BURHAN

# Calcul des probabilités

2ème Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-des-probabilites/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Calcul des probabilités | Semestre 2 |

## Entrée

Une boutique de vêtements fête son ouverture (données fictives). Dans une boîte, il y a $10$ bons d'achat : $3$ bons de $200$ dirhams et $7$ bons de $50$ dirhams. Une cliente plonge la main et tire $2$ bons en même temps, au hasard.

Elle espère au moins un bon de $200$ dirhams. Avant tout calcul, écoute ton intuition.

**Devine : Au moins un gros bon ?**

La cliente a-t-elle plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un bon de $200$ dirhams ?

**A.** Non : il n'y a que $3$ gros bons sur $10$.

**Faux.**

Faux. La part $3$ sur $10$ concerne un seul bon tiré. Avec deux bons, la cliente a deux occasions de tomber sur un gros bon.

**B.** Exactement une chance sur deux : elle gagne ou elle perd.

**Faux.**

Faux. Deux résultats possibles ne sont pas forcément aussi probables l'un que l'autre. Tout dépend du nombre de façons d'obtenir chacun.

**C.** Oui, un peu plus d'une chance sur deux.

**Juste.**

Juste. Le calcul donne $\frac{8}{15}$, un peu plus que $\frac{1}{2}$. Tu sauras le faire dans ce chapitre.

**D.** On ne peut pas le savoir avant le tirage.

**Faux.**

Faux. Le résultat d'un tirage est imprévisible, mais sa probabilité se calcule à l'avance. C'est l'objet du chapitre.

**Correction**

Il y a $45$ paires de bons possibles (tu sauras les compter un peu plus loin), toutes aussi probables. Parmi elles, $21$ ne contiennent aucun bon de $200$ dirhams.

Donc $45 - 21 = 24$ paires en contiennent au moins un. La probabilité cherchée vaut :

$$\frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

> C'est un peu plus que $\frac{1}{2}$.

Pour répondre sans deviner, il te faut trois gestes : compter les tirages possibles, décrire l'événement qui t'intéresse, puis calculer sa probabilité.

Les commerçants et les organisateurs de jeux font ces calculs avant de fixer leurs prix ou leurs lots. Tu vas apprendre à les faire, pas à pas.

## Dénombrer : rappels de 1re année

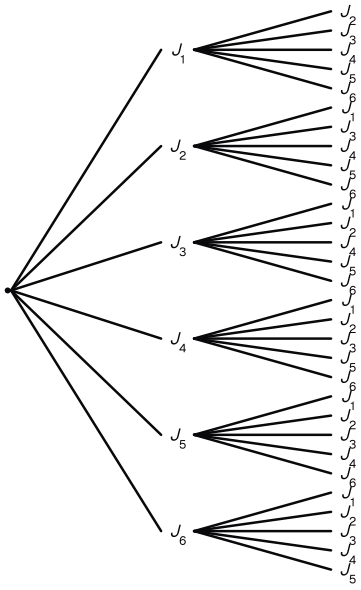
### Trois façons de tirer

Rappel de 1re année : pour calculer une probabilité, on commence par compter des tirages. Prends une urne qui contient $6$ jetons numérotés de $1$ à $6$ (situation fictive). On peut en tirer deux de trois façons :

- **simultanément** : on prend les deux jetons d'un seul geste ;
- **successivement sans remise** : on sort un premier jeton et on le met de côté, puis on prend le second parmi les autres ;
- **successivement avec remise** : on tire un jeton, on note son numéro, on le remet, puis on en tire un second.

> **Vérifie : Combien de tirages ?**
>
> On tire $2$ jetons de cette urne **l'un après l'autre, sans remise**, et l'on note les numéros dans l'ordre. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
>
> **A.** $15$
>
> **Faux.**
> Faux. $15$ compte les paires sans ordre : c'est le tirage simultané. Ici, $(2, 5)$ et $(5, 2)$ sont deux résultats différents.
>
> **B.** $30$
>
> **Juste.**
> Juste. $6$ choix pour le premier jeton, puis $5$ pour le second : $6 \times 5 = 30$.
>
> **C.** $36$
>
> **Faux.**
> Faux. $6 \times 6 = 36$ compte aussi des résultats comme $(4, 4)$, impossibles sans remise.
>
> **D.** $12$
>
> **Faux.**
> Faux. $6 \times 2 = 12$ multiplie par le nombre de jetons tirés au lieu de multiplier les nombres de choix.
>
> **Correction**

> Le premier jeton peut être choisi de $6$ façons. Quel que soit ce premier jeton, il en reste $5$ pour le second. D'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 5 = 30$ résultats ordonnés.



**Les deux tirages sans remise dans l'urne de six jetons : six branches au premier tirage, puis cinq seulement, le jeton sorti ne pouvant plus revenir.**

## Compter des listes

**Propriété : Principe multiplicatif**

Une situation se décompose en $k$ choix successifs. Si le premier choix peut se faire de $n_1$ façons, puis, quel que soit ce premier choix, le deuxième de $n_2$ façons, et ainsi de suite jusqu'au $k$-ième choix, qui peut se faire de $n_k$ façons, alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

En particulier, le nombre de listes de $p$ éléments, distincts ou non, choisis dans un ensemble à $n$ éléments est $n^p$.

**Exemple : Trois tirages avec remise**

On tire $3$ jetons de l'urne, **avec remise**, et l'on note les numéros dans l'ordre. Chaque tirage offre $6$ choix, quel que soit le précédent.

On obtient une liste de $3$ numéros, distincts ou non : il y en a $6^3 = 216$. Par exemple, $(4, 1, 4)$ est l'une de ces listes.

## Ordre sans répétition

**Propriété : Arrangements et permutations**

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

- Le nombre de listes de $p$ éléments **distincts** choisis dans un ensemble à $n$ éléments (arrangements de $p$ éléments parmi $n$) est
$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$
- Le nombre de façons d'ordonner les $n$ éléments d'un ensemble (permutations) est $A_n^n = n!$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et, par convention, $0! = 1$.

**Exemple : Arrangements et permutations**

Sans remise, $3$ jetons tirés l'un après l'autre donnent des listes ordonnées. Leur nombre est :
$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$
Ranger $4$ jetons côte à côte donne autant d'ordres possibles que :
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

## Sans ordre

**Propriété : Combinaisons**

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Le nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments (combinaisons de $p$ éléments parmi $n$) est $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. Pour $1 \leq p \leq n$, on a aussi $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$. On a $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$ et $C_n^p = C_n^{n-p}$.

**Exemple : Tirage simultané**

Tirer $2$ jetons d'un seul geste revient à choisir une partie à $2$ éléments. Le nombre de tirages est :
$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$
Chaque paire, comme $\{2, 5\}$, correspond à deux tirages ordonnés, $(2, 5)$ et $(5, 2)$. C'est pourquoi on divise $A_6^2 = 30$ par $2! = 2$.

**Remarque : Des rappels admis**

Ces trois résultats ont été vus en 1re année, admis ici : on ne les redémontre pas. Dans ce chapitre, ils servent à compter les issues d'une expérience.

## Choisir le bon modèle

**Méthode : Choisir le modèle de dénombrement**

1. **Lire le tirage** : simultané, successif avec remise ou successif sans remise.
2. **Simultané** : l'ordre ne compte pas ; on compte des combinaisons $C_n^p$.
3. **Successif sans remise** : l'ordre compte et rien ne se répète ; on compte des arrangements $A_n^p$.
4. **Successif avec remise** : l'ordre compte et un jeton peut revenir ; on compte des listes, $n^p$.
5. **Contrôler** sur un petit cas que chaque tirage est compté une seule fois.

**Attention : Un seul modèle pour tout le calcul**

✗ Compter l'univers d'un tirage simultané avec $A_6^2 = 30$, puis l'événement avec des combinaisons.
✓ Un tirage simultané se compte avec $C_6^2 = 15$, pour l'univers **et** pour l'événement.

Mélanger les modèles compte certains tirages deux fois d'un côté et une seule fois de l'autre. De même, compter $6^2$ tirages sans remise ajoute des tirages impossibles, comme $(3, 3)$.

**À toi : Trois jetons d'un seul geste**

Une autre urne contient $8$ jetons : $5$ rouges et $3$ verts (situation fictive). On en tire $3$ simultanément. Combien de tirages sont possibles ? Combien de tirages contiennent exactement $2$ jetons rouges ?

**Indice 1**
Le tirage est simultané : l'ordre ne compte pas. Quel modèle de dénombrement convient ?
**Indice 2**
Pour la seconde question, choisis d'abord les $2$ rouges parmi les $5$, puis le vert parmi les $3$, et multiplie.
**Indice 3**
Point délicat : « exactement $2$ rouges » impose que le troisième jeton soit vert ; ne le choisis pas parmi les $8$.

**Réponse**
Le tirage est simultané : on compte des combinaisons. Le nombre de tirages possibles est :

$$C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56.$$

Pour exactement $2$ rouges, on choisit $2$ rouges parmi $5$, soit $C_5^2 = 10$ façons, et $1$ vert parmi $3$, soit $C_3^1 = 3$ façons.

D'après le principe multiplicatif, $10 \times 3 = 30$ tirages contiennent exactement $2$ rouges.

## Expérience aléatoire et événements

### Décrire les issues

Au comptoir de la boutique, une urne contient $8$ jetons numérotés de $1$ à $8$ (situation fictive). Un client tire un jeton au hasard. Il gagne un foulard si le numéro est pair, ou s'il est au moins égal à $6$.

On ne peut pas prévoir le numéro tiré. Mais on connaît tous les numéros possibles.

**Devine : Les numéros gagnants**

Combien de numéros font gagner le foulard ?

**A.** $7$

**Faux.**
Faux. Tu as ajouté les $4$ numéros pairs et les $3$ numéros au moins égaux à $6$. Or $6$ et $8$ sont dans les deux listes : ils sont comptés deux fois.

**B.** $3$

**Faux.**
Faux. Tu as écarté $6$ et $8$, qui vérifient les deux conditions. Or « ou » accepte aussi le cas où les deux sont vraies.

**C.** $2$

**Faux.**
Faux. Seuls $6$ et $8$ vérifient les deux conditions à la fois. Mais il suffit d'en vérifier une pour gagner.

**D.** $5$

**Juste.**
Juste. Les numéros $2$, $4$, $6$, $7$ et $8$ font gagner.

**Correction**
Les numéros pairs sont $2$, $4$, $6$ et $8$. Les numéros au moins égaux à $6$ sont $6$, $7$ et $8$. Un numéro gagne s'il est dans l'une des deux listes, ou dans les deux : $2$, $4$, $6$, $7$, $8$. Il y en a $5$.

### Le vocabulaire

**Définition : Expérience aléatoire, univers, événement**

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.

- Chaque résultat possible est une **issue** ; l'ensemble des issues est l'**univers**, noté $\Omega$. Dans ce chapitre, $\Omega$ est un ensemble fini.

- Un **événement** est une partie de $\Omega$. L'événement $A$ est **réalisé** lorsque l'issue obtenue appartient à $A$.
- Un événement formé d'une seule issue est un **événement élémentaire** ; $\Omega$ est l'**événement certain** ; l'ensemble vide $\varnothing$ est l'**événement impossible**.

**Exemple : Le jeton de la boutique**

L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, et $\text{card}(\Omega) = 8$ (le nombre d'issues).

L'événement $A$ « le numéro est pair » est la partie $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Si le client tire $6$, $A$ est réalisé.

« Le numéro est $5$ » est l'événement élémentaire $\{5\}$. « Le numéro est $9$ » est impossible : c'est $\varnothing$.

## Combiner des événements

En clair : on décrit un événement par une phrase, puis par une partie de $\Omega$. Les mots « non », « et », « ou » deviennent des opérations sur ces parties.

**Définition : Opérations sur les événements**

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$.

- L'**événement contraire** de $A$, noté $\overline{A}$, est formé des issues de $\Omega$ qui ne sont pas dans $A$ : il est réalisé exactement quand $A$ ne l'est pas.
- L'événement $A \cap B$ (« $A$ et $B$ ») est réalisé quand $A$ et $B$ le sont tous les deux.
- L'événement $A \cup B$ (« $A$ ou $B$ ») est réalisé quand au moins l'un des deux l'est.
- $A$ et $B$ sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$ : ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

**Exemple : Contraire, intersection, réunion**

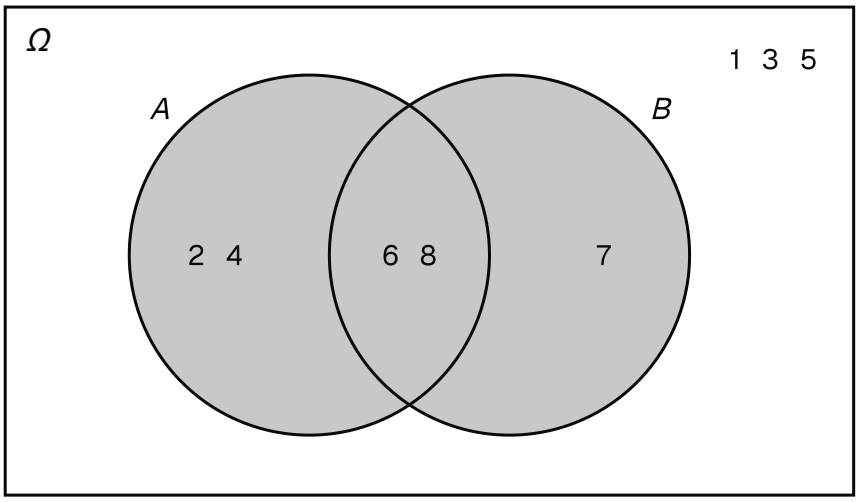
Soit $A = \{2, 4, 6, 8\}$ (numéro pair) et $B = \{6, 7, 8\}$ (numéro au moins égal à $6$).

- $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}$ : le numéro est impair.
- $A \cap B = \{6, 8\}$ : le numéro est pair **et** au moins égal à $6$.
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ : le client gagne le foulard.
- Avec $C = \{1, 2\}$, on a $B \cap C = \varnothing$ : $B$ et $C$ sont incompatibles.

**Attention : « Ou » garde les deux**

✗ $A \cup B$ est réalisé quand $A$ est réalisé ou $B$, mais pas les deux. ✓ $A \cup B$ est aussi réalisé quand $A$ et $B$ le sont tous les deux : $6$ et $8$ appartiennent à $A \cup B$.

Pour « exactement un des deux », retire les issues de $A \cap B$ : on obtient $\{2, 4, 7\}$.




**Le jeton de la boutique : A ∪ B est teinté en entier, y compris la partie commune où sont rangés 6 et 8.**

## Vérifier

**Vérifie : Des événements incompatibles**

Avec $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2\}$ et $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}$, quels événements sont incompatibles ?

**A.** $A$ et $B$

**Faux.**

Faux. $A \cap B = \{6, 8\}$ n'est pas vide : avec le jeton $6$, les deux sont réalisés.

**B.** $B$ et $C$

**Juste.**

Juste. $B \cap C = \varnothing$ : aucun numéro n'est à la fois au moins égal à $6$ et au plus égal à $2$.

**C.** $\overline{A}$ et $B$

**Faux.**

Faux. $\overline{A} \cap B = \{7\}$ : le jeton $7$ réalise les deux. Être décrits par des phrases différentes ne suffit pas.

**D.** $A$ et $C$

**Faux.**

Faux. $A \cap C = \{2\}$ : le jeton $2$ est pair et au plus égal à $2$.

**Correction**

Deux événements sont incompatibles quand leur intersection est vide. On calcule :

- $A \cap B = \{6, 8\}$ ;
- $\overline{A} \cap B = \{7\}$ ;
- $A \cap C = \{2\}$ ;
- $B \cap C = \varnothing$.

Seuls $B$ et $C$ sont incompatibles.

**À toi : Traduire en parties**

Avec la même urne, on note $D$ l'événement « le numéro est impair » et $F$ l'événement « le numéro est au plus égal à $3$ ». Écris $D$, $F$, $\overline{F}$, $D \cap F$ et $D \cup F$. Quels numéros réalisent exactement un des deux événements ?

**Indice 1**
Écris d'abord $D$ et $F$ en listant les numéros de $1$ à $8$ qui conviennent.
**Indice 2**
$D \cap F$ garde les numéros communs ; $D \cup F$ garde les numéros présents dans au moins une des deux parties.
**Indice 3**
Point délicat : « exactement un des deux » retire de $D \cup F$ les numéros de $D \cap F$.

**Réponse**
On lit les numéros dans l'urne :

- $D = \{1, 3, 5, 7\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ ;
- $\overline{F} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ;
- $D \cap F = \{1, 3\}$ ;
- $D \cup F = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

En retirant $1$ et $3$ de $D \cup F$, les numéros qui réalisent exactement un des deux événements sont $2$, $5$ et $7$.

Retiens la traduction : « non » donne le contraire, « et » l'intersection, « ou » la réunion. Une phrase bien traduite rend le calcul de la probabilité presque mécanique.

## Probabilité d'un événement

## Les boissons du café

Au café du quartier, le patron a noté les commandes de ses clients (données fictives). Chaque client commande une seule boisson : du thé ($T$), du café ($K$), du jus ($J$) ou de l'eau minérale ($M$).

Pour un client choisi au hasard, il en déduit ces probabilités :

| issue | $T$ | $K$ | $J$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $0{,}4$ | $0{,}35$ | $0{,}15$ | $0{,}1$ |

**Devine : Une boisson chaude**

Quelle est la probabilité que le client commande une boisson chaude, thé ou café ?

**A.** $0{,}75$

**Juste.**

Juste. $0{,}4 + 0{,}35 = 0{,}75$.

**B.** $0{,}14$

**Faux.**

Faux. $0{,}4 \times 0{,}35 = 0{,}14$ : multiplier ne convient pas ici. Le client prend du thé **ou** du café, jamais les deux : on additionne.

**C.** $0{,}35$

**Faux.**

Faux. $0{,}35$ ne compte que le café ; le thé est aussi une boisson chaude.

**D.** $0{,}25$

**Faux.**

Faux. $0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}25$ est la probabilité d'une boisson froide, le contraire de l'événement demandé.

**Correction**

Les issues $T$ et $K$ forment l'événement « boisson chaude ». Sa probabilité est la somme des probabilités de ses issues : $0{,}4 + 0{,}35 = 0{,}75$.

## Une probabilité sur l'univers

**Définition : Probabilité sur un univers fini**

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Définir une **probabilité** $p$ sur $\Omega$, c'est associer à chaque issue $\omega_i$ un réel $p_i$ tel que

$$p_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

La probabilité d'un événement $A$, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des issues qui le composent. On pose $p(\varnothing) = 0$ ; on a $p(\Omega) = 1$.

**Exemple : Lire la loi du café**

Les quatre nombres du tableau sont positifs, et leur somme vaut $1$ :

$$0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}15 + 0{,}1 = 1.$$

Ils définissent donc bien une probabilité. L'événement « thé ou jus » est $\{T, J\}$, donc :

$$\begin{aligned} p(\{T, J\}) &= 0{,}4 + 0{,}15 \\ &= 0{,}55. \end{aligned}$$

## Trois règles de calcul

Pourquoi est-ce vrai ? La probabilité d'un événement est une somme de probabilités d'issues. Les règles qui suivent viennent de cette seule idée : on regarde quelles issues sont comptées, et combien de fois.

**Propriété : Propriétés d'une probabilité**

Soit $p$ une probabilité sur un univers fini $\Omega$, et $A$ et $B$ deux événements.

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- En particulier, si $A$ et $B$ sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après la définition d'une probabilité, $p(A)$ est une somme de réels positifs ou nuls, donc $p(A) \geq 0$ ; de même, $p(\overline{A}) \geq 0$.

**Étape 2.** Chaque issue de $\Omega$ est dans $A$ ou dans $\overline{A}$, et dans un seul des deux. Donc $p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1$, soit $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. Comme $p(\overline{A}) \geq 0$, on obtient $p(A) \leq 1$.

**Étape 3.** La somme $p(A) + p(B)$ compte une fois les issues de $A \cup B$ qui sont dans un seul des deux événements, et deux fois celles de $A \cap B$. Donc $p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$.

**Étape 4.** Si $A \cap B = \varnothing$, alors $p(A \cap B) = 0$ et l'égalité de l'étape 3 donne la dernière formule.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On passe les issues en revue, une par une, en additionnant leurs probabilités. Chaque issue est dans $A$ ou dans $\overline{A}$, jamais dans les deux : d'où $p(A) + p(\overline{A}) = 1$. Pour la réunion, relis l'étape 3 de la preuve : que se passe-t-il pour les issues communes ?

**Vérifie : La réunion**

Dans la preuve de la formule de la réunion, pourquoi retranche-t-on $p(A \cap B)$ ?

**A.** Parce que $A$ et $B$ sont incompatibles.

**Faux.**
Faux. S'ils étaient incompatibles, $p(A \cap B)$ vaudrait $0$ et il n'y aurait rien à retrancher.

**B.** Pour que le résultat reste inférieur à $1$.
**Faux.**
Faux. La soustraction corrige un comptage ; elle n'est pas un réglage pour rester sous $1$.

**C.** Parce que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
**Faux.**
Faux. Cette égalité n'est pas vraie en général ; elle définit l'indépendance, vue plus loin.

**D.** Ses issues sont comptées deux fois.
**Juste.**
Juste. Les issues de $A \cap B$ sont dans $A$ et dans $B$ : la somme $p(A) + p(B)$ les compte deux fois.

**Correction**
La somme $p(A) + p(B)$ additionne les probabilités des issues de $A$, puis celles de $B$. Une issue de $A \cap B$ y figure donc deux fois. On retranche $p(A \cap B)$ pour qu'elle ne compte plus qu'une fois : on obtient $p(A \cup B)$.

**Exemple : Boisson chaude ou gâteau**

Au même café (données fictives), on note $H$ « boisson chaude », de probabilité $0{,}75$, et $G$ « le client prend un gâteau », de probabilité $0{,}4$. Un client prend une boisson chaude **et** un gâteau avec la probabilité $0{,}3$.

- $p(H \cup G) = 0{,}75 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}85$.
- $p(\overline{H}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ : le client prend une boisson froide.

## Le contraire et « au moins »

**Méthode : Passer par l'événement contraire**

1. **Chercher** dans la question une expression comme « au moins un », « au plus » ou « pas tous » : le contraire se décrit alors plus simplement.
2. **Écrire** le contraire en toutes lettres : le contraire de « au moins un client attend » est « aucun client n'attend ».
3. **Calculer** $p(\overline{A})$, puis $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

**Exemple : Au moins un client attend**

Le patron a aussi noté le nombre de clients qui attendent au comptoir (données fictives) :

| clients | $p$ |
|---|---|
| $0$ | $0{,}2$ |
| $1$ | $0{,}35$ |
| $2$ | $0{,}25$ |
| $3$ ou plus | $0{,}2$ |

L'événement « au moins un client attend » a pour contraire « personne n'attend ». Sa probabilité vaut donc $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Contrôle : $0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}8$.

**Attention : La réunion n'est pas une simple somme**

✗ $p(H \cup G) = 0{,}75 + 0{,}4 = 1{,}15$. ✓ $p(H \cup G) = 0{,}75 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}85$.

Une probabilité supérieure à $1$ signale l'erreur : on a oublié de retrancher $p(H \cap G)$. La somme simple ne vaut que pour des événements incompatibles.

**À toi : Carte et pourboire**

Au café (données fictives), un client paie par carte ($B$) avec la probabilité $0{,}6$. Il laisse un pourboire ($R$) avec la probabilité $0{,}25$. Il fait les deux avec la probabilité $0{,}15$. Calcule $p(B \cup R)$, puis la probabilité qu'il ne fasse ni l'un ni l'autre.

**Indice 1**
Utilise la formule de la réunion : les deux événements ne sont pas incompatibles.
**Indice 2**
$p(B \cup R) = 0{,}6 + 0{,}25 - 0{,}15$.
**Indice 3**
Point délicat : « ni l'un ni l'autre » est le contraire de « l'un ou l'autre », donc de $B \cup R$.

**Réponse**
D'après la formule de la réunion :

$$\begin{aligned} & p(B \cup R) \\ &= p(B) + p(R) \\ &\quad - p(B \cap R) \\ &= 0{,}6 + 0{,}25 - 0{,}15 \\ &= 0{,}7. \end{aligned}$$

L'événement « ni carte ni pourboire » est le contraire de $B \cup R$. Sa probabilité vaut $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

## Équiprobabilité

### Au hasard

**Devine : Rouge ou bleu ?**

Une urne contient $3$ jetons rouges et $2$ jetons bleus, indiscernables au toucher (situation fictive). On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?

**A.** $\frac{1}{2}$

**Faux.**

Faux. Il y a deux couleurs, mais pas autant de jetons de chaque couleur. Ce sont les jetons, pas les couleurs, qui ont la même chance.

**B.** $\frac{2}{5}$

**Faux.**

Faux. $\frac{2}{5}$ est la probabilité de tirer un jeton bleu, le contraire de l'événement demandé.

**C.** $\frac{3}{5}$

**Juste.**

Juste. $3$ jetons rouges sur $5$ jetons, tous avec la même chance.

**D.** $\frac{3}{2}$

**Faux.**

Faux. Tu as divisé le nombre de rouges par le nombre de bleus. Une probabilité ne dépasse jamais $1$.

**Correction**

« Au hasard » et « indiscernables au toucher » signifient que les $5$ jetons ont la même probabilité. L'événement « rouge » contient $3$ jetons sur $5$ : sa probabilité vaut $\frac{3}{5}$.

En clair : « au hasard », « dé équilibré », « jetons indiscernables au toucher » annoncent que toutes les issues ont la même probabilité. On parle d'**équiprobabilité**. Avec $5$ jetons, chacun a la probabilité $\frac{1}{5}$.

## La formule

Pourquoi est-ce vrai ? Si toutes les issues ont la même probabilité, ces probabilités égales ont pour somme $1$. Chacune vaut donc $1$ divisé par le nombre d'issues. Il reste à compter les issues de l'événement.

**Propriété : Hypothèse d'équiprobabilité**

Lorsque toutes les issues d'un univers fini $\Omega$ ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas, chaque issue a la probabilité $\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$ et, pour tout événement $A$,

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $n = \mathrm{card}(\Omega)$ et $q$ la probabilité commune des issues. D'après la définition d'une probabilité, la somme des probabilités des $n$ issues vaut $1$ : $n \times q = 1$, donc $q = \dfrac{1}{n}$.

**Étape 2.** La probabilité de $A$ est la somme des probabilités de ses issues. Elles sont au nombre de $\mathrm{card}(A)$ et valent chacune $\dfrac{1}{n}$, donc $p(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{n}$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve a deux temps : fixer la probabilité commune des issues, puis **compter** les issues de l'événement.

**Vérifie : L'étape 1**

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $n \times q = 1$ ?

**A.** La somme des probabilités vaut $1$.

**Juste.**

Juste. Les $n$ issues ont chacune la probabilité $q$, et leur somme vaut $1$.

**B.** De la formule $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

**Faux.**

Faux. La preuve ne fait intervenir aucun événement contraire.

**C.** Du principe multiplicatif du dénombrement.

**Faux.**

Faux. On additionne $n$ fois la même probabilité $q$ ; aucun choix successif n'est compté.

**D.** De l'égalité $\mathrm{card}(\Omega) = 1$.

**Faux.**

Faux. $\mathrm{card}(\Omega) = n$ est le nombre d'issues ; c'est $p(\Omega)$ qui vaut $1$.

**Correction**

D'après la définition d'une probabilité, la somme des probabilités des issues vaut $1$. Ici, les $n$ issues ont toutes la probabilité $q$ : la somme vaut $q + q + \cdots + q = n \times q$. Donc $n \times q = 1$ et $q = \dfrac{1}{n}$.

**Exemple : Un multiple de trois**

Une urne contient $12$ jetons numérotés de $1$ à $12$, et l'on en tire un au hasard. L'événement « multiple de $3$ » est $\{3, 6, 9, 12\}$. Par équiprobabilité, sa probabilité vaut $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

## Tirages et dénombrement

**Méthode : Calculer une probabilité par équiprobabilité**

1. **Justifier** l'équiprobabilité avec les mots de l'énoncé : « au hasard », « indiscernables au toucher ».
2. **Dénombrer** l'univers avec le modèle du tirage : $\text{card}(\Omega)$.
3. **Dénombrer** l'événement avec le **même** modèle : $\text{card}(A)$.
4. **Diviser**, puis simplifier : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

**Exemple : Deux bons d'un seul geste**

Retour à la boutique : $10$ bons, dont $3$ de $200$ dirhams et $7$ de $50$ dirhams. La cliente en tire $2$ simultanément, au hasard : $\text{card}(\Omega) = C_{10}^{2} = 45$.

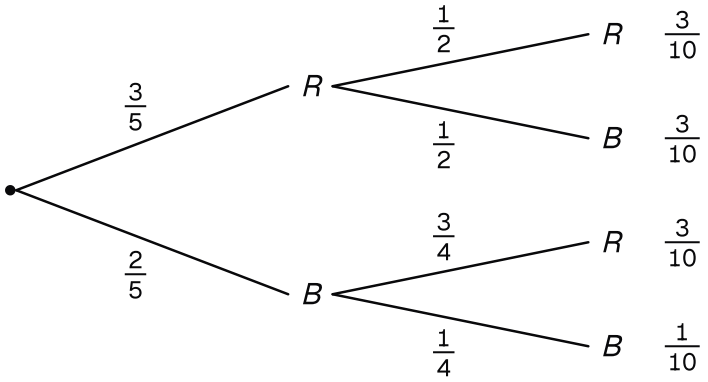
- Deux bons de $200$ dirhams : $C_{3}^{2} = 3$ tirages, probabilité $\dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$.
- Un bon de chaque sorte : $C_{3}^{1} \times C_{7}^{1} = 21$ tirages, probabilité $\dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

**Exemple : Deux jetons l'un après l'autre**

Dans l'urne de $3$ jetons rouges et $2$ bleus, on tire $2$ jetons successivement **sans remise**. L'ordre compte : $\text{card}(\Omega) = A_{5}^{2} = 20$.

Deux rouges : $A_{3}^{2} = 6$ tirages, donc la probabilité vaut $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

**Avec remise**, on aurait $5^2 = 25$ tirages et $3^2 = 9$ favorables, soit $\dfrac{9}{25}$.




**Deux jetons tirés sans remise dans l'urne de 3 rouges et 2 bleus : au second tirage, l'urne a perdu un jeton.**

### Au moins un

**Exemple : La réponse du début**

La cliente veut au moins un bon de $200$ dirhams. Le contraire est « aucun bon de $200$ dirhams », c'est-à-dire deux bons de $50$ dirhams : $C_7^2 = 21$ tirages. Sa probabilité vaut $\dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

La probabilité cherchée vaut donc $1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$, un peu plus que $\dfrac{1}{2}$.

**À toi : Trois jetons au hasard**

Une urne contient $9$ jetons indiscernables au toucher : $4$ rouges et $5$ verts. On en tire $3$ simultanément, au hasard. Calcule la probabilité d'obtenir $3$ jetons verts, puis au moins un jeton rouge, puis exactement $2$ jetons rouges.

**Indice 1**

Le tirage est simultané : $\mathrm{card}(\Omega) = C_9^3$.

**Indice 2**

« $3$ verts » se compte avec $C_5^3$ ; « exactement $2$ rouges » avec $C_4^2 \times C_5^1$.

**Indice 3**

Point délicat : « au moins un rouge » est le contraire de « $3$ verts » ; retranche de $1$ la probabilité précédente.

**Réponse**

Le tirage est simultané, au hasard : il y a équiprobabilité, et

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(\Omega)\\ &= C_9^3\\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84.\end{aligned}$$

- Trois verts : $C_5^3 = 10$ tirages, probabilité $\dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$.
- Au moins un rouge : c'est le contraire de « trois verts », probabilité $1 - \dfrac{5}{42} = \dfrac{37}{42}$.
- Exactement deux rouges : $C_4^2 \times C_5^1 = 6 \times 5 = 30$ tirages, probabilité $\dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$.

Tu sais maintenant transformer une question de probabilité en deux comptages. Le plus important reste le choix du modèle : simultané ou successif, avec ou sans remise.

## Probabilité conditionnelle

### Restreindre l'univers

Le café a servi $200$ clients en une journée (données fictives). On note $S$ « le client consomme sur place » et $T$ « le client prend du thé ».

| | $T$ | $\overline{T}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $S$ | 54 | 66 | 120 |
| $\overline{S}$ | 26 | 54 | 80 |
| Total | 80 | 120 | 200 |

On choisit un client au hasard parmi les $200$.

**Devine : Sur place et thé**

Le client choisi consomme sur place. Quelle est alors la probabilité qu'il ait pris du thé ?

**A.** $\frac{54}{200}$
**Faux.**
Faux. $\frac{54}{200}$ est la probabilité qu'un client pris parmi les $200$ soit sur place **et** prenne du thé. Ici, on sait déjà qu'il est sur place.

**B.** $\frac{54}{80}$
**Faux.**
Faux. $\frac{54}{80}$ répond à une autre question : parmi les buveurs de thé, la part qui consomme sur place.

**C.** $\frac{80}{200}$
**Faux.**
Faux. $\frac{80}{200}$ ignore l'information « sur place » : c'est la probabilité de $T$ pour un client quelconque.

**D.** $\frac{54}{120}$
**Juste.**
Juste. On ne regarde plus que les $120$ clients sur place ; $54$ d'entre eux ont pris du thé.

**Correction**
Savoir que le client est sur place réduit l'univers aux $120$ clients de la ligne $S$. Parmi eux, $54$ ont pris du thé.

La probabilité cherchée vaut $\frac{54}{120} = \frac{9}{20}$.

En clair : l'information « sur place » remplace les $200$ clients par $120$. On peut aussi l'écrire avec des probabilités :

$$\begin{aligned}\frac{54}{120} &= \frac{54 \div 200}{120 \div 200} \\ &= \frac{p(S \cap T)}{p(S)}.\end{aligned}$$

## La définition

**Définition : Probabilité conditionnelle**

Soit $A$ et $B$ deux événements, avec $p(A) \neq 0$. La **probabilité de $B$ sachant $A$** est le réel

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

C'est la probabilité que $B$ soit réalisé lorsqu'on sait que $A$ l'est.

**Exemple : Dans l'autre sens**

Avec le tableau :

- $p(T) = \dfrac{80}{200} = \dfrac{2}{5}$ ;
- $p(S \cap T) = \dfrac{54}{200} = \dfrac{27}{100}$.

Donc :

$$\begin{aligned} p_T(S) &= \frac{p(S \cap T)}{p(T)} \\ &= \frac{27}{100} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{27}{40}. \end{aligned}$$

Parmi les buveurs de thé, la part $\dfrac{27}{40}$ consomme sur place. Tu rencontreras aussi l'écriture $p(B/A)$ pour $p_A(B)$.

**Attention : Trois nombres différents**

✗ Confondre $p_S(T)$, $p_T(S)$ et $p(S \cap T)$. ✓ Ici, $p_S(T) = \dfrac{9}{20}$, $p_T(S) = \dfrac{27}{40}$ et $p(S \cap T) = \dfrac{27}{100}$ : trois nombres différents.

« Parmi les clients sur place » annonce une probabilité sachant $S$. « Parmi tous les clients » annonce une probabilité sans condition.

## Probabilités composées

Pourquoi est-ce vrai ? La définition de $p_A(B)$ est une division par $p(A)$. Multiplier par $p(A)$ défait cette division. On obtient ainsi la probabilité de l'intersection.

**Propriété : Probabilités composées**

Soit $A$ et $B$ deux événements, avec $p(A) \neq 0$. Alors

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

**Démonstration**

**Étape 1.** Comme $p(A) \neq 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

**Étape 2.** On multiplie les deux membres par $p(A)$ : $p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La formule n'est qu'une autre écriture de la définition. Elle sert dans l'autre sens : connaissant $p(A)$ et $p_A(B)$, on obtient $p(A \cap B)$ en multipliant.

**Vérifie : L'hypothèse utile**

Quelle hypothèse est indispensable dans la preuve des probabilités composées ?

**A.** $p(A) \neq 0$

**Juste.**

Juste. Sans elle, on ne peut pas diviser par $p(A)$ : $p_A(B)$ n'est pas défini.

**B.** $A$ et $B$ indépendants

**Faux.**

Faux. La formule est vraie sans indépendance ; elle servira même à étudier l'indépendance.

**C.** $A$ et $B$ incompatibles

**Faux.**

Faux. La formule ne demande rien de tel ; avec des événements incompatibles, elle donnerait seulement $0 = 0$.

**D.** $p(B) \neq 0$

**Faux.**

Faux. On divise par $p(A)$, pas par $p(B)$ ; $p(B)$ peut être nul.

**Correction**

La preuve part de $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, qui n'a de sens que si $p(A) \neq 0$. On multiplie ensuite par $p(A)$. Aucune autre hypothèse n'est utilisée.

**Exemple : Sans le tableau**

Le patron sait seulement que $0{,}6$ des clients consomment sur place, et que $0{,}45$ des clients sur place prennent du thé (données fictives). Donc $p(S) = 0{,}6$ et $p_S(T) = 0{,}45$.

Par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} p(S \cap T) &= p(S) \times p_S(T) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}27. \end{aligned}$$

On retrouve la part $\dfrac{54}{200}$ du tableau.

## Un arbre décrit en mots

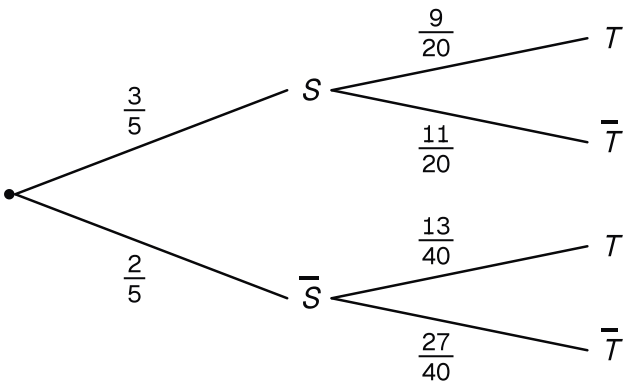
**Méthode : Traduire un énoncé**

1. **Nommer** les événements et traduire chaque donnée : « parmi les … » donne une probabilité conditionnelle.
2. **Organiser** les données dans un arbre tracé sur ton cahier, ou dans un tableau. Sur les branches issues d'un même point, la somme vaut $1$.
3. **Multiplier** le long d'un chemin : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
4. **Diviser** pour une probabilité conditionnelle demandée : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Trace cet arbre sur ton cahier.

- Du point de départ partent deux branches : vers $S$, avec $0{,}6$, et vers $\overline{S}$, avec $0{,}4$.
- De $S$ partent deux branches : vers $T$, avec $0{,}45$, et vers $\overline{T}$, avec $0{,}55$.
- De $\overline{S}$ partent deux branches : vers $T$, avec $\dfrac{26}{80} = 0{,}325$, et vers $\overline{T}$, avec $0{,}675$.

Le chemin $S$ puis $T$ donne $0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$.




**L'arbre de la situation, probabilités écrites en fractions : 3/5 pour 0,6, 9/20 pour 0,45, 13/40 pour 0,325.**

**À toi : Le centre d'appels**

Un centre d'appels reçoit des commandes ($A$) et des réclamations ($\overline{A}$), avec $p(A) = 0{,}7$ (données fictives). Une commande est traitée en moins de cinq minutes ($M$) avec la probabilité $0{,}8$ ; une réclamation, avec la probabilité $0{,}4$. Calcule $p(A \cap M)$, $p(\overline{A} \cap \overline{M})$ et $p_A(\overline{M})$.

**Indice 1**
« Une commande est traitée … avec la probabilité $0{,}8$ » donne $p_A(M) = 0{,}8$, une probabilité sachant $A$.
**Indice 2**
Multiplie le long du chemin : $p(A \cap M) = p(A) \times p_A(M)$.
**Indice 3**
Point délicat : sur les branches issues de $\overline{A}$, la somme vaut $1$ ; donc $p_{\overline{A}}(\overline{M}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

**Réponse**
$p(A \cap M) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.

$p(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ et $p_{\overline{A}}(\overline{M}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, donc $p(\overline{A} \cap \overline{M}) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.

Enfin, $p_A(\overline{M}) = 1 - p_A(M) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

## Formule des probabilités totales

## Deux ateliers

Une entreprise fabrique des lampes dans deux ateliers (données fictives). Le premier atelier produit $0{,}6$ des lampes, le second $0{,}4$. Dans le premier, $0{,}03$ des lampes sont défectueuses ; dans le second, $0{,}08$.

On prend une lampe au hasard dans le stock. On note $A$ « la lampe vient du premier atelier » et $D$ « la lampe est défectueuse ».

**Devine : Une lampe défectueuse**

Quelle est la probabilité que la lampe soit défectueuse ?

**A.** $0{,}11$
**Faux.**
Faux. $0{,}03 + 0{,}08$ additionne deux proportions prises dans des groupes différents, sans tenir compte de leur taille.

**B.** $0{,}055$
**Faux.**
Faux. La moyenne simple de $0{,}03$ et $0{,}08$ suppose deux ateliers de même production. Or le premier produit davantage.

**C.** $0{,}05$
**Juste.**
Juste. $0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$.

**D.** $0{,}0024$

**Faux.**
Faux. $0{,}03 \times 0{,}08$ n'a pas de sens ici : une lampe vient d'un seul atelier.

**Correction**
Une lampe défectueuse vient du premier atelier ou du second.

- Premier chemin : $p(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018$.
- Second chemin : $p(\overline{A} \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$.

On additionne les deux chemins : $p(D) = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$.

## Système complet

**Définition : Système complet d'événements**

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un univers $\Omega$ forment un **système complet d'événements** lorsque :

- ils sont deux à deux incompatibles ;
- leur réunion est $\Omega$ : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ ;
- aucun n'est de probabilité nulle.

Ainsi, une issue appartient toujours à l'un d'eux, et à un seul. Pour tout événement $A$ tel que $0 < p(A) < 1$, les événements $A$ et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.

**Exemple : Découper sans oublier ni doubler**

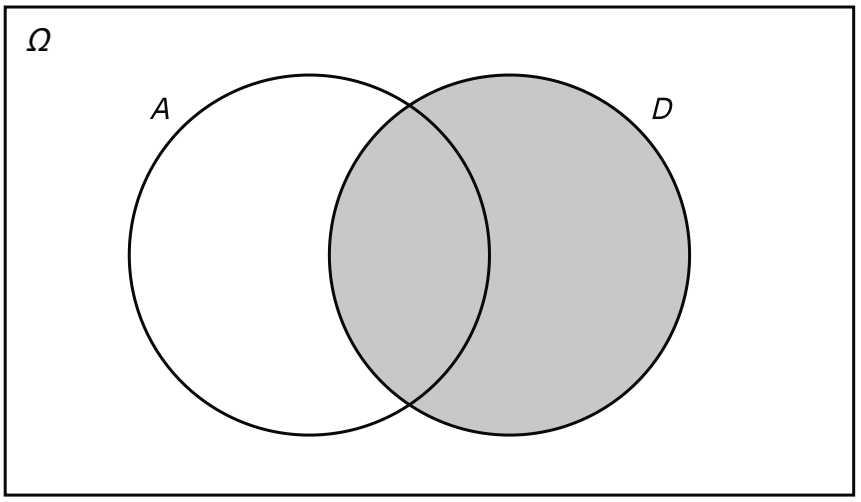
Les événements $A$ et $\overline{A}$ forment un système complet : une lampe vient d'un atelier, et d'un seul.

Avec trois ateliers $A_1$, $A_2$, $A_3$ de probabilités non nulles, on obtient aussi un système complet.

En revanche, au café, $S$ « sur place » et $T$ « thé » n'en forment pas : $S \cap T$ n'est pas vide.

## La formule

Pourquoi est-ce vrai ? Une issue de $D$ appartient à un seul événement du système complet. On range donc les issues de $D$ selon cet événement. Puis on calcule chaque morceau avec les probabilités composées.




**Avec le système complet formé de A et de son contraire, l'événement D teinté se range en deux morceaux : la partie dans A, et la partie hors de A.**

**Propriété : Formule des probabilités totales**

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements et $B$ un événement. Alors

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

En particulier, si $0 < p(A) < 1$ : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Chaque issue de $B$ appartient à un seul des $A_i$ (définition d'un système complet). Les événements $B \cap A_1, \ldots, B \cap A_n$ sont donc deux à deux incompatibles et leur réunion est $B$.

**Étape 2.** La probabilité de $B$ est la somme des probabilités de ses issues ; on les regroupe selon l'événement $A_i$ qui les contient : $p(B) = p(B \cap A_1) + \cdots + p(B \cap A_n)$.

**Étape 3.** Comme $p(A_i) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne $p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B)$ pour chaque $i$. On remplace dans l'étape 2.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On découpe l'événement étudié en morceaux incompatibles, un par événement du système complet. Chaque morceau se calcule par un produit : c'est un chemin de l'arbre. On additionne les chemins qui y mènent.

**Vérifie : Des morceaux incompatibles**

Dans la preuve, pourquoi les événements $B \cap A_1, \ldots, B \cap A_n$ sont-ils deux à deux incompatibles ?

**A.** Les $A_i$ sont deux à deux incompatibles.

**Juste.**

Juste. Une issue ne peut pas être dans deux $A_i$ à la fois, donc pas dans deux morceaux.

**B.** $B$ est indépendant de chaque $A_i$.

**Faux.**

Faux. Aucune indépendance n'est supposée ; la formule vaut sans elle.

**C.** Chaque $p(A_i)$ est non nulle.

**Faux.**

Faux. Cette hypothèse sert à l'étape 3, pour écrire $p_{A_i}(B)$ ; elle ne dit rien des intersections.

**D.** La réunion des $A_i$ est $\Omega$.

**Faux.**

Faux. Cette propriété garantit qu'aucune issue n'est oubliée, pas qu'aucune n'est comptée deux fois.

**Correction**

Si une issue était dans $B \cap A_i$ et dans $B \cap A_j$ avec $i \neq j$, elle serait dans $A_i \cap A_j$. Or $A_i \cap A_j = \varnothing$, car les événements d'un système complet sont deux à deux incompatibles. Les morceaux sont donc incompatibles.

**Exemple : Les lampes**

Avec le système complet formé de $A$ et $\overline{A}$ :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A) \times p_A(D) \\ &\quad + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(D) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}03 \\ &\quad + 0{,}4 \times 0{,}08 \\ &= 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05. \end{aligned}$$

Contrôle : $0{,}05$ est bien compris entre $0{,}03$ et $0{,}08$.

## Remonter à la cause

**Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales**

1. **Choisir** un système complet qui découpe la situation, par exemple $A$ et $\overline{A}$ ; vérifier qu'aucun n'a une probabilité nulle.
2. **Écrire** une ligne par chemin de l'arbre qui mène à l'événement étudié.
3. **Calculer** chaque produit, puis la somme ; contrôler que le résultat est entre $0$ et $1$.

**Exemple : D'où vient la lampe défectueuse ?**

Le contrôle trouve une lampe défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du premier atelier ? On cherche $p_D(A)$ :

$$\begin{aligned} p_D(A) &= \frac{p(A \cap D)}{p(D)} \\ &= \frac{0{,}018}{0{,}05} = 0{,}36. \end{aligned}$$

Le premier atelier produit $0{,}6$ des lampes, mais seulement $0{,}36$ des lampes défectueuses.

**À toi : Trois fournisseurs**

La boutique de vêtements reçoit ses chemises de trois fournisseurs (données fictives). Le premier ($A_1$) livre $0{,}5$ des chemises, le deuxième ($A_2$) $0{,}3$ et le troisième ($A_3$) $0{,}2$. Une chemise a un défaut ($D$) avec la probabilité $0{,}02$, $0{,}04$ ou $0{,}05$ selon son fournisseur. Calcule $p(D)$, puis $p_D(A_1)$.

**Indice 1**

$A_1$, $A_2$, $A_3$ forment un système complet : chaque chemise vient d'un seul fournisseur.

**Indice 2**

$p(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}05$.

**Indice 3**

Point délicat : $p_D(A_1)$ n'est pas $0{,}02$ ; c'est $\dfrac{p(A_1 \cap D)}{p(D)}$, avec $p(D)$ au dénominateur.

**Réponse**

Les événements $A_1$, $A_2$, $A_3$ forment un système complet. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(D) &= 0{,}5 \times 0{,}02 \\ &\quad + 0{,}3 \times 0{,}04 \\ &\quad + 0{,}2 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}01 \\ &= 0{,}032. \end{aligned}$$

Ensuite, $p(A_1 \cap D) = 0{,}5 \times 0{,}02 = 0{,}01$, donc :

$$\begin{aligned} p_D(A_1) &= \frac{0{,}01}{0{,}032} \\ &= \frac{10}{32} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

## Indépendance et épreuves répétées

### Une information qui ne change rien

Le centre d'appels a classé $400$ appels (données fictives). On note $M$ « l'appel arrive le matin » et $R$ « le problème est résolu dès le premier appel ».

| | $R$ | $\overline{R}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $M$ | 180 | 60 | 240 |
| $\overline{M}$ | 120 | 40 | 160 |
| Total | 300 | 100 | 400 |

On choisit un appel au hasard : $p(R) = \dfrac{300}{400} = \dfrac{3}{4}$.

**Devine : Le matin**

On sait que l'appel est arrivé le matin. La probabilité qu'il soit résolu dès le premier appel est-elle plus grande que $\dfrac{3}{4}$, plus petite, ou égale ?

**A.** Plus grande : il y a plus d'appels le matin.

**Faux.**

Faux. $240$ appels le matin contre $160$ l'après-midi : cela compare des effectifs, pas des proportions de problèmes résolus.

**B.** Plus petite : $180$ est moins que $300$.

**Faux.**

Faux. $180$ et $300$ ne se comparent pas : l'un compte les appels résolus du matin, l'autre tous les appels résolus.

**C.** Égale à $\dfrac{3}{4}$.

**Juste.**

Juste. Le matin, $180$ appels sur $240$ sont résolus, et $\dfrac{180}{240} = \dfrac{3}{4}$.

**D.** Impossible à dire sans autre donnée.

**Faux.**

Faux. Le tableau suffit : on lit $180$ appels résolus parmi les $240$ du matin.

**Correction**

Parmi les $240$ appels du matin, $180$ sont résolus : $p_M(R) = \dfrac{180}{240} = \dfrac{3}{4}$. C'est exactement $p(R)$. Savoir que l'appel arrive le matin ne change pas la probabilité de $R$.

**Définition : Événements indépendants**

Deux événements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

**Exemple : Le calcul**

Avec le tableau :

- $p(M) = \dfrac{240}{400} = \dfrac{3}{5}$ ;
- $p(M \cap R) = \dfrac{180}{400} = \dfrac{9}{20}$.

Or le produit vaut :

$$\begin{aligned} p(M) \times p(R) &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

L'égalité $p(M \cap R) = p(M) \times p(R)$ est vraie : $M$ et $R$ sont indépendants.

## Indépendance et probabilité conditionnelle

Pourquoi est-ce vrai ? Si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, la division par $p(A)$ fait disparaître $p(A)$. Dans l'autre sens, les probabilités composées refont le produit.

**Propriété : Indépendance et probabilité conditionnelle**

Soit $A$ et $B$ deux événements, avec $p(A) \neq 0$. Les événements $A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si,

$$p_A(B) = p(B).$$

Autrement dit, savoir que $A$ est réalisé ne change pas la probabilité de $B$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Comme $p(A) \neq 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

**Étape 2.** Si $A$ et $B$ sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, donc $p_A(B) = \dfrac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$.

**Étape 3.** Réciproquement, si $p_A(B) = p(B)$, la formule des probabilités composées donne $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(A) \times p(B)$ : $A$ et $B$ sont indépendants.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Une équivalence se prouve dans les deux sens. Chaque sens s'appuie sur une formule du chapitre et sur $p(A) \neq 0$.

**Vérifie : Le sens réciproque**

Dans l'étape 3 de la preuve, on suppose $p_A(B) = p(B)$. Quelle formule permet d'en déduire $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ?

**A.** La formule des probabilités totales.

**Faux.**

Faux. Elle calcule $p(B)$ à partir d'un système complet ; ici, on cherche une intersection.

**B.** La formule de la réunion.

**Faux.**

Faux. Elle relie $p(A \cup B)$ à $p(A \cap B)$, mais ne donne pas $p(A \cap B)$ comme un produit.

**C.** La formule d'équiprobabilité.

**Faux.**

Faux. Rien ne dit que les issues ont la même probabilité.

**D.** La formule des probabilités composées.

**Juste.**

Juste. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$, puis on remplace $p_A(B)$ par $p(B)$.

**Correction**

Comme $p(A) \neq 0$, les probabilités composées donnent $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Par hypothèse, $p_A(B) = p(B)$. Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ : les événements sont indépendants.

**Exemple : Au café, une dépendance**

Au café, $p_S(T) = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$ et $p(T) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$. Ces deux nombres sont différents : $S$ et $T$ ne sont pas indépendants.

Savoir que le client est sur place augmente la probabilité qu'il prenne du thé.

## Incompatibles ou indépendants

**Méthode : Étudier l'indépendance**

1. **Calculer** séparément $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$.
2. **Comparer** $p(A \cap B)$ et $p(A) \times p(B)$, en fractions exactes.
3. **Conclure** : égalité, c'est l'indépendance ; inégalité, les deux événements sont dépendants. Si $p(A) \neq 0$, on peut aussi comparer $p_A(B)$ et $p(B)$.

**Attention : Incompatibles n'est pas indépendants**

✗ « $M$ et $\overline{M}$ sont incompatibles, donc indépendants. » ✓ $p(M \cap \overline{M}) = 0$, alors que $p(M) \times p(\overline{M}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$. Ils ne sont pas indépendants.

Quand deux événements incompatibles ont chacun une probabilité non nulle, ils sont forcément dépendants : si l'un se produit, l'autre devient impossible.

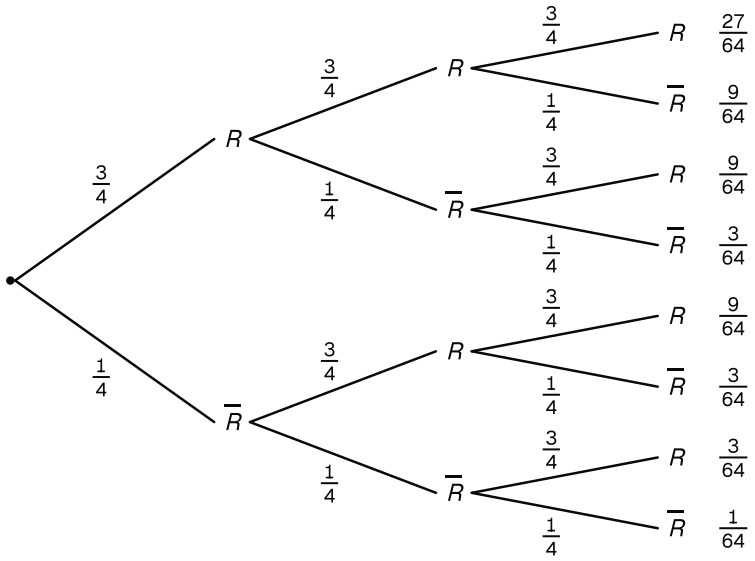
## Répéter une épreuve

Un conseiller traite $3$ appels l'un après l'autre. Chacun est résolu dès le premier appel avec la probabilité $\frac{3}{4}$, indépendamment des autres.

Sur ton cahier, l'arbre a $8$ chemins. Pour exactement $2$ appels résolus, il y a $C_3^2 = 3$ chemins, selon le rang de l'appel non résolu. Chacun a la probabilité :

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}.$$

La probabilité d'avoir exactement $2$ appels résolus vaut donc $3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$.




**Trois appels traités l'un après l'autre : chaque appel est résolu avec 3/4 ou non avec 1/4, et le produit de chaque chemin est écrit au bout.**

**Propriété : Épreuves indépendantes et répétées**

On répète $n$ fois, dans les mêmes conditions et de façon indépendante, une épreuve au cours de laquelle un événement $S$ (le « succès ») a la probabilité $p$, avec $0 < p < 1$. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que $S$ soit réalisé exactement $k$ fois est

$$C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}.$$

**Démonstration**

Idée de la preuve. On ne retient de chaque épreuve que le succès $S$ ou l'échec $\overline{S}$, de probabilité $1-p$ ; une issue est alors une liste de $n$ résultats. Une liste qui contient exactement $k$ succès a la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ : c'est le produit des probabilités des $n$ résultats, les épreuves étant indépendantes ; ce produit pour $n$ épreuves indépendantes est admis. Une telle liste est fixée par le choix des $k$ rangs des succès parmi les $n$ rangs : il y en a $C_n^k$. Ces listes sont deux à deux incompatibles ; on additionne leurs $C_n^k$ probabilités, toutes égales.

**Remarque : Ce qui est admis**

La preuve de cette propriété est une esquisse. Le produit des probabilités le long d'un chemin, pour $n$ épreuves indépendantes, est admis. Le nombre de chemins avec $k$ succès, $C_n^k$, vient du dénombrement.

**À toi : Quatre appels**

Un conseiller reçoit $4$ appels. Chacun est une commande avec la probabilité $0{,}6$, indépendamment des autres (données fictives). Calcule la probabilité d'avoir exactement $2$ commandes, puis celle d'avoir au moins une commande.

**Indice 1**
On répète $4$ fois la même épreuve, de façon indépendante ; le succès est « l'appel est une commande », de probabilité $0{,}6$.
**Indice 2**
Exactement $2$ commandes : $C_4^2 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^2$.
**Indice 3**
Point délicat : « au moins une commande » est le contraire de « aucune commande », de probabilité $0{,}4^4$.

**Réponse**
**Exactement deux commandes.** Il y a $C_4^2$ chemins avec deux commandes, chacun de probabilité $0{,}6^2 \times 0{,}4^2$. La probabilité vaut :

$$\begin{aligned} & C_4^2 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^2 \\ &= 6 \times 0{,}36 \times 0{,}16 \\ &= 0{,}3456. \end{aligned}$$

**Au moins une commande.** Le contraire est « aucune commande », de probabilité $0{,}4^4 = 0{,}0256$. Donc la probabilité d'au moins une commande vaut $1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

## Variable aléatoire, espérance, variance

### Un gain qui dépend du hasard

Pour la kermesse de fin d'année, des élèves tiennent un stand de roue (données fictives). La roue a $10$ secteurs de même taille. Une partie coûte $10$ dirhams.

Un secteur fait gagner $50$ dirhams, deux secteurs $20$ dirhams, et les sept autres rien. On note $X$ le gain net du joueur, en dirhams : ce qu'il reçoit moins ce qu'il a payé.

**Devine : Sur un grand nombre de parties**

Un joueur fait un très grand nombre de parties. À ton avis, que se passe-t-il pour lui, en moyenne ?

**A.** Il gagne, grâce au gros lot.

**Faux.**

Faux. Le gros lot ne sort que sur un secteur sur dix. Les sept secteurs perdants pèsent plus lourd.

**B.** Il perd un peu à chaque partie.

**Juste.**

Juste. Le calcul de l'espérance donnera une perte moyenne de $1$ dirham par partie.

**C.** Il ne gagne ni ne perd.

**Faux.**

Faux. Rien n'oblige un jeu à être équilibré ; ici, l'organisateur l'a réglé à son avantage.

**D.** C'est imprévisible, même en moyenne.

**Faux.**

Faux. Une partie est imprévisible, mais la moyenne sur beaucoup de parties se calcule : c'est l'espérance.

**Correction**

Sur $10$ parties, le joueur gagne en moyenne une fois $40$ dirhams nets, deux fois $10$ dirhams nets, et perd sept fois $10$ dirhams. Bilan : $40 + 20 - 70 = -10$ dirhams pour $10$ parties, soit une perte moyenne de $1$ dirham par partie.

**Définition : Variable aléatoire et loi de probabilité**

Soit $\Omega$ l'univers fini d'une expérience aléatoire, muni d'une probabilité $p$.

- Une **variable aléatoire** $X$ est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de $\Omega$.
- On note $x_1, x_2, \dots, x_r$ les valeurs prises par $X$, et $(X = x_i)$ l'événement formé des issues auxquelles $X$ associe $x_i$.
- La **loi de probabilité** de $X$ est la donnée des probabilités $p(X = x_i)$ pour $i$ allant de $1$ à $r$. On la présente dans un tableau, et l'on a toujours $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \cdots + p(X = x_r) = 1$.

**Exemple : La loi du gain**

Le joueur reçoit $50$, $20$ ou $0$ dirhams, et paie $10$ dirhams. Donc $X$ prend les valeurs $-10$, $10$ et $40$. Chaque secteur a la probabilité $\frac{1}{10}$ :

| $x_i$ | $-10$ | $10$ | $40$ |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Contrôle : $\frac{7}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1$.

## Construire une loi

**Méthode : Déterminer la loi d'une variable aléatoire**

1. **Lister** toutes les valeurs de $X$, en partant de l'expérience.
2. **Traduire** chaque événement $(X=x_i)$ en mots et trouver sa probabilité.
3. **Ranger** les résultats dans un tableau : les valeurs en haut, leurs probabilités juste en dessous.
4. **Vérifier** que la somme des probabilités vaut $1$.

**Exemple : Deux jetons gagnants**

Au stand voisin, on tire simultanément $2$ jetons d'une urne de $5$ jetons : $2$ gagnants et $3$ perdants (données fictives). Soit $Y$ le nombre de jetons gagnants tirés. Il y a $C_5^2=10$ tirages équiprobables.

- $(Y=0)$ : deux perdants, $C_3^2=3$ tirages.
- $(Y=1)$ : un gagnant et un perdant, $2\times 3=6$ tirages.
- $(Y=2)$ : deux gagnants, $C_2^2=1$ tirage.

| $y_i$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $p(Y=y_i)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

**Attention : La somme doit valoir un**

✗ Oublier la valeur $0$ et écrire la loi de $Y$ avec $\frac{6}{10}$ et $\frac{1}{10}$ seulement. ✓ La somme $\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}$ vaut $1$ : aucune valeur n'est oubliée.

Une somme différente de $1$ signale une valeur oubliée ou une probabilité fausse. Vérifie en fractions exactes, sans arrondir.

## Espérance et dispersion

**Définition : Espérance, variance, écart-type**

Soit $X$ une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec les probabilités $p_i = p(X = x_i)$.

- L'**espérance** de $X$ est $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_rp_r$.
- La **variance** de $X$ est $V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_r - E(X))^2p_r$.
- L'**écart-type** de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs obtenues pour $X$ est proche de $E(X)$ ; la variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs autour de $E(X)$.

**Exemple : Le gain moyen**

Pour le jeu de roue, par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= (-10) \times \frac{7}{10} \\ &\quad + 10 \times \frac{2}{10} \\ &\quad + 40 \times \frac{1}{10} \\ &= -7 + 2 + 4 = -1. \end{aligned}$$

En moyenne, le joueur perd $1$ dirham par partie, et le stand gagne $1$ dirham par partie.

Les écarts à l'espérance valent $-10 - (-1) = -9$, $10 - (-1) = 11$ et $40 - (-1) = 41$. Par la définition de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-9)^2 \times \frac{7}{10} \\ &\quad + 11^2 \times \frac{2}{10} \\ &\quad + 41^2 \times \frac{1}{10} \\ &= 56{,}7 + 24{,}2 + 168{,}1 \\ &= 249. \end{aligned}$$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{249} \approx 15{,}78$ dirhams : les gains s'écartent de la moyenne de l'ordre de $16$ dirhams.

## Une formule plus rapide

Pourquoi est-ce vrai ? On développe chaque carré $(x_i - m)^2$, puis on regroupe trois sommes déjà connues. Le calcul devient plus court, surtout quand $E(X)$ n'est pas un entier.

**Propriété : Formule de calcul de la variance**

Avec les notations de la définition de l'espérance et de la variance, on pose $E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_r^2p_r$. Alors

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2.$$

**Démonstration**

**Étape 1.** On note $m = E(X)$. Pour chaque $i$, on développe le carré : $(x_i - m)^2 p_i = x_i^2 p_i - 2m\, x_i p_i + m^2 p_i$.

**Étape 2.** On additionne ces égalités pour $i$ allant de $1$ à $r$. La somme des $x_i^2 p_i$ vaut $E(X^2)$ ; la somme des $x_i p_i$ vaut $m$, par définition de l'espérance ; la somme des $p_i$ vaut $1$, car c'est la somme des probabilités d'une loi.

**Étape 3.** On obtient $V(X) = E(X^2) - 2m \times m + m^2 \times 1 = E(X^2) - m^2$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On développe le carré, puis on reconnaît trois sommes déjà rencontrées, que l'on identifie une à une.

**Vérifie : L'étape 2**

À l'étape 2 de la preuve, pourquoi la somme des $x_i p_i$ vaut-elle $m$ ?

**A.** Parce que la somme des $p_i$ vaut $1$.
**Faux.**
Faux. Ce fait sert pour la somme des $m^2 p_i$, pas pour celle des $x_i p_i$.

**B.** Parce que $x_i^2 p_i = (x_i p_i)^2$.
**Faux.**
Faux. Cette égalité est fausse en général, et elle ne concerne pas cette somme.

**C.** Par définition de l'espérance.
**Juste.**
Juste. $E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_r p_r$, et l'on a posé $m = E(X)$.

**D.** Parce que $m$ vaut toujours $0$.
**Faux.**
Faux. Pour le jeu de roue, $m = -1$ ; l'espérance n'a aucune raison d'être nulle.

**Correction**
On a posé $m = E(X)$, et par définition $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_r p_r$. La somme des $x_i p_i$ est donc $m$, et les termes $-2m\, x_i p_i$ donnent au total $-2m \times m$.

**Exemple : Le nombre de jetons gagnants**

Pour $Y$, on calcule d'abord les deux sommes :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} \\ &\quad + 2^2 \times \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $V(Y) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ et $\sigma(Y) = \frac{3}{5}$.

## Calculer et vérifier

**Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type**

1. **Partir** du tableau de la loi et ajouter la ligne des $x_i p_i$ : leur somme est $E(X)$.
2. **Ajouter** la ligne des $x_i^2 p_i$ : leur somme est $E(X^2)$.
3. **Calculer** $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, vérifier que $V(X) \geq 0$, puis $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
4. **Donner le sens** de $E(X)$ dans le contexte, unité comprise : par exemple, des dirhams par partie.

**Attention : Le carré de l'espérance**

✗ $V(Y) = E(Y^2) - E(Y) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. ✓ $V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

On retranche le **carré** de l'espérance. Si tu trouves une variance négative, cherche l'erreur. Enfin, $\sigma(Y)$ s'obtient en prenant la racine carrée de $V(Y)$ : $\sigma(Y) = \frac{3}{5}$, pas $\frac{9}{25}$.

**À toi : Un jeu équilibré ?**

À un autre stand (données fictives), le gain net $Z$, en dirhams, vaut $-2$, $0$ ou $4$. On sait que $p(Z = -2) = \frac{1}{2}$ et $p(Z = 0) = \frac{1}{4}$. Calcule $p(Z = 4)$, puis $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$. Le jeu avantage-t-il le joueur ?

**Indice 1**
La somme des probabilités de la loi vaut $1$.
**Indice 2**
Ajoute au tableau la ligne des $z_i p_i$, puis celle des $z_i^2 p_i$.
**Indice 3**

Point délicat : $V(Z) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2$ ; ici $E(Z)$ est nul, mais écris quand même la soustraction de son carré.

**Réponse**

Les trois probabilités ont pour somme $1$, donc $p(Z=4) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

**Espérance.**

$$\begin{aligned} &E(Z) \\ &= (-2) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 4 \times \frac{1}{4} \\ &= -1 + 0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

En moyenne, le joueur ne gagne ni ne perd.

**Variance et écart-type.**

$$\begin{aligned} &E(Z^2) \\ &= (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 4^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 2 + 0 + 4 = 6. \end{aligned}$$

Donc $V(Z) = 6 - 0^2 = 6$ et $\sigma(Z) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.

**Conclusion.** Comme $E(Z) = 0$, le jeu n'avantage ni le joueur ni l'organisateur.

## Loi binomiale

## Compter des succès

Pendant les soldes, la boutique de vêtements observe ses visiteurs (données fictives). Chaque visiteur achète avec la probabilité $0{,}3$, indépendamment des autres. Cinq visiteurs entrent. On note $X$ le nombre d'acheteurs parmi eux.

**Devine : Combien d'acheteurs en moyenne ?**

Sur un grand nombre de groupes de cinq visiteurs, combien d'acheteurs y a-t-il en moyenne par groupe ?

**A.** $0{,}3$

**Faux.**

Faux. $0{,}3$ est la probabilité d'achat d'un seul visiteur ; il y en a cinq.

**B.** $2{,}5$

**Faux.**

Faux. $2{,}5$ supposerait qu'un visiteur sur deux achète. Or la probabilité d'achat est $0{,}3$.

**C.** $0{,}00243$

**Faux.**

Faux. $0{,}3^5 = 0{,}00243$ est la probabilité que les cinq achètent, pas un nombre moyen d'acheteurs.

**D.** $1{,}5$

**Juste.**

Juste. Chaque visiteur apporte en moyenne $0{,}3$ acheteur : pour cinq visiteurs, $5 \times 0{,}3 = 1{,}5$.

**Correction**

Chaque visiteur achète avec la probabilité $0{,}3$. Sur cinq visiteurs, on attend en moyenne $5 \times 0{,}3 = 1{,}5$ acheteur. Tu vas voir que c'est l'espérance de $X$.

## La loi binomiale

**Définition : Loi binomiale**

On répète $n$ fois, de façon indépendante, une épreuve qui n'a que deux issues : le succès $S$, de probabilité $p$ (avec $0 < p < 1$), et l'échec $\overline{S}$, de probabilité $1 - p$. La variable aléatoire $X$ égale au **nombre de succès** obtenus suit la **loi binomiale de paramètres $n$ et $p$**, notée $\mathcal{B}(n ; p)$. Elle prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$ et, d'après la propriété des épreuves indépendantes et répétées,

$$p(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1 - p)^{n-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

**Exemple : Deux acheteurs exactement**

Chaque visiteur est une épreuve à deux issues : le succès « il achète », de probabilité $0{,}3$, ou l'échec. Les cinq épreuves sont indépendantes et $X$ compte les succès : $X$ suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0{,}3)$.

Par exemple, la probabilité d'avoir exactement $2$ acheteurs vaut :

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= C_5^2 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 \\ &= 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \\ &= 0{,}3087. \end{aligned}$$

**Méthode : Reconnaître une loi binomiale**

1. **Identifier** l'épreuve et ses deux issues : le succès, à préciser, et l'échec.
2. **Vérifier** que l'épreuve est répétée $n$ fois dans les mêmes conditions, de façon indépendante.
3. **Vérifier** que $X$ compte le nombre de succès.
4. **Conclure** : $X$ suit $\mathcal{B}(n ; p)$, en donnant $n$ et $p$.

Attention : dans $\mathcal{B}(n;p)$, la lettre $p$ est un nombre, la probabilité du succès ; dans $p(X=k)$, $p$ désigne la probabilité.

## Au moins un, et un piège

**Exemple : Au moins un acheteur**

L'événement « au moins un acheteur » a pour contraire $(X=0)$, « aucun acheteur ». Or $p(X=0)=0{,}7^5=0{,}16807$. Donc $p(X\geq 1)=1-0{,}16807=0{,}83193$.

**Vérifie : Binomiale ou non ?**

Une urne contient $4$ jetons rouges et $6$ jetons verts. Dans quelle situation $X$ suit-elle une loi binomiale ?

**A.** On tire $3$ jetons sans remise ; $X$ compte les rouges.

**Faux.**

Faux. Sans remise, la composition de l'urne change à chaque tirage : les épreuves ne sont pas indépendantes.

**B.** On tire $3$ jetons avec remise ; $X$ compte les rouges.

**Juste.**

Juste. Trois épreuves identiques et indépendantes, de succès « rouge » de probabilité $0{,}4$ : $X$ suit $\mathcal{B}(3;0{,}4)$.

**C.** On tire $1$ jeton ; $X$ vaut $5$ si rouge, $-2$ sinon.

**Faux.**

Faux. $X$ est un gain, pas un nombre de succès sur des épreuves répétées.

**D.** On tire avec remise jusqu'au premier rouge ; $X$ compte les tirages.

**Faux.**

Faux. Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance : il n'y a pas de $n$.

**Correction**

Une loi binomiale demande $n$ épreuves identiques et indépendantes, à deux issues, et une variable qui compte les succès. Seul le tirage **avec** remise de $3$ jetons convient : $n=3$, et le succès « rouge » a la probabilité $\dfrac{4}{10}=0{,}4$ à chaque tirage.

**Attention : Sans remise, pas de loi binomiale**

*X* « On tire $3$ jetons sans remise, donc $X$ suit $\mathcal{B}(3;0{,}4)$. » ✓ Sans remise, le deuxième tirage dépend du premier : on compte avec les combinaisons et l'équiprobabilité.

Par exemple, $p(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$, alors que $0{,}4^3=0{,}064$.

## Espérance et variance

Vérifions un cas simple : $X$ suit $\mathcal{B}(2;p)$, où $p$ est la probabilité du succès. Alors :

- $p(X=0)=(1-p)^2$ ;
- $p(X=1)=2\times p\times(1-p)$ ;
- $p(X=2)=p^2$.

On en déduit l'espérance :

$$\begin{aligned}E(X) &= 0\times(1-p)^2\\ &\quad+1\times 2\times p\times(1-p)\\ &\quad+2\times p^2\\ &= 2p-2p^2+2p^2=2p.\end{aligned}$$

On obtient bien $2\times p$. Ce calcul est une vérification, pas une preuve.

**Propriété : Espérance et variance d'une loi binomiale**

Si $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors

$$E(X)=np \qquad \text{et} \qquad V(X)=np(1-p).$$

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis : sa preuve générale sort du chapitre. Tu as seulement vérifié l'espérance pour $n=2$ ; la variance n'est pas vérifiée ici.

**Exemple : Les acheteurs des soldes**

$X$ suit $\mathcal{B}(5;0{,}3)$, donc :

- $E(X)=5\times 0{,}3=1{,}5$ : en moyenne, $1{,}5$ acheteur par groupe de cinq visiteurs ;
- $V(X)=5\times 0{,}3\times 0{,}7=1{,}05$, d'où $\sigma(X)=\sqrt{1{,}05}\approx 1{,}02$.

**À toi : Des bons gagnants**

Pendant les soldes, chaque client tire un ticket ; il gagne un bon d'achat avec la probabilité $\dfrac{1}{5}$, indépendamment des autres (données fictives). Quatre clients jouent. Soit $Y$ le nombre de gagnants. Donne la loi de $Y$, puis calcule $p(Y=2)$, $p(Y\geq 1)$ et $E(Y)$.

**Indice 1**

Quatre épreuves indépendantes à deux issues ; $Y$ compte les succès.

**Indice 2**

$p(Y=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$.

**Indice 3**

Point délicat : « au moins un gagnant » est le contraire de $(Y=0)$, dont la probabilité est $\left(\frac{4}{5}\right)^4$.

**Réponse**

Chaque client est une épreuve à deux issues, les quatre épreuves sont indépendantes, et $Y$ compte les gagnants. Donc $Y$ suit la loi $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{5}\right)$.

**Deux gagnants.** Avec $C_4^2 = 6$ :

$$\begin{aligned} p(Y=2) &= 6 \times \frac{1}{25} \times \frac{16}{25} \\ &= \frac{96}{625}. \end{aligned}$$

**Au moins un gagnant.** Le contraire est « aucun gagnant » : $p(Y=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$. Donc $p(Y \geq 1) = 1 - \frac{256}{625} = \frac{369}{625}$.

**Espérance.** $E(Y) = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

## Synthèse

Pour finir, voici quel outil choisir selon la question posée.

- « Combien de tirages ? » : le modèle de dénombrement, simultané, avec ou sans remise.
- « Au hasard » : l'équiprobabilité et le quotient des cardinaux.
- « Au moins un » : l'événement contraire.
- « Parmi … », « sachant que … » : une probabilité conditionnelle.
- Plusieurs origines possibles : la formule des probabilités totales.
- « Gain moyen » : l'espérance d'une variable aléatoire.
- Des épreuves indépendantes à deux issues, dont on compte les succès : la loi binomiale.

**À retenir : Les formules du chapitre**

- Contraire : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- Réunion : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Équiprobabilité : $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

- Probabilité conditionnelle : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
- Probabilités totales : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.
- Indépendance : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Espérance : $E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_r p_r$.
- Variance : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
- Loi binomiale : $p(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$, puis $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul des probabilités » (2bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)