BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Entraînement	7

Exercice 1

Trois salariés tirés au sort pour un séminaire

Une entreprise compte 11 salariés : 6 au service commercial et 5 à la comptabilité (données fictives). Elle tire au sort, simultanément, 3 salariés qui participeront à un séminaire.

1.

Combien de groupes de 3 salariés peut-on former ?

INDICE

Outil : un tirage simultané se compte avec les combinaisons.

CORRIGÉ

Le tirage est simultané : un groupe est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 11 salariés.

$$\begin{aligned} C_{11}^{3} &= \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 165. \end{aligned}$$

Le tirage se fait au hasard : ces 165 groupes sont équiprobables, ce qui servira aux questions suivantes.

Conclusion. On peut former 165 groupes de 3 salariés.

2.

Calculer la probabilité que les trois salariés tirés soient du même service.

INDICE

Début : sépare deux cas incompatibles : trois commerciaux, ou trois comptables.

CORRIGÉ

Cas favorables. Trois salariés du même service sont trois commerciaux ou trois comptables :

- trois commerciaux : $C_{6}^{3} = 20$ groupes ;
- trois comptables : $C_{5}^{3} = 10$ groupes.

Ces deux cas sont incompatibles : on additionne les effectifs.

Probabilité. Par équiprobabilité :

$$\frac{20 + 10}{165} = \frac{30}{165} = \frac{2}{11}.$$

Conclusion. La probabilité que les trois salariés tirés soient du même service vaut $\frac{2}{11}$.

3.

Calculer la probabilité qu'exactement deux des salariés tirés soient du service commercial.

INDICE

Point délicat : on choisit les deux commerciaux, **puis** le troisième salarié parmi les comptables, et l'on multiplie.

CORRIGÉ

Cas favorables. On choisit 2 commerciaux parmi 6, de $C_6^2 = 15$ façons, puis 1 comptable parmi 5, de $C_5^1 = 5$ façons. D'après le principe multiplicatif, il y a $15 \times 5 = 75$ groupes favorables.

Probabilité. Par équiprobabilité, elle vaut $\dfrac{75}{165} = \dfrac{5}{11}$.

Conclusion. La probabilité qu'exactement deux des salariés tirés soient du service commercial vaut $\dfrac{5}{11}$.

4.

Calculer la probabilité qu'au moins un salarié de la comptabilité soit tiré.

INDICE

Outil : le contraire de « au moins un comptable » est « trois commerciaux ».

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins un comptable » est « aucun comptable », c'est-à-dire « trois commerciaux » : $C_6^3 = 20$ groupes, d'après la question 2. Par l'événement contraire :

$$1 - \frac{20}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}.$$

Conclusion. La probabilité qu'au moins un salarié de la comptabilité soit tiré vaut $\dfrac{29}{33}$.

5.

L'entreprise tire finalement au sort, l'un après l'autre et sans remise, un responsable, un adjoint et un secrétaire du séminaire. Calculer la probabilité que ces trois personnes soient du service commercial, et comparer avec la probabilité que les trois salariés tirés simultanément soient du service commercial (voir les questions 2 et 4).

INDICE

Point délicat : l'ordre compte maintenant : l'univers **et** l'événement se comptent avec des arrangements.

CORRIGÉ

Tirage ordonné. L'ordre compte (responsable, adjoint, secrétaire) et une personne ne peut pas être tirée deux fois : l'univers et l'événement se comptent avec des arrangements.

- Tirages ordonnés possibles, équiprobables : $A_{11}^3 = 11 \times 10 \times 9 = 990$.
- Tirages formés de trois commerciaux : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

La probabilité vaut donc $\dfrac{120}{990} = \dfrac{4}{33}$.

Comparaison. Avec le tirage simultané, les $C_6^3 = 20$ groupes de trois commerciaux, déjà comptés aux questions 2 et 4, donnent la probabilité $\dfrac{20}{165} = \dfrac{4}{33}$: c'est la même.

Explication. Chaque groupe de trois personnes correspond à $3! = 6$ tirages ordonnés. Ce facteur 6 figure au numérateur et au dénominateur : $120 = 6 \times 20$ et $990 = 6 \times 165$.

Conclusion. La probabilité que les trois personnes soient du service commercial vaut $\dfrac{4}{33}$, comme pour le tirage simultané.

Exercice 2

Carte de fidélité et courses du samedi

Un supermarché interroge ses clients (données fictives). Pour un client choisi au hasard, on note F : « le client possède la carte de fidélité » et S : « le client fait ses courses le samedi ». On sait que $p(F) = 0{,}45$, $p(S) = 0{,}4$ et $p(F \cap S) = 0{,}18$.

1.

Calculer la probabilité que le client possède la carte de fidélité ou fasse ses courses le samedi.

INDICE

Outil : formule de la probabilité d'une réunion.

CORRIGÉ

Les événements F et S ne sont pas incompatibles. D'après la formule de la probabilité d'une réunion :

$$\begin{aligned} p(F \cup S) &= p(F) + p(S) \\ &\quad - p(F \cap S) \\ &= 0{,}45 + 0{,}4 - 0{,}18 \\ &= 0{,}67. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que le client possède la carte de fidélité ou fasse ses courses le samedi vaut $0{,}67$.

2.

Calculer la probabilité que le client ne possède pas la carte et ne vienne pas le samedi.

INDICE

Outil : cet événement est le contraire de $F \cup S$.

CORRIGÉ

« Ne pas posséder la carte et ne pas venir le samedi » est le contraire de « posséder la carte ou venir le samedi », c'est-à-dire de $F \cup S$. D'après la question 1, sa probabilité vaut :

$$1 - 0{,}67 = 0{,}33.$$

Conclusion. La probabilité que le client ne possède pas la carte et ne vienne pas le samedi vaut $0{,}33$.

3.

Calculer la probabilité qu'une seule des deux propriétés soit vraie pour ce client.

INDICE

Point délicat : $F \cup S$ contient aussi les clients qui ont les deux propriétés ; il faut les retirer.

CORRIGÉ

L'événement « une seule des deux propriétés » est formé des issues de $F \cup S$ qui ne sont pas dans $F \cap S$. Comme $F \cap S$ est contenu dans $F \cup S$, sa probabilité vaut :

$$\begin{aligned} & p(F \cup S) - p(F \cap S) \\ & = 0{,}67 - 0{,}18 \\ & = 0{,}49. \end{aligned}$$

Contrôle. Seulement la carte : $p(F) - p(F \cap S) = 0{,}27$. Seulement le samedi : $p(S) - p(F \cap S) = 0{,}22$. On retrouve $0{,}27 + 0{,}22 = 0{,}49$.

Conclusion. La probabilité qu'une seule des deux propriétés soit vraie pour ce client vaut $0{,}49$.

4.

Les événements F et S sont-ils indépendants ? Que vaut alors $p_S(F)$?

INDICE

Outil : compare $p(F \cap S)$ et $p(F) \times p(S)$.

CORRIGÉ

Indépendance. On compare $p(F \cap S)$ au produit des probabilités :

$$\begin{aligned} p(F) \times p(S) &= 0{,}45 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}18 \\ &= p(F \cap S). \end{aligned}$$

Les événements F et S sont donc indépendants.

Calcul de $p_S(F)$. Comme $p(S) \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_S(F) &= \frac{0{,}18}{0{,}4} \\ &= 0{,}45 \\ &= p(F). \end{aligned}$$

Conclusion. F et S sont indépendants, et $p_S(F) = p(F) = 0{,}45$: savoir que le client vient le samedi ne change pas la probabilité qu'il ait la carte.

Exercice 3

Les oranges de trois producteurs

Une coopérative agricole reçoit ses oranges de trois producteurs : $0{,}4$ des oranges viennent du producteur A, $0{,}35$ du producteur B et le reste du producteur C. Une orange est abîmée avec la probabilité $0{,}03$ si elle vient de A, $0{,}04$ si elle vient de B et $0{,}08$ si elle vient de C (données fictives). On choisit une orange au hasard. On note A l'événement « l'orange vient du producteur A », B et C les événements analogues pour les producteurs B et C, et D l'événement « l'orange est abîmée ».

1.

Calculer $p(C)$ et justifier que A, B et C forment un système complet d'événements.

INDICE

Outil : chaque orange vient d'un seul producteur.

CORRIGÉ

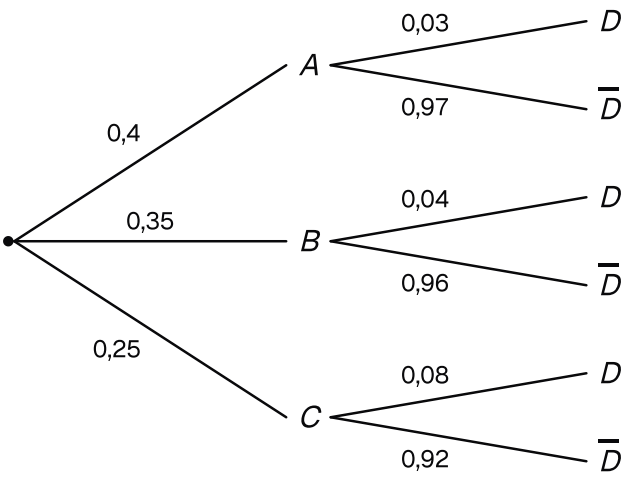
Calcul de $p(C)$. Chaque orange vient de l'un des trois producteurs, donc les trois proportions ont pour somme 1 :

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - 0{,}4 - 0{,}35 \\ &= 0{,}25. \end{aligned}$$

Système complet. On vérifie les trois conditions, en notant Ω l'univers.

- Aucune orange ne provient de deux producteurs à la fois : $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ sont vides.
- Toute orange provient de l'un des trois producteurs : $A \cup B \cup C = \Omega$.
- Les probabilités $0{,}4$, $0{,}35$ et $0{,}25$ sont non nulles.

Conclusion. $p(C) = 0{,}25$, et A, B, C forment un système complet d'événements.



L'arbre des oranges : trois producteurs au premier niveau, puis orange abîmée ou non.

2.

Calculer $p(A \cap D)$, $p(B \cap D)$ et $p(C \cap D)$.

INDICE

Début : sur ton arbre, chaque producteur porte une branche vers D ; multiplie le long de chaque chemin.

CORRIGÉ

Chaque intersection se lit sur un chemin de l'arbre. D'après la formule des probabilités composées, $p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D)$, et de même pour B et C :

- $p(A \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}03 = 0{,}012$;
- $p(B \cap D) = 0{,}35 \times 0{,}04 = 0{,}014$;
- $p(C \cap D) = 0{,}25 \times 0{,}08 = 0{,}02$.

Conclusion. $p(A \cap D) = 0{,}012$, $p(B \cap D) = 0{,}014$ et $p(C \cap D) = 0{,}02$.

3.

En déduire la probabilité que l'orange choisie soit abîmée.

INDICE

Outil : formule des probabilités totales avec le système complet A, B, C.

CORRIGÉ

D'après la question 1, A, B et C forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p(B \cap D) \\ &\quad + p(C \cap D) \\ &= 0{,}012 + 0{,}014 + 0{,}02 \\ &= 0{,}046. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que l'orange choisie soit abîmée vaut $0{,}046$.

4.

L'orange choisie est abîmée. Calculer la probabilité qu'elle vienne du producteur A.

INDICE

Point délicat : on cherche $p_D(A)$, et non $p_A(D)$, qui vaut $0{,}03$.

CORRIGÉ

On cherche $p_D(A)$. Comme $p(D) \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_D(A) &= \frac{p(A \cap D)}{p(D)} \\ &= \frac{0{,}012}{0{,}046} \\ &= \frac{12}{46} \\ &= \frac{6}{23}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que l'orange est abîmée, la probabilité qu'elle vienne du producteur A vaut $\frac{6}{23}$.

5.

Pour une orange abîmée, quel producteur est le plus probable ?

INDICE

Ensuite : calcule de la même façon $p_D(B)$ et $p_D(C)$, puis compare les trois fractions.

CORRIGÉ

Les deux autres probabilités. De la même façon :

$$p_D(B) = \frac{0{,}014}{0{,}046} = \frac{14}{46} = \frac{7}{23},$$

$$p_D(C) = \frac{0{,}02}{0{,}046} = \frac{20}{46} = \frac{10}{23}.$$

Contrôle. Une orange abîmée vient de l'un des trois producteurs : $\frac{6}{23} + \frac{7}{23} + \frac{10}{23} = 1$.

Comparaison. Les trois fractions ont le même dénominateur ; la plus grande est $\frac{10}{23}$.

Conclusion. Le producteur C est le plus probable, alors qu'il ne fournit que $0{,}25$ des oranges.

Exercice 4

Les annulations d'une excursion

Une agence de voyage enregistre 4 réservations pour une excursion. Chaque client annule sa réservation avec la probabilité $0{,}2$, indépendamment des autres clients (données fictives).

1.

Calculer la probabilité qu'aucun client n'annule.

INDICE

Outil : les quatre clients sont indépendants : on multiplie les probabilités de « ne pas annuler ».

CORRIGÉ

Modèle. Chaque client annule avec la probabilité $0{,}2$ et garde sa réservation avec la probabilité $1-0{,}2=0{,}8$. Les quatre clients décident indépendamment les uns des autres.

Calcul. D'après la formule des épreuves répétées, avec $n=4$ et $k=0$ annulation :

$$\begin{aligned} C_4^0\times 0{,}2^0\times 0{,}8^4 &= 0{,}8^4\\ &= 0{,}4096. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité qu'aucun client n'annule vaut $0{,}4096$.

2.

Calculer la probabilité qu'exactement un client annule.

INDICE

Début : applique la formule des épreuves répétées avec $n=4$, $k=1$ et la probabilité $0{,}2$ pour une annulation.

CORRIGÉ

D'après la formule des épreuves répétées, avec $n=4$ et $k=1$, et en utilisant $0{,}8^3=0{,}512$:

$$\begin{aligned} &C_4^1\times 0{,}2\times 0{,}8^3\\ &=4\times 0{,}2\times 0{,}512\\ &=0{,}4096. \end{aligned}$$

Remarque. On retrouve la probabilité de la question 1, car $4\times 0{,}2=0{,}8$: les produits $4\times 0{,}2\times 0{,}8^3$ et $0{,}8^4$ sont égaux.

Conclusion. La probabilité qu'exactement un client annule vaut $0{,}4096$.

3.

Calculer la probabilité qu'au moins un client annule.

INDICE

Outil : le contraire de « au moins un client annule » est « aucun client n'annule ».

CORRIGÉ

« Au moins un client annule » est le contraire de « aucun client n'annule ». D'après la question 1, sa probabilité vaut :

$$1 - 0{,}4096 = 0{,}5904.$$

Conclusion. La probabilité qu'au moins un client annule vaut $0{,}5904$.

4.

En déduire la probabilité qu'au moins deux clients annulent.

INDICE

Point délicat : le contraire de « au moins deux » est « zéro ou un », qui réunit deux cas incompatibles.

CORRIGÉ

« Au moins deux annulations » est le contraire de « aucune ou une seule annulation ». Ces deux cas sont incompatibles ; d'après les questions 1 et 2, leur réunion a pour probabilité :

$$0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192.$$

Par l'événement contraire, la probabilité cherchée vaut :

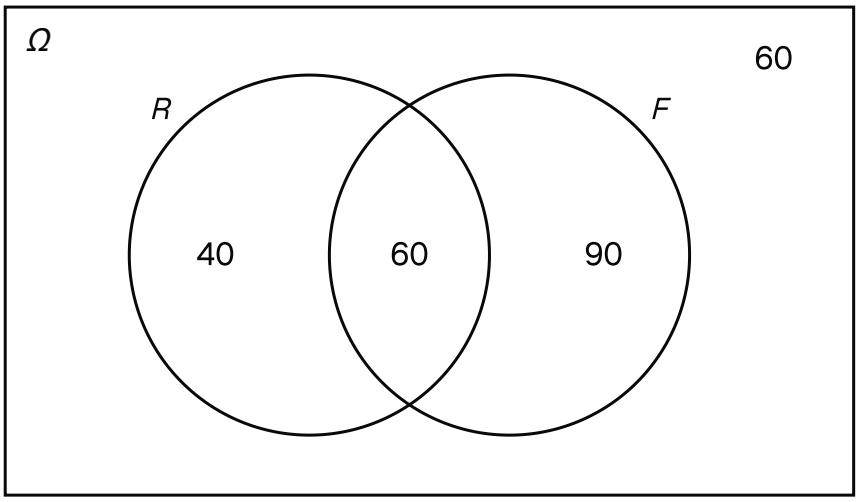
$$1 - 0{,}8192 = 0{,}1808.$$

Conclusion. La probabilité qu'au moins deux clients annulent vaut $0{,}1808$.

Exercice 5

Romans et livres de poche

Une librairie étudie 250 ventes de livres (données fictives) : 100 ventes sont des romans, 150 sont des livres de poche, et 60 ventes sont des romans en format poche. On choisit une vente au hasard ; on note R : « le livre est un roman » et F : « le livre est en format poche ».



Les 250 ventes de la librairie rangées selon R (roman) et F (format poche) : 60 ventes sont à la fois des romans et des livres de poche.

1.

Calculer $p(R)$, $p(F)$ et $p(R \cap F)$.

INDICE

Outil : la vente est choisie au hasard parmi 250 : divise chaque effectif par 250.

CORRIGÉ

La vente est choisie au hasard parmi les 250 : il y a équiprobabilité, et chaque probabilité est un effectif divisé par 250.

- $p(R) = \dfrac{100}{250} = \dfrac{2}{5}$;
- $p(F) = \dfrac{150}{250} = \dfrac{3}{5}$;
- $p(R \cap F) = \dfrac{60}{250} = \dfrac{6}{25}$.

Conclusion. $p(R) = \dfrac{2}{5}$, $p(F) = \dfrac{3}{5}$ et $p(R \cap F) = \dfrac{6}{25}$.

2.

Calculer $p_R(F)$.

INDICE

Outil : $p_R(F) = \dfrac{p(R \cap F)}{p(R)}$, ou bien la part des livres de poche parmi les 100 romans.

CORRIGÉ

Comme $p(R) \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_R(F) &= \frac{p(R \cap F)}{p(R)} \\ &= \frac{6}{25} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Contrôle : parmi les 100 romans, 60 sont en format poche, soit la proportion $\dfrac{60}{100}$, qui vaut bien $\dfrac{3}{5}$.

Conclusion. $p_R(F) = \dfrac{3}{5}$.

3.

Comparer $p_R(F)$ et $p(F)$. Que peut-on en déduire pour R et F ? Le vérifier avec la définition.

INDICE

Point délicat : la propriété qui relie indépendance et probabilité conditionnelle exige $p(R) \neq 0$.

CORRIGÉ

Comparaison. D'après les questions 1 et 2, $p_R(F) = \dfrac{3}{5} = p(F)$.

Déduction. Comme $p(R) \neq 0$, la propriété qui relie indépendance et probabilité conditionnelle s'applique : R et F sont indépendants.

Vérification. Avec la définition de l'indépendance :

$$\begin{aligned} p(R) \times p(F) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{6}{25} \\ &= p(R \cap F). \end{aligned}$$

Conclusion. $p_R(F)$ est égale à $p(F)$, et les événements R et F sont indépendants.

4.

Sans compter les ventes, donner $p_F(R)$, puis contrôler avec les effectifs.

INDICE

Ensuite : l'indépendance est symétrique ; applique la même propriété avec F à la place de R.

CORRIGÉ

Les événements F et R sont indépendants et $p(F) \neq 0$. La même propriété, appliquée avec F à la place de R, donne $p_F(R) = p(R) = \dfrac{2}{5}$.

Contrôle. Parmi les 150 livres de poche, 60 sont des romans, et $\dfrac{60}{150} = \dfrac{2}{5}$.

Conclusion. Sans compter les ventes, $p_F(R) = \dfrac{2}{5}$, ce que confirment les effectifs.

Exercice 6

Un assortiment de stylos

Un assortiment contient 6 stylos indiscernables au toucher : 3 bleus, 2 rouges et 1 vert (situation fictive). On en tire simultanément 2 au hasard, et l'on note X le nombre de stylos bleus obtenus.

1.

Combien de tirages sont possibles ? Quelles valeurs peut prendre X ?

INDICE

Outil : un tirage simultané de 2 stylos parmi 6 se compte avec C_6^2.

CORRIGÉ

Nombre de tirages. Un tirage simultané de 2 stylos est une partie à 2 éléments de l'ensemble des 6 stylos :

$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Les stylos sont tirés au hasard : ces 15 tirages sont équiprobables.

Valeurs de X. Les 2 stylos tirés comportent 0, 1 ou 2 stylos bleus, et chacun de ces cas est possible, car l'assortiment contient 3 bleus et 3 autres stylos.

Conclusion. Il y a 15 tirages possibles, et X prend les valeurs 0, 1 et 2.

2.

Déterminer la loi de probabilité de X.

INDICE

Début : pour $(X = 1)$, choisis 1 bleu parmi 3 **et** 1 autre stylo parmi les 3 qui ne sont pas bleus.

CORRIGÉ

On compte les tirages favorables à chaque valeur ; l'assortiment contient 3 stylos bleus et 3 stylos non bleus.

- $(X = 0)$: 2 stylos parmi les 3 non bleus, soit $C_3^2 = 3$ tirages.
- $(X = 1)$: 1 bleu parmi 3 et 1 non bleu parmi 3, soit $C_3^1 \times C_3^1 = 9$ tirages.
- $(X = 2)$: 2 stylos parmi les 3 bleus, soit $C_3^2 = 3$ tirages.

Par équiprobabilité, on divise chaque effectif par 15 : $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ et $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Conclusion. La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Contrôle : $\frac{3 + 9 + 3}{15} = 1$.

3.

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

INDICE

Point délicat : $E(X^2)$ se calcule avec les carrés 0, 1 et 4 des valeurs.

CORRIGÉ

Espérance. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Calcul de $E(X^2)$. On utilise les carrés 0, 1 et 4 des valeurs :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} \\ &\quad + 4 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Variance et écart-type. D'après la formule $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$:

$$V(X) = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}63.$$

Conclusion. $E(X) = 1$, $V(X) = \dfrac{2}{5}$ et $\sigma(X) \approx 0{,}63$. En moyenne, on tire un stylo bleu.

4.

La variable X suit-elle une loi binomiale ? Justifier.

INDICE

Outil : une loi binomiale demande des épreuves répétées de façon indépendante.

CORRIGÉ

Une loi binomiale compte les succès d'une épreuve répétée de façon indépendante. Tirer 2 stylos simultanément revient à les tirer l'un après l'autre sans remise : après le premier tirage, la composition de l'assortiment a changé. Les deux tirages ne sont donc pas indépendants.

Contrôle. Au premier tirage, un stylo bleu a la probabilité $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Si X suivait la loi $\mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, on aurait :

$$p(X = 1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

alors que la question 2 donne $p(X = 1) = \frac{3}{5}$.

Conclusion. Non, X ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 7

Le contrôle de cinq chemises

Dans une usine de textile, une chemise présente un défaut de couture avec la probabilité $0{,}1$ (données fictives). Un contrôleur prélève 5 chemises dans un stock assez grand pour que l'on assimile ces prélèvements à des tirages avec remise. On note X le nombre de chemises défectueuses parmi les 5.

1.

Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

INDICE

Outil : une épreuve à deux issues, répétée de façon indépendante, et X qui compte les succès.

CORRIGÉ

L'épreuve. Contrôler une chemise est une épreuve à deux issues : défectueuse, appelée succès, de probabilité $0{,}1$, ou correcte.

La répétition. Les prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise : l'épreuve est répétée 5 fois de façon indépendante.

La variable. X compte le nombre de succès, c'est-à-dire de chemises défectueuses.

Conclusion. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5;0{,}1)$, de paramètres 5 et $0{,}1$.

2.

Calculer $p(X=0)$, puis la probabilité qu'au moins une chemise soit défectueuse.

INDICE

Début : $p(X=0)=0{,}9^5$; « au moins une » est le contraire de $(X=0)$.

CORRIGÉ

Calcul de $p(X=0)$. Aucun succès, donc $k=0$:

$$\begin{aligned} p(X=0) &= C_5^0 \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^5 \\ &= 0{,}59049. \end{aligned}$$

Au moins une chemise défectueuse. C'est l'événement $(X \geq 1)$, contraire de $(X=0)$:

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - 0{,}59049 \\ &= 0{,}40951. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X=0)=0{,}59049$, et la probabilité qu'au moins une chemise soit défectueuse vaut $0{,}40951$.

3.

Calculer la probabilité qu'exactement une chemise soit défectueuse.

INDICE

Outil : $p(X=1) = C_5^1 \times 0{,}1 \times 0{,}9^4$.

CORRIGÉ

On applique la loi binomiale avec $k=1$, en utilisant $C_5^1 = 5$ et $0{,}9^4 = 0{,}6561$:

$$\begin{aligned} p(X=1) &= 5 \times 0{,}1 \times 0{,}9^4 \\ &= 0{,}5 \times 0{,}6561 \\ &= 0{,}32805. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité qu'exactement une chemise soit défectueuse vaut $0{,}32805$.

4.

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, puis interpréter $E(X)$.

INDICE

Point délicat : $V(X) = np(1-p)$; l'écart-type est la racine carrée de la variance.

CORRIGÉ

Espérance et variance. Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(5;0{,}1)$:

$$E(X) = 5 \times 0{,}1 = 0{,}5,$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 5 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}45. \end{aligned}$$

Écart-type. $\sigma(X) = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}67$.

Interprétation. Sur un grand nombre de contrôles de 5 chemises, on trouve en moyenne $0{,}5$ chemise défectueuse par contrôle, soit une chemise défectueuse pour deux contrôles.

Conclusion. $E(X) = 0{,}5$, $V(X) = 0{,}45$ et $\sigma(X) \approx 0{,}67$.