyageurs qui commandent un repas.

1. 1 pts

Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

INDICE

Outil : une épreuve à deux issues, répétée de façon indépendante, et X qui compte les succès.

CORRIGÉ

L'épreuve. Interroger un voyageur est une épreuve à deux issues : il commande un repas, appelé succès, de probabilité $0{,}3$, ou il n'en commande pas.

La répétition. L'épreuve est répétée 4 fois, et les voyageurs décident indépendamment les uns des autres.

La variable. X compte le nombre de succès.

Conclusion. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4;0{,}3)$, de paramètres 4 et $0{,}3$.

2. 0,75 pts

Montrer que $p(X=0)=0{,}2401$.

INDICE

Début : aucun succès : $p(X=0)=C_4^0\times 0{,}3^0\times 0{,}7^4$.

CORRIGÉ

Aucun voyageur ne commande : c'est le cas $k=0$, et un voyageur ne commande pas avec la probabilité $1-0{,}3=0{,}7$.

$$\begin{aligned} p(X=0) &= C_4^0\times 0{,}3^0\times 0{,}7^4\\ &= 1\times 1\times 0{,}2401\\ &= 0{,}2401. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X=0)=0{,}2401$.

3. 0,5 pts

En déduire la probabilité qu'au moins un des quatre voyageurs commande un repas.

INDICE

Outil : le contraire de « au moins un » est « aucun », c'est-à-dire $(X = 0)$.

CORRIGÉ

« Au moins un voyageur commande un repas » est l'événement $(X \geq 1)$, contraire de $(X = 0)$.
D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) & \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - 0{,}2401 \\ &= 0{,}7599. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité qu'au moins un des quatre voyageurs commande un repas vaut $0{,}7599$.

4. 1 pts

Montrer que $p(X = 2) = 0{,}2646$.

INDICE

Point délicat : $C_4^2 = 6$: il y a six façons de placer les deux voyageurs qui commandent.

CORRIGÉ

Deux succès : c'est le cas $k = 2$, avec $C_4^2 = 6$, $0{,}3^2 = 0{,}09$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$.

$$\begin{aligned} p(X = 2) & \\ &= C_4^2 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2 \\ &= 6 \times 0{,}09 \times 0{,}49 \\ &= 6 \times 0{,}0441 \\ &= 0{,}2646. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X = 2) = 0{,}2646$.

5. 0,75 pts

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Outil : pour $\mathcal{B}(n; p)$, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

CORRIGÉ

Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0{,}3)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= 4 \times 0{,}3 = 1{,}2, \\ V(X) &= 4 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}84. \end{aligned}$$

Interprétation. Sur un grand nombre de groupes de quatre voyageurs, on compte en moyenne $1{,}2$ repas commandés par groupe.

Conclusion. $E(X) = 1{,}2$ et $V(X) = 0{,}84$.

Exercice 5 — 4 pts

Séjours à la mer et voyages d'été

Une agence de voyage a vendu 400 séjours dans l'année (données fictives). Parmi eux, 240 sont des séjours à la mer, 300 ont lieu en été, et 180 sont des séjours à la mer en été. On choisit un séjour au hasard ; on note M : « le séjour est à la mer » et E : « le séjour a lieu en été ».

1. — 1 pts

Calculer le nombre de séjours à la mer hors de l'été, le nombre de séjours d'été qui ne sont pas à la mer, et le nombre de séjours qui ne sont ni à la mer ni en été.

INDICE

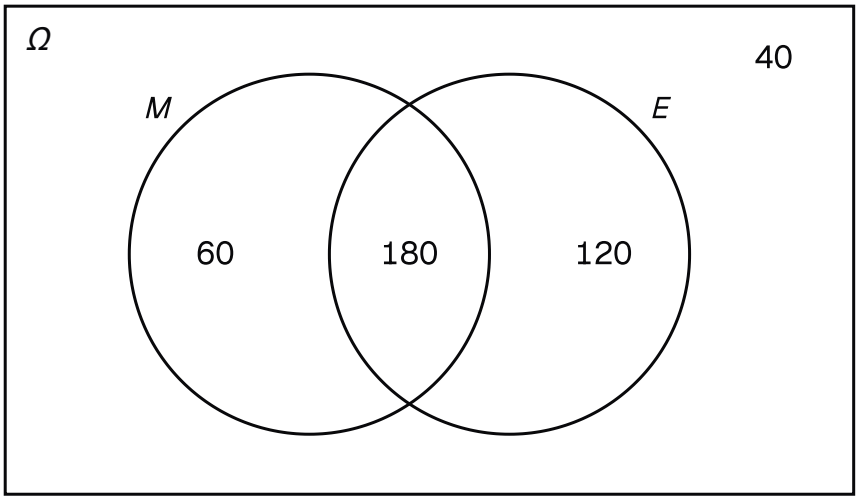
Outil : on retranche aux totaux l'effectif commun 180.

CORRIGÉ

On retranche aux totaux l'effectif commun 180 des séjours à la mer en été.

- À la mer hors de l'été : $240 - 180 = 60$.
- En été mais pas à la mer : $300 - 180 = 120$.
- Ni à la mer ni en été : $400 - 180 - 60 - 120 = 40$.

Conclusion. Il y a 60 séjours à la mer hors de l'été, 120 séjours d'été qui ne sont pas à la mer, et 40 séjours ni à la mer ni en été.



Les 400 séjours répartis entre M (mer) et E (été) : 180 dans la partie commune, 60 à la mer seule, 120 en été seul, 40 hors des deux.

2. 0,5 pts

Montrer que $p(M \cap E) = 0{,}45$.

INDICE

Début : le séjour est choisi au hasard parmi 400 : il y a équiprobabilité.

CORRIGÉ

Le séjour est choisi au hasard parmi les 400 : il y a équiprobabilité. L'événement $M \cap E$ est formé des 180 séjours à la mer en été :

$$p(M \cap E) = \frac{180}{400} = 0{,}45.$$

Conclusion. $p(M \cap E) = 0{,}45$.

3. 1 pts

Montrer que les événements M et E sont indépendants.

INDICE

Outil : calcule $p(M)$ et $p(E)$, puis compare leur produit à $p(M \cap E)$.

CORRIGÉ

Calcul de $p(M)$ et de $p(E)$. Par équiprobabilité, $p(M) = \frac{240}{400} = 0{,}6$ et $p(E) = \frac{300}{400} = 0{,}75$.

Comparaison. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} p(M) \times p(E) &= 0{,}6 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}45 \\ &= p(M \cap E). \end{aligned}$$

Conclusion. $p(M \cap E)$ est égale au produit $p(M) \times p(E)$: les événements M et E sont indépendants.

4. 0,75 pts

Calculer $p(M \cup E)$.

INDICE

Point délicat : M et E ne sont pas incompatibles ; il faut retrancher $p(M \cap E)$.

CORRIGÉ

Les événements M et E ne sont pas incompatibles. D'après la formule de la probabilité d'une réunion :

$$\begin{aligned} p(M \cup E) &= p(M) + p(E) \\ &\quad - p(M \cap E) \\ &= 0{,}6 + 0{,}75 - 0{,}45 \\ &= 0{,}9. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(M \cup E) = 0{,}9$.

5. `0,75 pts`

En déduire la probabilité que le séjour choisi ne soit ni à la mer ni en été, et contrôler ce résultat avec la question 1.

INDICE

Outil : « ni à la mer ni en été » est le contraire de $M \cup E$.

CORRIGÉ

« Ni à la mer ni en été » est le contraire de « à la mer ou en été », c'est-à-dire de $M \cup E$. D'après la question 4 :

$$1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Contrôle. D'après la question 1, 40 séjours ne sont ni à la mer ni en été, et $\dfrac{40}{400} = 0{,}1$.

Conclusion. La probabilité que le séjour choisi ne soit ni à la mer ni en été vaut $0{,}1$, ce que confirment les effectifs.