BURHAN

Systèmes mécaniques oscillants : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/systemes-mecaniques-oscillants/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Systèmes mécaniques oscillants	Niveau examen	5

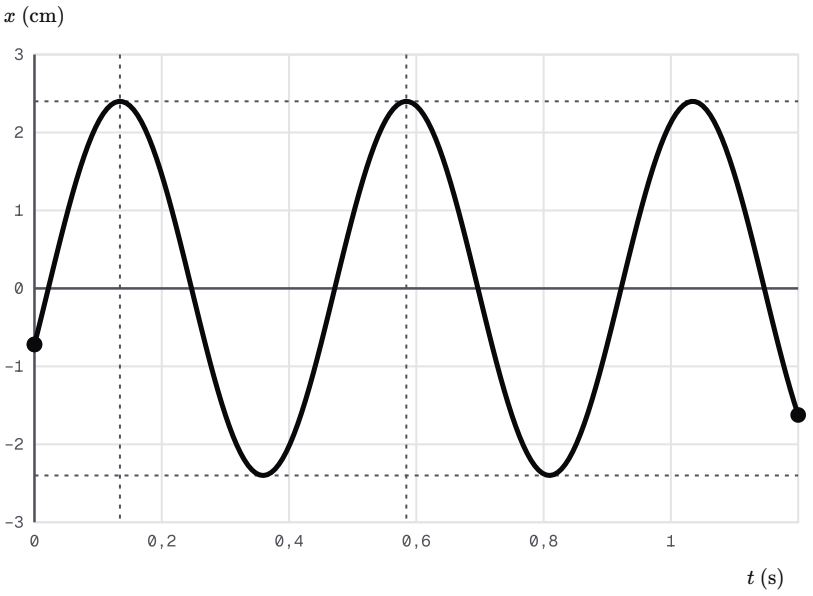
Exercice 1 6 pts

Ressort d'une maquette de suspension

Un club de modélisme teste le ressort de la suspension d'une maquette de voiture. Le ressort, de masse négligeable, a une raideur K inconnue. On prend $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Sur un banc d'essai horizontal, un solide de masse $m = 0{,}320\,\mathrm{kg}$, accroché au ressort, glisse sans frottement le long d'un axe $(O;\vec{i})$ dont l'origine O est sa position d'équilibre. Un capteur enregistre son abscisse x.

Document. Enregistrement $x(t)$ sur le banc ; les droites verticales passent par deux maximums successifs, à $t \approx 0{,}13\,\mathrm{s}$ et $t \approx 0{,}58\,\mathrm{s}$.



Courbe 1 ● Point du graphe

Abscisse du solide sur le banc d'essai

A.1. 0,5 pts

Partie A : essai du ressort sur un banc horizontal.

Lire sur le document la période propre T_0 et l'amplitude x_m des oscillations.

INDICE

Outil : deux maximums successifs sont séparés d'une période.

A.2. 0,5 pts

On lit $x(0) \approx -0{,}72\,\mathrm{cm}$. Déterminer la phase à l'origine φ de l'équation horaire $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, en radians.

INDICE

Point délicat : $\cos\varphi$ donne deux valeurs ; le sens de variation de x en $t = 0$ choisit la bonne.

A.3. 0,75 pts

L'abscisse vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{m}\,x = 0$. Montrer que $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$ en est solution à condition que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

INDICE

Début : dérive deux fois $x(t)$ avec la dérivée d'une fonction composée. **Ensuite :** reporte dans l'équation ; elle doit être vraie à chaque instant.

A.4. 0,75 pts

En déduire la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : élève au carré l'expression de la période propre.

A.5. 0,5 pts

Calculer la vitesse maximale v_m du solide et préciser où elle est atteinte.

INDICE

Outil : la valeur maximale de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ vaut $\dfrac{2\pi}{T_0}\,x_m$; travaille en mètres.

B.1. 0,75 pts

Partie B : le ressort monté verticalement dans la maquette.

On admet que la raideur du ressort vaut $K = 62\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Dans la maquette, le ressort est vertical et porte une partie de la caisse, assimilée à un solide de masse $M = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ qui se déplace verticalement, sans frottement.

Faire le bilan des forces sur ce solide à l'équilibre et calculer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort.

INDICE

Outil : à l'équilibre, la force de rappel compense le poids.

B.2. 1 pts

L'axe $(O';\vec{k})$ est vertical, orienté vers le bas, d'origine O' à la position d'équilibre du centre d'inertie ; z est l'abscisse du centre d'inertie. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{M}\,z = 0$.

INDICE

Début : quand le solide est en z, l'allongement vaut $\Delta\ell_0 + z$. **Ensuite :** la condition d'équilibre élimine le poids.

B.3. 0,75 pts

Calculer la période propre T_0' des oscillations verticales de la caisse.

INDICE

Outil : l'équation a la forme de celle d'un solide-ressort de masse M.

B.4. `0,5 pts`

Sur une planète où la pesanteur serait deux fois plus faible, l'allongement à l'équilibre et la période propre de la caisse seraient-ils modifiés ? Justifier.

INDICE

Outil : repère, dans chaque expression, si g y figure.

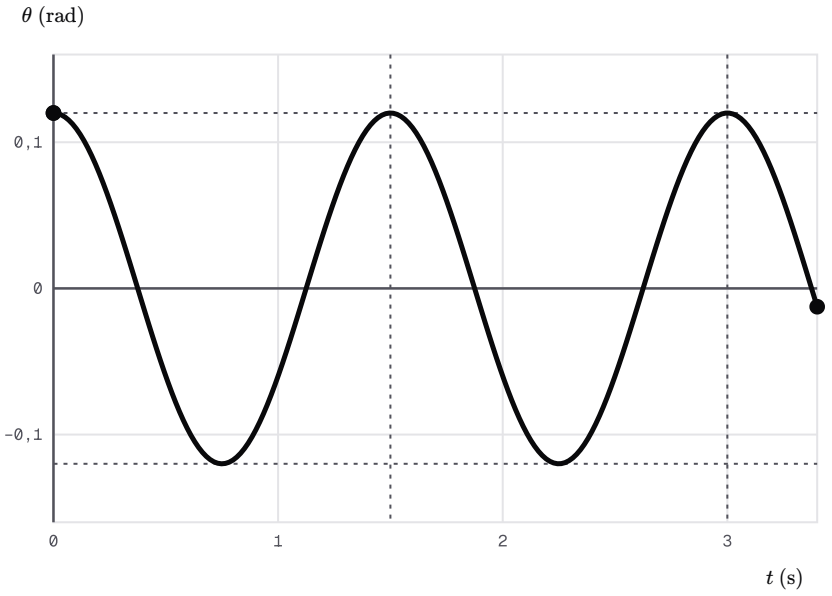
Exercice 2 — 6 pts

Pendule de torsion de laboratoire : période propre et amortissement

Un pendule de torsion de laboratoire est formé d'une barre horizontale fixée en son milieu à un fil d'acier vertical, de constante de torsion C. Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Δ du fil vaut $J_\Delta = 3{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.

L'abscisse angulaire θ de la barre est nulle quand le fil n'est pas tordu. La barre est tournée puis lâchée sans vitesse à $t = 0$.

Document 1. Enregistrement $\theta(t)$ sans frottement notable ; les droites verticales passent par $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ et $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$.



Abscisse angulaire de la barre, frottements négligeables

A.1. — 0,5 pts

Partie A : constante de torsion du fil.

Faire le bilan des actions qui s'exercent sur la barre et donner le moment de chacune par rapport à Δ.

INDICE

Outil : une force parallèle à l'axe, ou dont la droite d'action le rencontre, a un moment nul.

A.2. — 1 pts

Les frottements sont négligés. Montrer que θ vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

INDICE

Outil : autour de l'axe fixe Δ, la somme des moments égale $J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

A.3. 0,5 pts

Vérifier que $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$ est solution si $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$.

INDICE

Début : la dérivée seconde de $\theta(t)$ est proportionnelle à $\theta(t)$.

A.4. 0,5 pts

Lire sur le document 1 la période propre T_0 et l'amplitude θ_m, puis donner φ.

INDICE

Outil : la courbe part d'un maximum, puisque la barre est lâchée sans vitesse.

A.5. 0,75 pts

En déduire la constante de torsion C du fil.

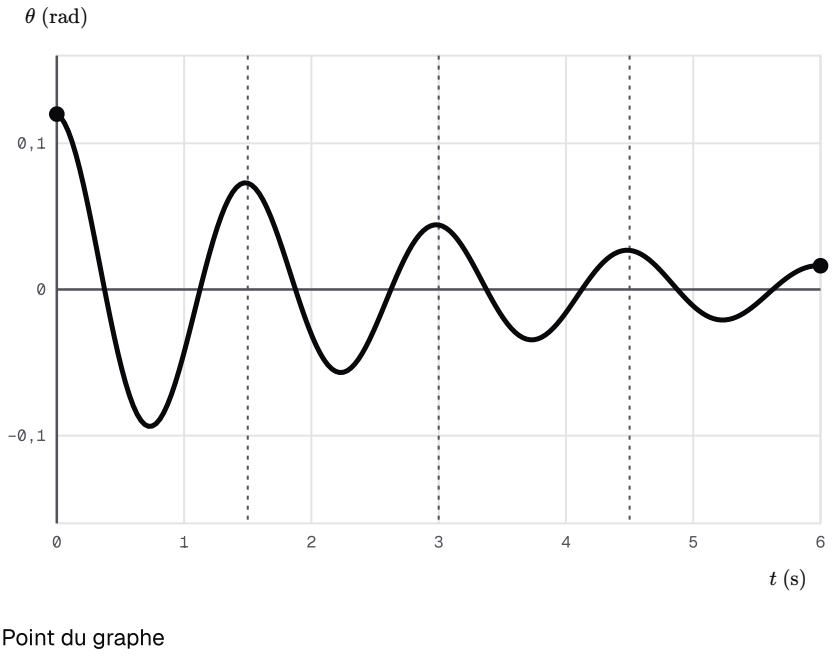
INDICE

Outil : isole C dans l'expression de la période propre.

B.1. 0,5 pts

Partie B : oscillations freinées par l'eau.

On admet que la période propre du pendule vaut $T_0 = 1{,}5\,\text{s}$. On fixe sous la barre une plaque verticale qui plonge dans une cuve d'eau, puis on recommence l'expérience. Le document 2 donne la courbe modèle obtenue. Quel est le régime des oscillations ? Justifier.



Document 2 : courbe modèle des oscillations de la barre freinée par l'eau

INDICE

Outil : rappelle-toi ce qui distingue un régime pseudo-périodique d'un régime apériodique.

B.2. 0,5 pts

Les premiers maximums valent environ $0{,}12$; $0{,}073$ et $0{,}044\,\text{rad}$. Quel est le type de frottement ? Justifier par un calcul.

INDICE

Outil : compare les différences, puis les rapports, de deux maximums successifs.

B.3. 0,5 pts

Mesurer la pseudo-période T sur le document 2 et la comparer à T_0. Conclure sur l'amortissement.

INDICE

Outil : une durée qui couvre plusieurs pseudo-périodes se mesure plus précisément qu'une seule.

B.4. 1,25 pts

On remplace l'eau par une huile très visqueuse. Esquisser l'allure attendue de $\theta(t)$ pour un lâcher sans vitesse à $\theta_m = 0{,}12\,\text{rad}$, et nommer le régime obtenu si l'amortissement devient assez important.

INDICE

Outil : plus le frottement fluide est fort, plus l'amplitude diminue vite ; au-delà d'un seuil, le système n'oscille plus.

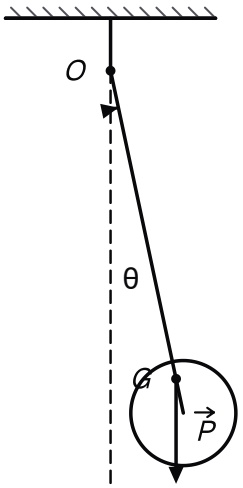
Exercice 3 — 6 pts

Balancier d'une horloge comtoise et pendule battant la seconde

Le balancier d'une horloge comtoise est une longue tige terminée par un disque de laiton. Il oscille sans frottement autour d'un axe horizontal Δ qui passe par son extrémité supérieure O.

Sa masse vaut $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$; son centre d'inertie G est à la distance $d = 0{,}80\,\mathrm{m}$ de l'axe ; son moment d'inertie par rapport à Δ vaut $J_\Delta = 0{,}85\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. On prend $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document 1. Schéma du balancier écarté de l'angle θ, orienté depuis la verticale descendante.



Balancier d'horloge écarté de sa position d'équilibre

A.1. — 0,75 pts

Partie A : période propre du balancier.

Faire le bilan des actions sur le balancier et exprimer le moment de chacune par rapport à Δ quand le balancier fait l'angle θ avec la verticale.

INDICE

Outil : le moment d'une force est nul quand sa droite d'action rencontre l'axe.

A.2. — 1 pts

Montrer que, pour de petites oscillations, $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{m\,g\,d}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

INDICE

Début : pour le balancier, la somme des moments égale J_Δ fois l'accélération angulaire. **Point délicat :** l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ exige θ en radians.

A.3. 0,5 pts

Calculer la période propre T_0 du balancier.

INDICE

Outil : identifie le coefficient de θ à $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$.

A.4. 0,5 pts

Calculer la longueur ℓ du pendule simple synchrone du balancier.

INDICE

Outil : égale la période propre du pendule simple à celle du balancier.

B.1. 1 pts

Partie B : un pendule battant la seconde.

Un horloger veut fabriquer un pendule simple de période propre $2{,}0\,\mathrm{s}$, qui bat la seconde à chaque passage par la verticale. Il dispose d'une bille de plomb, d'un fil fin de longueur réglable et d'un chronomètre.

Proposer un protocole pour mesurer la période propre du pendule pour une longueur donnée : montage, grandeurs mesurées, précautions.

INDICE

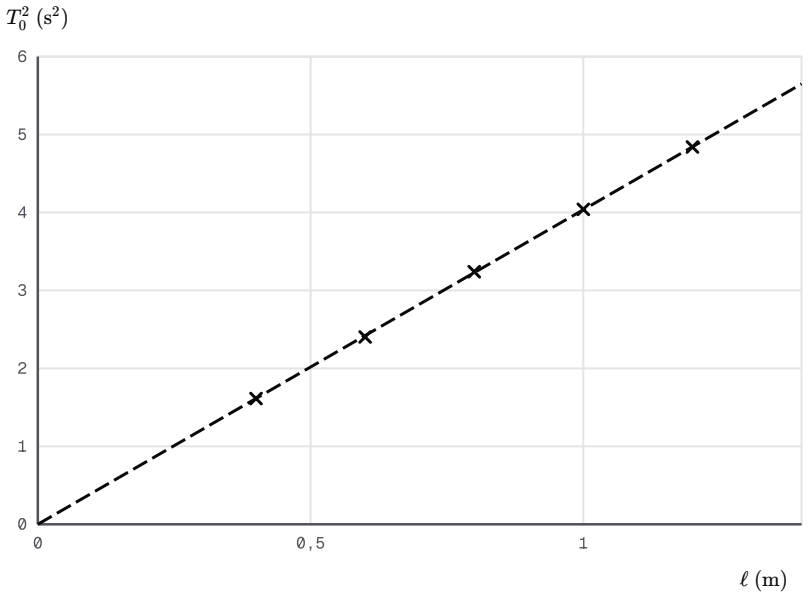
Outil : que doit-on mesurer, avec quel instrument, et qu'est-ce qui fausse la mesure ?

B.2. 0,5 pts

Le document 2 donne les mesures de l'horloger et le document 3 les points $(\ell ; T_0^2)$ avec la droite de modélisation, de coefficient directeur $a \approx 4{,}04\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-1}}$. En déduire la longueur ℓ_s du pendule battant la seconde.

Document 2. Durée Δt de dix oscillations.

ℓ (m)	Δt (s)
0,40	12,7
0,60	15,5
0,80	18,0
1,00	20,1
1,20	22,0



Document 3 : carré de la période en fonction de la longueur du pendule simple

INDICE

Début : calcule le carré de la période voulue. **Ensuite :** cherche l'abscisse du point de la droite qui a cette ordonnée.

B.3. 1,25 pts

Une horloge munie de ce pendule de $0{,}99\,\mathrm{m}$ est installée dans une base lunaire, où l'intensité de la pesanteur vaut $g_L = 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, contre $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ sur la Terre. L'horloge avance d'une seconde à chaque passage du pendule par la verticale.

Quelle durée l'horloge affiche-t-elle au bout d'une heure réelle ? Quelle longueur faudrait-il donner au pendule pour qu'elle y donne de nouveau l'heure juste ?

INDICE

Point délicat : une oscillation complète compte deux passages par la verticale.

B.4. 0,5 pts

Les mesures ont été faites avec une amplitude de 6°. Montrer que l'approximation des petites oscillations est justifiée.

INDICE

Point délicat : convertis l'angle en radians avant de le comparer à son sinus.

Exercice 4 6 pts

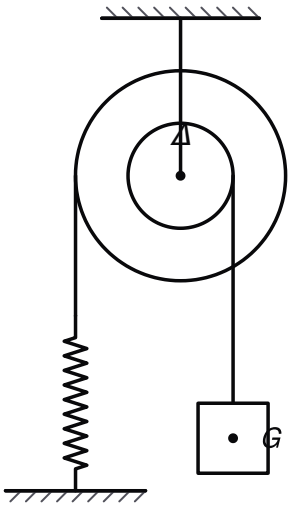
Poulie à deux gorges et trieuse de colis

Une poulie à deux gorges, de rayons $r_1 = 3{,}0\,\text{cm}$ et $r_2 = 6{,}0\,\text{cm}$, tourne sans frottement autour d'un axe horizontal fixe Δ. Son moment d'inertie vaut $J_\Delta = 1{,}8 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Un fil enroulé sur la petite gorge porte un solide de masse $m = 0{,}25\,\text{kg}$. Un second fil, enroulé en sens inverse sur la grande gorge, est attaché à un ressort vertical de raideur $K = 80\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, fixé au sol. Les fils sont inextensibles, sans masse, et ne glissent pas. On prend $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'abscisse angulaire θ de la poulie est nulle à l'équilibre et positive quand le solide descend ; les oscillations sont assez petites pour que les fils restent tendus.

Document 1. Schéma du dispositif.



Poulie à deux gorges : solide suspendu d'un côté, ressort fixé au sol de l'autre

A.1. 0,75 pts

Partie A : système oscillant composé.

À l'équilibre, la tension du fil du solide vaut $m\,g$ et celle du fil du ressort vaut $K\,\Delta\ell_0$. Écrire l'équilibre des moments de la poulie et calculer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort.

INDICE

Outil : à l'équilibre, la somme des moments par rapport à Δ est nulle ; chaque tension agit au rayon de sa gorge.

A.2. 0,75 pts

En mouvement, on note $\|\vec{T_1}\|$ la tension du fil du solide et $\|\vec{T_2}\|$ celle du fil du ressort. Le solide descend de $x = r_1\,\theta$ et le ressort s'allonge de $\Delta\ell_0 + r_2\,\theta$.

Écrire la deuxième loi de Newton pour le solide. Appliquer à la poulie, d'axe Δ, la relation fondamentale de la dynamique en rotation. Exprimer enfin $\|\vec{T_2}\|$.

INDICE

Début : projette la deuxième loi sur un axe vertical vers le bas. **Point délicat :** le fil du ressort transmet la force de rappel, de valeur K fois l'allongement.

A.3. 1,25 pts

Montrer que θ vérifie une équation différentielle de la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,\theta = 0$, et exprimer la période propre T_0 en fonction de J_Δ, m, r_1, K et r_2.

INDICE

Début : il faut éliminer les deux tensions. **Point délicat :** les termes constants disparaissent grâce à l'équilibre.

A.4. 0,75 pts

Calculer la valeur de la période propre T_0.

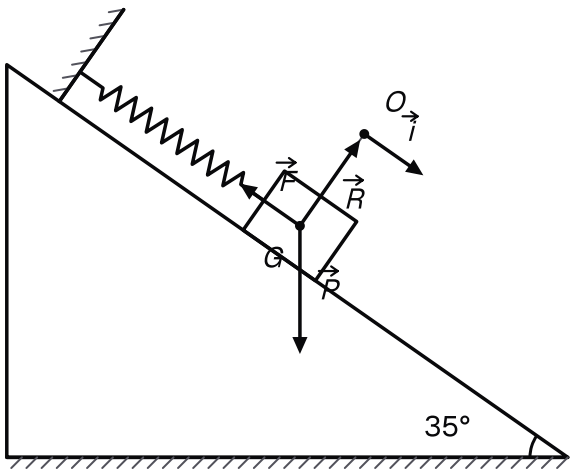
INDICE

Outil : calcule séparément le numérateur et le dénominateur sous la racine, dans les unités du système international.

B.1. 0,5 pts

Partie B : plateau incliné d'une trieuse de colis.

Dans une trieuse, un godet de masse $M = 0{,}60\,\text{kg}$ glisse sans frottement sur un plateau incliné de $\beta = 35^\circ$ sur l'horizontale. Il est accroché sous un ressort de raideur $k = 24\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, parallèle au plateau et fixé en haut. Calculer l'allongement $\Delta\ell_0'$ du ressort à l'équilibre.



Document 2 : godet accroché à un ressort sur le plateau incliné de la trieuse

INDICE

Outil : à l'équilibre, la force de rappel compense la composante du poids parallèle au plateau.

B.2. 0,5 pts

On admet que l'abscisse x du centre d'inertie, sur un axe parallèle au plateau orienté vers le bas et d'origine à l'équilibre, vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{M}\,x = 0$. Calculer la période propre T_0'.

INDICE

Outil : identifie $\dfrac{k}{M}$ à $\dfrac{4\pi^2}{T_0'^2}$.

B.3. 1 pts

À $t = 0$, le godet est à $x(0) = 2{,}0\,\text{cm}$ et remonte le plateau avec une vitesse de valeur $0{,}10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer l'amplitude x_m et la phase à l'origine φ de $x(t) = x_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0'}\,t + \varphi\right)$.

INDICE

Début : écris $x(0)$ et $v_x(0)$; élève au carré et ajoute pour obtenir x_m. **Point délicat :** le godet remonte, donc $v_x(0) < 0$.

B.4. `0,5 pts`

On admet $x_m = 2{,}5\,\text{cm}$, $\varphi = 0{,}67\,\text{rad}$ et $\dfrac{2\pi}{T_0'} = 6{,}32\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Écrire l'équation horaire, x en centimètres, puis déterminer la date du premier passage du godet par sa position d'équilibre.

INDICE

Début : le godet passe par l'équilibre quand le cosinus s'annule. **Point délicat :** cherche la plus petite date positive.

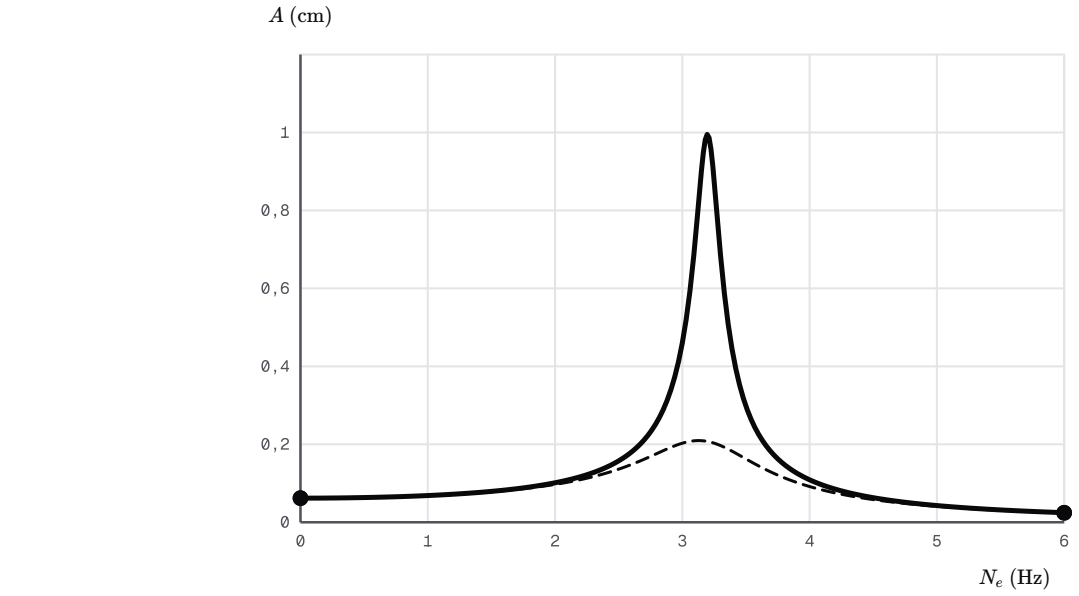
Exercice 5 — 6 pts

Résonance et amortisseurs

Un solide de masse $m = 0{,}200\,\text{kg}$ est suspendu à un ressort vertical ; le haut du ressort est relié par un fil à la membrane d'un vibreur.

Le vibreur impose au point d'attache du ressort un mouvement vertical sinusoïdal de fréquence N_e réglable. Pour chaque fréquence, on mesure l'amplitude A des oscillations du solide en régime permanent.

Document. Courbes modèles de l'amplitude tracées à partir des mesures : courbe 1, solide dans l'air ; courbe 2, solide plongé dans de l'huile.



Courbes modèles de l'amplitude en fonction de la fréquence du vibreur

A.1. — 0,5 pts

Partie A : fréquence propre de l'oscillateur.

Lire sur la courbe 1 la fréquence N_r pour laquelle l'amplitude est maximale. Que vaut, à peu près, la fréquence propre N_0 du solide-ressort ?

INDICE

Outil : que dit le frottement dans l'air sur l'écart entre N_r et N_0 ?

A.2. — 1 pts

En déduire la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : $N_0 = \dfrac{1}{T_0}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

A.3. 0,75 pts

Le vibreur est réglé à $N_e = 5{,}0\,\text{Hz}$. Comparer l'amplitude lue sur la courbe 1 à son maximum. À quelle fréquence le solide oscille-t-il alors ?

INDICE

Outil : repère sur la courbe 1 le point d'abscisse $5{,}0\,\text{Hz}$.

B.1. 0,5 pts

Partie B : effet de l'amortissement.

On admet que la fréquence propre du solide-ressort vaut $N_0 = 3{,}2\,\text{Hz}$ et la raideur $K = 81\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Comparer les deux courbes : hauteur du maximum, largeur du pic. Laquelle montre une résonance aiguë ?

INDICE

Outil : une résonance aiguë donne un pic haut et étroit.

B.2. 1 pts

Énoncer les conditions d'une résonance aiguë.

INDICE

Outil : relis ce que la comparaison des deux courbes vient de montrer.

B.3. 0,75 pts

Les véhicules et certains bâtiments sont équipés d'amortisseurs. En s'appuyant sur le document, expliquer leur rôle.

INDICE

Outil : compare les amplitudes des deux courbes près de N_0, puis loin de N_0.

B.4. 1,5 pts

On utilise ce solide-ressort comme support d'un petit compresseur. Le moteur tourne à 190 tours par minute et impose ses vibrations à la fréquence de sa rotation. Montrer que le support risque d'entrer en résonance.

Sans changer le ressort, quelle masse totale minimale (solide, compresseur et lest) le ressort doit-il porter pour que la fréquence propre soit inférieure d'au moins $40\,\%$ à la fréquence du moteur ?

INDICE

Début : convertis la vitesse du moteur en hertz. **Ensuite :** traduis la condition sur la fréquence propre en une condition sur la masse.