BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Application	8

Exercice 1

Les livres de la vitrine d'une librairie

Une librairie dispose de 9 titres différents pour décorer sa vitrine (données fictives).

1.

La libraire choisit 4 titres, sans ordre, pour une affiche. Combien de choix différents sont possibles ?

INDICE

Outil : l'ordre des titres ne compte pas et aucun titre ne se répète : c'est un choix simultané.

CORRIGÉ

Choisir 4 titres sans ordre et sans répétition, c'est choisir une partie à 4 éléments parmi 9 : on compte des combinaisons.

$$\begin{aligned} C_9^4 &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{3024}{24} \\ &= 126. \end{aligned}$$

Conclusion. La libraire peut faire 126 choix différents.

2.

Elle place 3 titres différents sur un podium : une première, une deuxième et une troisième marche. Combien de podiums sont possibles ?

INDICE

Outil : l'ordre des marches compte et un titre ne peut pas occuper deux marches : on compte des arrangements.

CORRIGÉ

Un podium est une liste ordonnée de 3 titres distincts choisis parmi 9 : l'ordre compte et aucun titre ne se répète, c'est un arrangement.

$$\begin{aligned} A_9^3 &= 9 \times 8 \times 7 \\ &= 504. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 504 podiums possibles.

3.

Pendant trois mois, elle met chaque mois un titre en avant ; un même titre peut revenir. Combien de programmes de trois mois sont possibles ?

INDICE

Point délicat : un titre peut être choisi plusieurs fois, donc ce ne sont plus des arrangements.

CORRIGÉ

Un titre peut revenir : chaque mois, la libraire a 9 choix, quels que soient les choix des mois précédents. D'après le principe multiplicatif :

$$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729.$$

Conclusion. Il y a 729 programmes de trois mois possibles.

Exercice 2

Le ticket gagnant d'un concours d'entreprise

Pour son concours annuel, une entreprise tire au sort un ticket parmi 12 tickets numérotés de 1 à 12 (données fictives). On relève le numéro du ticket tiré.

1.

Décrire l'univers Ω de cette expérience et donner son cardinal.

INDICE

Outil : l'univers est l'ensemble de tous les numéros qui peuvent sortir.

CORRIGÉ

Une issue est le numéro du ticket tiré. L'univers est donc :

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

Conclusion. Ω est l'ensemble des entiers de 1 à 12, et $\mathrm{card}(\Omega) = 12$.

2.

On considère les événements A : « le numéro est un multiple de 3 » et B : « le numéro est supérieur ou égal à 10 ». Écrire A et B sous forme d'ensembles.

INDICE

Début : pour A, écris la liste des multiples de 3 compris entre 1 et 12.

CORRIGÉ

Les multiples de 3 compris entre 1 et 12 sont 3, 6, 9 et 12. Les numéros supérieurs ou égaux à 10 sont 10, 11 et 12.

Conclusion. $A = \{3, 6, 9, 12\}$ et $B = \{10, 11, 12\}$.

3.

Écrire les événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

INDICE

Point délicat : dans $A \cup B$, le numéro 12, commun aux deux événements, ne s'écrit qu'une fois.

CORRIGÉ

Contraire de A. $\overline{A}$ contient les numéros de Ω qui ne sont pas multiples de 3.

Intersection. Parmi les éléments de B, seul 12 est un multiple de 3.

Réunion. On réunit les éléments de A et ceux de B, en n'écrivant qu'une fois le numéro 12, commun aux deux.

Conclusion.

- $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$;
- $A \cap B = \{12\}$;
- $A \cup B = \{3, 6, 9, 10, 11, 12\}$.

4.

Soit C : « le numéro est inférieur ou égal à 2 ». Les événements A et C sont-ils incompatibles ? Et les événements B et $\overline{A}$?

INDICE

Outil : deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide.

CORRIGÉ

A et C. On a $C = \{1, 2\}$. Aucun de ces deux numéros n'est un multiple de 3, donc $A \cap C = \varnothing$.

B et $\overline{A}$. Les numéros 10 et 11 sont dans B et ne sont pas multiples de 3 : $B \cap \overline{A} = \{10, 11\}$, qui n'est pas vide.

Conclusion. A et C sont incompatibles ; B et $\overline{A}$ ne sont pas incompatibles.

Exercice 3

Les paiements à la caisse d'un supermarché

Dans un supermarché, on choisit un client au hasard à la caisse (données fictives). Il paie d'une seule façon : en espèces avec la probabilité $0{,}35$, par carte bancaire avec la probabilité $0{,}45$, ou par téléphone.

1.

Calculer la probabilité que le client paie par téléphone.

INDICE

Outil : les trois modes de paiement sont les seules issues ; leurs probabilités ont pour somme 1.

CORRIGÉ

Le client paie d'une seule façon : les trois modes de paiement sont incompatibles et couvrent toutes les issues. Leurs probabilités ont donc pour somme 1, et la probabilité de payer par téléphone vaut :

$$1 - 0{,}35 - 0{,}45 = 0{,}2.$$

Conclusion. Le client paie par téléphone avec la probabilité $0{,}2$.

2.

Calculer la probabilité que le client ne paie pas en espèces.

INDICE

Outil : c'est l'événement contraire de « payer en espèces ».

CORRIGÉ

Soit E l'événement « le client paie en espèces ». L'événement demandé est son contraire $\overline{E}$:

$$\begin{aligned} p(\overline{E}) &= 1 - p(E) \\ &= 1 - 0{,}35 \\ &= 0{,}65. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que le client ne paie pas en espèces vaut $0{,}65$.

3.

On note F : « le client achète des fruits » et G : « le client achète du pain ». On donne $p(F) = 0{,}6$, $p(G) = 0{,}5$ et $p(F \cap G) = 0{,}3$. Calculer $p(F \cup G)$.

INDICE

Point délicat : F et G ne sont pas incompatibles, il faut donc retrancher $p(F \cap G)$.

CORRIGÉ

Les événements F et G ne sont pas incompatibles. D'après la formule de la probabilité d'une réunion :

$$\begin{aligned} p(F \cup G) &= p(F) + p(G) \\ &\quad - p(F \cap G) \\ &= 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 \\ &= 0{,}8. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(F \cup G) = 0{,}8$.

4.

En déduire la probabilité que le client n'achète ni fruits ni pain.

INDICE

Outil : « ni fruits ni pain » est le contraire de « des fruits ou du pain ».

CORRIGÉ

« Ni fruits ni pain » est le contraire de « des fruits ou du pain », c'est-à-dire de $F \cup G$. D'après la question 3 :

$$\begin{aligned} 1 - p(F \cup G) &= 1 - 0{,}8 \\ &= 0{,}2. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que le client n'achète ni fruits ni pain vaut $0{,}2$.

Exercice 4

Des pots de miel prélevés dans une coopérative

Une coopérative agricole range dans une caisse 12 pots de miel : 5 pots de miel de thym et 7 pots de miel d'oranger (données fictives). Pour un contrôle, on prélève au hasard et simultanément 3 pots de la caisse.

1.

Justifier qu'il y a équiprobabilité, puis montrer que le nombre de prélèvements possibles est 220.

INDICE

Outil : un prélèvement simultané est une partie de la caisse, donc une combinaison.

CORRIGÉ

Équiprobabilité. Les pots sont prélevés au hasard : tous les prélèvements ont la même probabilité.

Nombre de prélèvements. Un prélèvement simultané est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 12 pots :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\Omega) &= C_{12}^{3} \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 220.\end{aligned}$$

Conclusion. Il y a équiprobabilité, et le nombre de prélèvements possibles est 220.

2.

Calculer la probabilité que les trois pots prélevés contiennent du miel de thym.

INDICE

Début : compte les parties à 3 pots parmi les 5 pots de thym, puis divise par 220.

CORRIGÉ

Un prélèvement de trois pots de thym est une partie à 3 éléments des 5 pots de thym : il y en a $C_5^3 = 10$. Par équiprobabilité, la probabilité cherchée vaut :

$$\frac{10}{220} = \frac{1}{22}.$$

Conclusion. La probabilité que les trois pots contiennent du miel de thym est $\dfrac{1}{22}$.

3.

Calculer la probabilité qu'aucun pot ne contienne du miel de thym, puis la probabilité qu'au moins un pot en contienne.

INDICE

Point délicat : « au moins un pot de thym » se calcule par son contraire, « aucun pot de thym ».

CORRIGÉ

Aucun pot de thym. Les 3 pots sont alors pris parmi les 7 pots d'oranger : il y a $C_7^3 = 35$ prélèvements. Par équiprobabilité, la probabilité vaut :

$$\frac{35}{220} = \frac{7}{44}.$$

Au moins un pot de thym. Cet événement est le contraire du précédent. Sa probabilité vaut :

$$1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}.$$

Conclusion. La probabilité qu'aucun pot ne contienne du miel de thym est $\frac{7}{44}$; celle qu'au moins un pot en contienne est $\frac{37}{44}$.

Exercice 5

Les circuits guidés d'une agence de voyage

Une agence de voyage a servi 200 clients pendant un mois (données fictives). Parmi les 120 clients qui ont voyagé au Maroc, 30 ont choisi un circuit guidé ; parmi les 80 clients qui ont voyagé à l'étranger, 50 ont choisi un circuit guidé. On choisit un client au hasard et l'on note M : « le client a voyagé au Maroc » et G : « le client a choisi un circuit guidé ».

1.

Calculer $p(M)$, $p(G)$ et $p(M \cap G)$.

INDICE

Outil : le client est choisi au hasard, donc chaque probabilité est un effectif divisé par 200.

CORRIGÉ

Le client est choisi au hasard parmi les 200 : il y a équiprobabilité, et chaque probabilité est un effectif divisé par 200.

Événement M. 120 clients ont voyagé au Maroc : $p(M) = \dfrac{120}{200} = \dfrac{3}{5}$.

Événement G. Le nombre de clients en circuit guidé est $30 + 50 = 80$, donc $p(G) = \dfrac{80}{200} = \dfrac{2}{5}$.

Événement $M \cap G$. 30 clients ont voyagé au Maroc en circuit guidé : $p(M \cap G) = \dfrac{30}{200} = \dfrac{3}{20}$.

Conclusion. $p(M) = \dfrac{3}{5}$, $p(G) = \dfrac{2}{5}$ et $p(M \cap G) = \dfrac{3}{20}$.

2.

Calculer $p_M(G)$ et traduire ce nombre par une phrase.

INDICE

Outil : $p_M(G) = \dfrac{p(M \cap G)}{p(M)}$, avec $p(M) \neq 0$.

CORRIGÉ

Comme $p(M) \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_M(G) &= \frac{p(M \cap G)}{p(M)} \\ &= \frac{3}{20} \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Contrôle avec les effectifs : parmi les 120 clients qui ont voyagé au Maroc, 30 ont choisi un circuit guidé, et $\dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion. $p_M(G) = \dfrac{1}{4}$: parmi les clients qui ont voyagé au Maroc, un sur quatre a choisi un circuit guidé.

3.

Calculer $p_G(M)$.

INDICE

Point délicat : cette fois, on sait que le client a choisi un circuit guidé : on se restreint aux 80 clients de G.

CORRIGÉ

On sait cette fois que le client a choisi un circuit guidé. Comme $p(G) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p_G(M) &= \frac{p(M \cap G)}{p(G)} \\ &= \frac{3}{20} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Contrôle : parmi les 80 clients en circuit guidé, 30 ont voyagé au Maroc, soit la proportion $\frac{30}{80}$, qui vaut bien $\frac{3}{8}$.

Conclusion. $p_G(M) = \frac{3}{8}$. Ce nombre diffère de $p_M(G) = \frac{1}{4}$: les deux conditionnements ne se confondent pas.

Exercice 6

Deux machines dans une usine de textile

Une usine de textile fabrique des serviettes sur deux machines. La machine M_1 fabrique $0{,}6$ des serviettes et la machine M_2 le reste. Une serviette de M_1 est défectueuse avec la probabilité $0{,}05$; une serviette de M_2, avec la probabilité $0{,}1$ (données fictives). On choisit une serviette au hasard ; on note encore M_1 l'événement « la serviette vient de M_1 », M_2 l'événement « la serviette vient de M_2 », et D : « la serviette est défectueuse ».

1.

Donner $p(M_2)$, $p_{M_1}(\overline{D})$ et $p_{M_2}(\overline{D})$. Décrire l'arbre pondéré de la situation ; tu peux le tracer sur ton cahier.

INDICE

Outil : sur les branches issues d'un même nœud, les probabilités ont pour somme 1.

CORRIGÉ

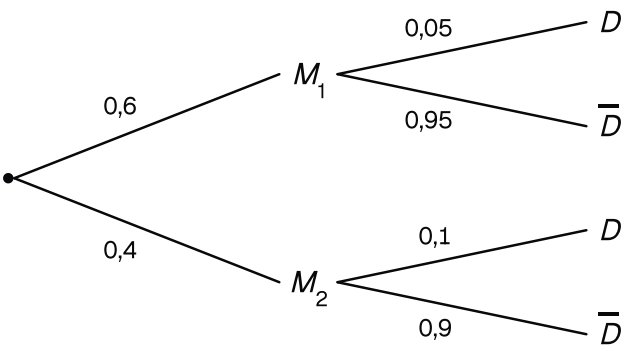
Probabilités manquantes. Sur les branches issues d'un même nœud, les probabilités ont pour somme 1 :

- $p(M_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;
- $p_{M_1}(\overline{D}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$;
- $p_{M_2}(\overline{D}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Arbre pondéré. Le premier niveau donne la machine, le second l'état de la serviette.

- De la racine partent une branche vers M_1, de probabilité $0{,}6$, et une branche vers M_2, de probabilité $0{,}4$.
- De M_1 partent une branche vers D, de probabilité $0{,}05$, et une branche vers $\overline{D}$, de probabilité $0{,}95$.
- De M_2 partent une branche vers D, de probabilité $0{,}1$, et une branche vers $\overline{D}$, de probabilité $0{,}9$.

Conclusion. $p(M_2) = 0{,}4$, $p_{M_1}(\overline{D}) = 0{,}95$ et $p_{M_2}(\overline{D}) = 0{,}9$; l'arbre pondéré est décrit ci-dessus.



L'arbre pondéré des serviettes : la machine d'abord, puis l'état de la serviette.

2.

Calculer la probabilité que la serviette vienne de M_1 et soit défectueuse.

INDICE

Outil : une intersection se lit sur un chemin de l'arbre : on multiplie les probabilités de ses branches.

CORRIGÉ

L'événement $M_1 \cap D$ correspond au chemin de l'arbre qui passe par M_1 puis par D. D'après la formule des probabilités composées, avec $p(M_1) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(M_1 \cap D) &= p(M_1) \times p_{M_1}(D) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}03. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que la serviette vienne de M_1 et soit défectueuse vaut $0{,}03$.

3.

Justifier que M_1 et M_2 forment un système complet d'événements.

INDICE

Outil : chaque serviette sort d'une machine, et d'une seule.

CORRIGÉ

On vérifie les trois conditions, en notant Ω l'univers.

- Aucune serviette ne sort à la fois des deux machines : $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.
- Toute serviette sort de l'une des deux machines : $M_1 \cup M_2 = \Omega$.
- Les probabilités $p(M_1) = 0{,}6$ et $p(M_2) = 0{,}4$ sont non nulles.

Conclusion. M_1 et M_2 forment un système complet d'événements.

4.

En déduire $p(D)$.

INDICE

Début : deux chemins de l'arbre mènent à D : celui qui passe par M_1 et celui qui passe par M_2.

CORRIGÉ

D'après la question 3, la formule des probabilités totales s'applique avec le système complet M_1, M_2. Le premier produit vaut $0{,}03$ d'après la question 2 :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(M_1) \times p_{M_1}(D) \\ &\quad + p(M_2) \times p_{M_2}(D) \\ &= 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}03 + 0{,}04 \\ &= 0{,}07. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(D) = 0{,}07$.

Exercice 7

Les départs d'une ligne d'autocar

Une compagnie de transport en autocar étudie la ligne qui relie deux villes (données fictives). Pour un voyage choisi au hasard, on note H : « l'autocar part à l'heure » et K : « l'autocar est complet ». On donne $p(H) = 0{,}9$, $p(K) = 0{,}3$ et $p(H \cap K) = 0{,}25$.

1.

Les événements H et K sont-ils indépendants ?

INDICE

Outil : compare $p(H \cap K)$ au produit $p(H) \times p(K)$.

CORRIGÉ

On compare $p(H \cap K)$ au produit $p(H) \times p(K)$.

On a $p(H) \times p(K) = 0{,}9 \times 0{,}3 = 0{,}27$, alors que $p(H \cap K) = 0{,}25$. Les deux nombres sont différents.

Conclusion. Les événements H et K ne sont pas indépendants.

2.

Un voyageur prend cet autocar 4 jours de suite. On admet que les départs de ces quatre jours sont indépendants et que, chaque jour, l'autocar part en retard avec la probabilité $0{,}1$. On note X le nombre de jours où l'autocar part en retard. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

INDICE

Outil : repère l'épreuve, ses deux issues, le nombre de répétitions et ce que compte X.

CORRIGÉ

L'épreuve. Observer le départ d'un jour est une épreuve à deux issues : le retard, appelé succès, de probabilité $0{,}1$, ou le départ à l'heure.

La répétition. Cette épreuve est répétée 4 fois, et les départs des quatre jours sont indépendants.

La variable. X compte le nombre de succès, c'est-à-dire de jours de retard.

Conclusion. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0{,}1)$, de paramètres 4 et $0{,}1$.

3.

Calculer la probabilité que l'autocar parte en retard exactement un jour sur les quatre.

INDICE

Début : il s'agit de $p(X=1) = C_4^1 \times 0{,}1^1 \times 0{,}9^3$.

CORRIGÉ

On applique la loi binomiale $\mathcal{B}(4;0{,}1)$ avec $k=1$, en utilisant $0{,}9^3 = 0{,}729$:

$$\begin{aligned} p(X=1) &= C_4^1 \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 \\ &= 4 \times 0{,}1 \times 0{,}729 \\ &= 0{,}2916. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité que l'autocar parte en retard exactement un jour sur les quatre vaut $0{,}2916$.

4.

Calculer l'espérance de X et l'interpréter.

INDICE

Outil : pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, l'espérance vaut np.

CORRIGÉ

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ vaut np. Ici :

$$E(X) = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4.$$

Conclusion. $E(X) = 0{,}4$: sur un grand nombre de périodes de quatre jours, l'autocar part en retard en moyenne $0{,}4$ jour par période.

Exercice 8

Les colis livrés en retard

Une petite entreprise de livraison note X le nombre de colis livrés en retard au cours d'une journée choisie au hasard (données fictives). La loi de X est donnée par le tableau suivant, où a est un réel :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}2$	a

1.

Calculer a.

INDICE

Outil : la somme des probabilités d'une loi vaut 1.

CORRIGÉ

La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + a = 1.$$

Comme $0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9$, on obtient $a = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Conclusion. $a = 0{,}1$.

2.

Calculer la probabilité qu'au moins deux colis soient livrés en retard au cours de la journée.

INDICE

Début : l'événement $(X \geq 2)$ est formé de $(X = 2)$ et de $(X = 3)$, qui sont incompatibles.

CORRIGÉ

X ne dépasse pas 3 : l'événement $(X \geq 2)$ est la réunion des événements incompatibles $(X = 2)$ et $(X = 3)$.

$$\begin{aligned} &p(X \geq 2) \\ &= p(X = 2) + p(X = 3) \\ &= 0{,}2 + 0{,}1 \\ &= 0{,}3. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité qu'au moins deux colis soient livrés en retard vaut $0{,}3$.

3.

Calculer l'espérance $E(X)$ et l'interpréter.

INDICE

Outil : $E(X)$ est la somme des produits $x_i\,p(X=x_i)$.

CORRIGÉ

Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\times 0{,}4 + 1\times 0{,}3 \\ &\quad + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}1 \\ &= 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $E(X)=1$: sur un grand nombre de journées, l'entreprise livre en moyenne un colis en retard par jour.

4.

Calculer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

INDICE

Point délicat : calcule d'abord $E(X^2)$ avec les carrés des valeurs, puis retranche le carré de $E(X)$.

CORRIGÉ

Calcul de $E(X^2)$. On utilise les carrés 0, 1, 4 et 9 des valeurs :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0\times 0{,}4 + 1\times 0{,}3 \\ &\quad + 4\times 0{,}2 + 9\times 0{,}1 \\ &= 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}9 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Variance. D'après la formule de calcul de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= 2 - 1^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Écart-type. $\sigma(X)=\sqrt{1}=1$.

Conclusion. $V(X)=1$ et $\sigma(X)=1$.