BURHAN

Systèmes mécaniques oscillants : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/systemes-mecaniques-oscillants/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Systèmes mécaniques oscillants	Niveau examen	5

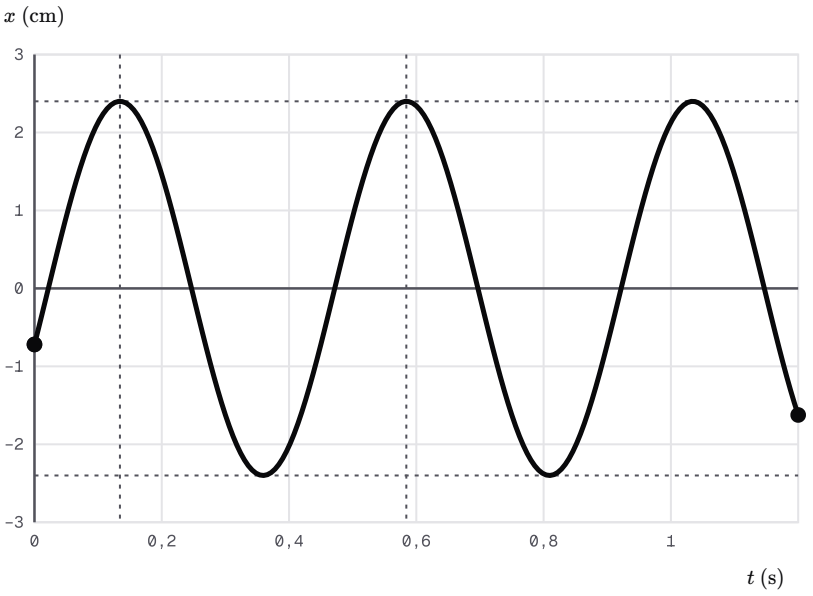
Exercice 1 6 pts

Ressort d'une maquette de suspension

Un club de modélisme teste le ressort de la suspension d'une maquette de voiture. Le ressort, de masse négligeable, a une raideur K inconnue. On prend $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Sur un banc d'essai horizontal, un solide de masse $m = 0{,}320\,\mathrm{kg}$, accroché au ressort, glisse sans frottement le long d'un axe $(O;\vec{i})$ dont l'origine O est sa position d'équilibre. Un capteur enregistre son abscisse x.

Document. Enregistrement $x(t)$ sur le banc ; les droites verticales passent par deux maximums successifs, à $t \approx 0{,}13\,\mathrm{s}$ et $t \approx 0{,}58\,\mathrm{s}$.



Courbe 1 ● Point du graphe

Abscisse du solide sur le banc d'essai

A.1. 0,5 pts

Partie A : essai du ressort sur un banc horizontal.

Lire sur le document la période propre T_0 et l'amplitude x_m des oscillations.

INDICE

Outil : deux maximums successifs sont séparés d'une période.

CORRIGÉ

Période. $T_0 \approx 0{,}58 - 0{,}13 = 0{,}45\,\mathrm{s}$.

Amplitude. Les extrêmes valent $\pm 2{,}4\,\mathrm{cm}$.

Conclusion. On lit $T_0 \approx 0{,}45\,\mathrm{s}$ et $x_m \approx 2{,}4\,\mathrm{cm}$.

A.2. 0,5 pts

On lit $x(0) \approx -0{,}72\,\text{cm}$. Déterminer la phase à l'origine φ de l'équation horaire $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, en radians.

INDICE

Point délicat : $\cos\varphi$ donne deux valeurs ; le sens de variation de x en $t = 0$ choisit la bonne.

CORRIGÉ

Cosinus. $\cos\varphi = \dfrac{-0{,}72}{2{,}4} = -0{,}30$: $\varphi \approx 1{,}88\,\text{rad}$ ou $\varphi \approx -1{,}88\,\text{rad}$.

Sens. La courbe monte en $t = 0$: $v_x(0) > 0$, donc $\sin\varphi < 0$.

Conclusion. La phase à l'origine vaut $\varphi \approx -1{,}88\,\text{rad}$.

A.3. 0,75 pts

L'abscisse vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{m}\,x = 0$. Montrer que $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$ en est solution à condition que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

INDICE

Début : dérive deux fois $x(t)$ avec la dérivée d'une fonction composée. **Ensuite :** reporte dans l'équation ; elle doit être vraie à chaque instant.

CORRIGÉ

Dérivées. On note $\Phi = \dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}\,x_m \sin\Phi$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x$$

Report. L'équation devient $\left(\dfrac{K}{m} - \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\right) x = 0$; elle est vraie à chaque instant si $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{K}{m}$.

Conclusion. La fonction proposée est solution à condition que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$, la période propre de l'oscillateur.

A.4. 0,75 pts

En déduire la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : élève au carré l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Raideur.

$$K = \frac{4\pi^2\, m}{T_0^2}$$
$$K = \frac{4\pi^2 \times 0{,}320}{0{,}45^2}$$
$$K \approx 62\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

Conclusion. La raideur du ressort vaut environ $62\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

A.5. 0,5 pts

Calculer la vitesse maximale v_m du solide et préciser où elle est atteinte.

INDICE

Outil : la valeur maximale de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ vaut $\dfrac{2\pi}{T_0}\,x_m$; travaille en mètres.

CORRIGÉ

Vitesse maximale.

$$v_m = \frac{2\pi\, x_m}{T_0}$$
$$v_m = \frac{2\pi \times 0{,}024}{0{,}45}$$
$$v_m \approx 0{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Conclusion. La vitesse atteint environ $0{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ au passage par la position d'équilibre, où $\sin\Phi = \pm 1$.

B.1. 0,75 pts

Partie B : le ressort monté verticalement dans la maquette.

On admet que la raideur du ressort vaut $K = 62\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Dans la maquette, le ressort est vertical et porte une partie de la caisse, assimilée à un solide de masse $M = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ qui se déplace verticalement, sans frottement.

Faire le bilan des forces sur ce solide à l'équilibre et calculer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort.

INDICE

Outil : à l'équilibre, la force de rappel compense le poids.

CORRIGÉ

Bilan. Le poids $\vec{P}$, vers le bas, et la force de rappel $\vec{F}$, vers le haut ; $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$.

Allongement. $K\,\Delta\ell_0 = M\,g$:

$$\begin{aligned}\Delta\ell_0 &= \frac{M\,g}{K}\\ \Delta\ell_0 &= \frac{0{,}60 \times 9{,}80}{62}\\ \Delta\ell_0 &\approx 9{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Conclusion. À l'équilibre, le ressort est allongé d'environ $9{,}5\,\mathrm{cm}$.

B.2. 1 pts

L'axe $(O';\vec{k})$ est vertical, orienté vers le bas, d'origine O' à la position d'équilibre du centre d'inertie ; z est l'abscisse du centre d'inertie. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{M}\,z = 0$.

INDICE

Début : quand le solide est en z, l'allongement vaut $\Delta\ell_0 + z$. **Ensuite :** la condition d'équilibre élimine le poids.

CORRIGÉ

Cadre. Système : le solide ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe vertical vers le bas, d'origine à l'équilibre.

Deuxième loi de Newton, projetée sur $\vec{k}$:

$$\begin{aligned}M\,g - K\,(\Delta\ell_0 + z)\\ = M\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

Équilibre. $M\,g = K\,\Delta\ell_0$, donc $M\,\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -K\,z$.

Conclusion. En divisant par M, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{M}\,z = 0$.

B.3. 0,75 pts

Calculer la période propre T_0' des oscillations verticales de la caisse.

INDICE

Outil : l'équation a la forme de celle d'un solide-ressort de masse M.

CORRIGÉ

Période propre.

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$
$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}60}{62}}$$
$$T_0' \approx 0{,}62\,\text{s}$$

Conclusion. La caisse oscille verticalement avec une période propre d'environ $0{,}62\,\text{s}$.

B.4. 0,5 pts

Sur une planète où la pesanteur serait deux fois plus faible, l'allongement à l'équilibre et la période propre de la caisse seraient-ils modifiés ? Justifier.

INDICE

Outil : repère, dans chaque expression, si g y figure.

CORRIGÉ

Allongement. $\Delta\ell_0 = \dfrac{M\,g}{K}$ contient g : il serait divisé par deux, environ $4{,}7\,\text{cm}$.

Période propre. $T_0' = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}}$ ne contient pas g : le poids s'est éliminé de l'équation différentielle.

Conclusion. Seul l'allongement à l'équilibre changerait ; la période propre resterait d'environ $0{,}62\,\text{s}$.

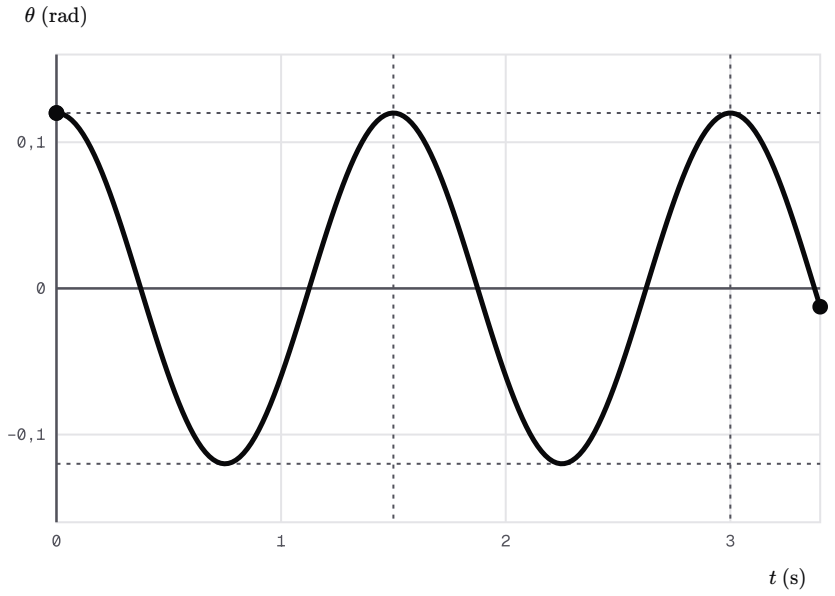
Exercice 2 — 6 pts

Pendule de torsion de laboratoire : période propre et amortissement

Un pendule de torsion de laboratoire est formé d'une barre horizontale fixée en son milieu à un fil d'acier vertical, de constante de torsion C. Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Δ du fil vaut $J_\Delta = 3{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

L'abscisse angulaire θ de la barre est nulle quand le fil n'est pas tordu. La barre est tournée puis lâchée sans vitesse à $t = 0$.

Document 1. Enregistrement $\theta(t)$ sans frottement notable ; les droites verticales passent par $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ et $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$.



Courbe 1 ● Point du graphe

Abscisse angulaire de la barre, frottements négligeables

A.1. — 0,5 pts

Partie A : constante de torsion du fil.

Faire le bilan des actions qui s'exercent sur la barre et donner le moment de chacune par rapport à Δ.

INDICE

Outil : une force parallèle à l'axe, ou dont la droite d'action le rencontre, a un moment nul.

CORRIGÉ

Poids. Vertical, donc parallèle à Δ : moment nul.

Tension du fil. Portée par Δ : moment nul.

Couple de rappel. Son moment vaut $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$.

Conclusion. Seul le couple de rappel a un moment non nul, $-C\,\theta$.

A.2. 1 pts

Les frottements sont négligés. Montrer que θ vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

INDICE

Outil : autour de l'axe fixe Δ, la somme des moments égale $J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

CORRIGÉ

Cadre. Système : la barre ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe fixe Δ vertical ; θ orienté.

Relation fondamentale en rotation.

$$J_\Delta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -C\,\theta$$

Conclusion. En divisant par J_Δ, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

A.3. 0,5 pts

Vérifier que $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$ est solution si $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$.

INDICE

Début : la dérivée seconde de $\theta(t)$ est proportionnelle à $\theta(t)$.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,\theta$.

Report. $\left(\dfrac{C}{J_\Delta} - \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\right)\theta = 0$ à chaque instant si $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{C}{J_\Delta}$.

Conclusion. La fonction est solution pour $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$.

A.4. 0,5 pts

Lire sur le document 1 la période propre T_0 et l'amplitude θ_m, puis donner φ.

INDICE

Outil : la courbe part d'un maximum, puisque la barre est lâchée sans vitesse.

CORRIGÉ

Lectures. Maximums à 0, $1{,}5\,\mathrm{s}$ et $3{,}0\,\mathrm{s}$: $T_0 \approx 1{,}5\,\mathrm{s}$; extrêmes à $\pm 0{,}12\,\mathrm{rad}$: $\theta_m \approx 0{,}12\,\mathrm{rad}$.

Phase. $\theta(0) = \theta_m$, donc $\cos\varphi = 1$ et $\varphi = 0$.

Conclusion. On lit $T_0 \approx 1{,}5\,\mathrm{s}$ et $\theta_m \approx 0{,}12\,\mathrm{rad}$, avec $\varphi = 0$.

A.5. 0,75 pts

En déduire la constante de torsion C du fil.

INDICE

Outil : isole C dans l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Constante de torsion.

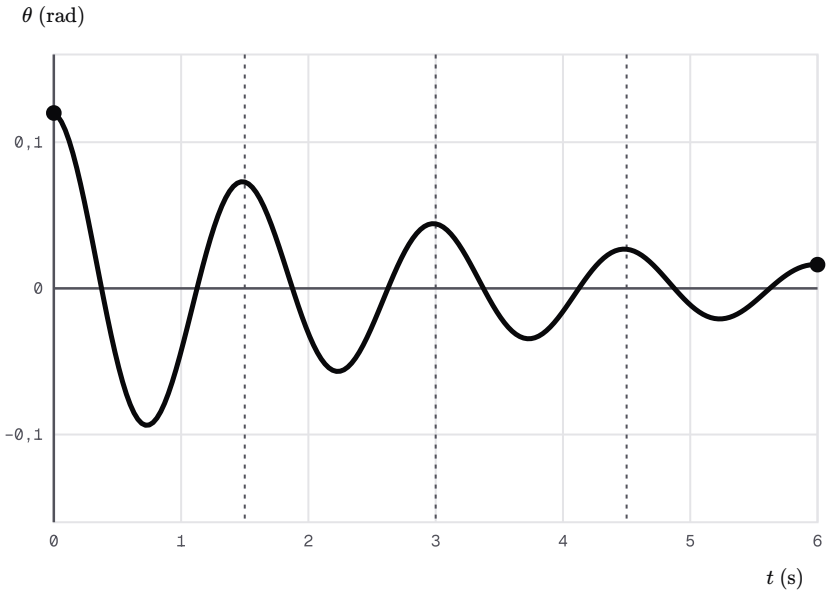
$$C = \frac{4\pi^2\, J_\Delta}{T_0^2}$$
$$C = \frac{4\pi^2 \times 3{,}6 \times 10^{-3}}{1{,}5^2}$$
$$C \approx 6{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}$$

Conclusion. La constante de torsion vaut environ $6{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$.

B.1. `0,5 pts`

Partie B : oscillations freinées par l'eau.

On admet que la période propre du pendule vaut $T_0 = 1{,}5\,\text{s}$. On fixe sous la barre une plaque verticale qui plonge dans une cuve d'eau, puis on recommence l'expérience. Le document 2 donne la courbe modèle obtenue. Quel est le régime des oscillations ? Justifier.



Document 2 : courbe modèle des oscillations de la barre freinée par l'eau

INDICE

Outil : rappelle-toi ce qui distingue un régime pseudo-périodique d'un régime apériodique.

CORRIGÉ

Observation. θ change de signe plusieurs fois et ses maximums diminuent.

Conclusion. Le régime est pseudo-périodique : la barre oscille autour de l'équilibre avec une amplitude décroissante.

B.2. 0,5 pts

Les premiers maximums valent environ $0{,}12$; $0{,}073$ et $0{,}044\,\text{rad}$. Quel est le type de frottement ? Justifier par un calcul.

INDICE

Outil : compare les différences, puis les rapports, de deux maximums successifs.

CORRIGÉ

Différences. $0{,}12 - 0{,}073 \approx 0{,}047\,\text{rad}$, puis $0{,}073 - 0{,}044 \approx 0{,}029\,\text{rad}$: elles ne sont pas égales.

Rapports. $\dfrac{0{,}073}{0{,}12} \approx 0{,}61$ et $\dfrac{0{,}044}{0{,}073} \approx 0{,}60$: ils sont à peu près constants.

Conclusion. Les maximums diminuent de moins en moins vite, dans un rapport constant : le frottement est fluide, dû à l'eau.

B.3. 0,5 pts

Mesurer la pseudo-période T sur le document 2 et la comparer à T_0. Conclure sur l'amortissement.

INDICE

Outil : une durée qui couvre plusieurs pseudo-périodes se mesure plus précisément qu'une seule.

CORRIGÉ

Mesure. Trois pseudo-périodes séparent le premier maximum de celui voisin de $4{,}5\,\text{s}$:
$T \approx \dfrac{4{,}5}{3} = 1{,}5\,\text{s}$.

Comparaison. T est voisine de $T_0 = 1{,}5\,\text{s}$.

Conclusion. La pseudo-période est proche de la période propre : l'amortissement par l'eau reste faible.

B.4. 1,25 pts

On remplace l'eau par une huile très visqueuse. Esquisser l'allure attendue de $\theta(t)$ pour un lâcher sans vitesse à $\theta_m = 0{,}12\,\text{rad}$, et nommer le régime obtenu si l'amortissement devient assez important.

INDICE

Outil : plus le frottement fluide est fort, plus l'amplitude diminue vite ; au-delà d'un seuil, le système n'oscille plus.

CORRIGÉ

Effet du frottement. Les maximums diminuent plus vite et la pseudo-période s'écarte de T_0.

Amortissement important. La barre revient vers $\theta = 0$ sans dépasser l'équilibre.

Esquisse. La courbe part de $0{,}12\,\text{rad}$ avec une tangente horizontale, puis décroît vers zéro sans jamais changer de signe ni osciller.

Conclusion. Avec une huile assez visqueuse, le régime devient apériodique ; le régime critique sépare ce cas du régime pseudo-périodique.

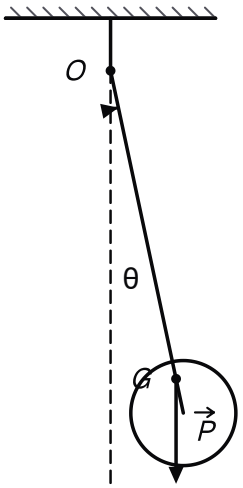
Exercice 3 — 6 pts

Balancier d'une horloge comtoise et pendule battant la seconde

Le balancier d'une horloge comtoise est une longue tige terminée par un disque de laiton. Il oscille sans frottement autour d'un axe horizontal Δ qui passe par son extrémité supérieure O.

Sa masse vaut $m = 1{,}2\,\text{kg}$; son centre d'inertie G est à la distance $d = 0{,}80\,\text{m}$ de l'axe ; son moment d'inertie par rapport à Δ vaut $J_\Delta = 0{,}85\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. On prend $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Document 1. Schéma du balancier écarté de l'angle θ, orienté depuis la verticale descendante.



Balancier d'horloge écarté de sa position d'équilibre

A.1. — 0,75 pts

Partie A : période propre du balancier.

Faire le bilan des actions sur le balancier et exprimer le moment de chacune par rapport à Δ quand le balancier fait l'angle θ avec la verticale.

INDICE

Outil : le moment d'une force est nul quand sa droite d'action rencontre l'axe.

CORRIGÉ

Réaction de l'axe. Appliquée sur Δ : moment nul.

Poids. Bras de levier $d\,|\sin\theta|$; il ramène le balancier vers la verticale, donc son moment est de signe opposé à θ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -m\,g\,d\sin\theta$.

Conclusion. Seul le poids a un moment non nul, $-m\,g\,d\sin\theta$.

A.2. 1 pts

Montrer que, pour de petites oscillations, $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{m\,g\,d}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

INDICE

Début : pour le balancier, la somme des moments égale J_Δ fois l'accélération angulaire. **Point délicat :** l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ exige θ en radians.

CORRIGÉ

Cadre. Système : le balancier ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe fixe Δ horizontal.

Relation fondamentale en rotation.

$$J_\Delta\,\ddot{\theta} = -m\,g\,d\sin\theta$$

Petits angles. $\sin\theta \approx \theta$, θ en radians, donne $J_\Delta\,\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + m\,g\,d\,\theta = 0$.

Conclusion. En divisant par J_Δ, on obtient l'équation annoncée.

A.3. 0,5 pts

Calculer la période propre T_0 du balancier.

INDICE

Outil : identifie le coefficient de θ à $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$.

CORRIGÉ

Calcul. $m\,g\,d = 1{,}2 \times 9{,}80 \times 0{,}80 \approx 9{,}41\ \mathrm{N\cdot m}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m\,g\,d}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}85}{9{,}41}}$$

$$T_0 \approx 1{,}9\ \mathrm{s}$$

Conclusion. La période propre du balancier vaut environ $1{,}9\ \mathrm{s}$.

A.4. `0,5 pts`

Calculer la longueur ℓ du pendule simple synchrone du balancier.

INDICE

Outil : égale la période propre du pendule simple à celle du balancier.

CORRIGÉ

Longueur.

$$\ell = \frac{J_\Delta}{m\,d}$$
$$\ell = \frac{0{,}85}{1{,}2 \times 0{,}80}$$
$$\ell \approx 0{,}89\,\mathrm{m}$$

Conclusion. Le pendule simple synchrone mesure environ $0{,}89\,\mathrm{m}$, un peu plus que la distance d.

B.1. `1 pts`

Partie B : un pendule battant la seconde.

Un horloger veut fabriquer un pendule simple de période propre $2{,}0\,\mathrm{s}$, qui bat la seconde à chaque passage par la verticale. Il dispose d'une bille de plomb, d'un fil fin de longueur réglable et d'un chronomètre.

Proposer un protocole pour mesurer la période propre du pendule pour une longueur donnée : montage, grandeurs mesurées, précautions.

INDICE

Outil : que doit-on mesurer, avec quel instrument, et qu'est-ce qui fausse la mesure ?

CORRIGÉ

Montage. Le fil est noué à un crochet fixe et porte la bille ; sa longueur ℓ, du crochet au centre de la bille, se mesure au mètre ruban.

Mesures. La bille, écartée puis lâchée sans vitesse, oscille ; l'horloger chronomètre dix oscillations et divise la durée obtenue par dix.

Précautions. Un écart de départ de quelques degrés seulement ; un départ du chronomètre au passage par la verticale, là où la bille va le plus vite ; deux ou trois essais pour chaque longueur.

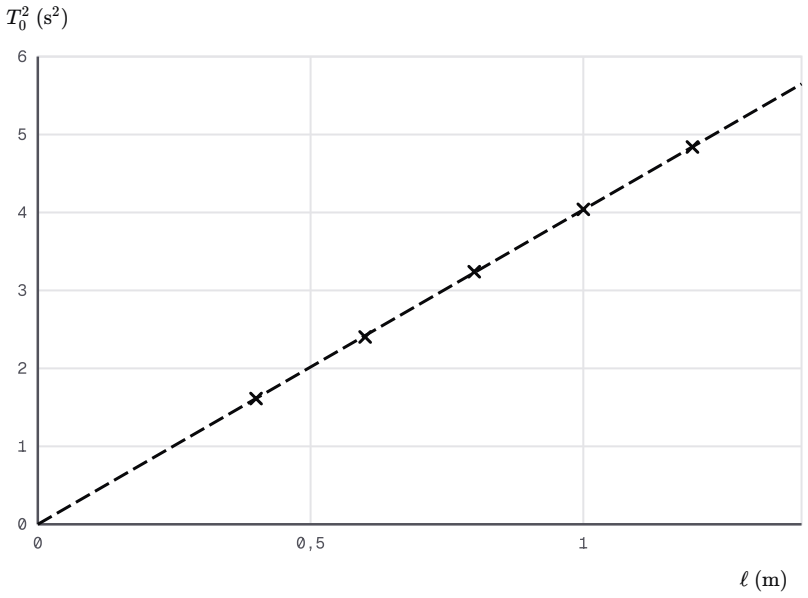
Conclusion. Pour chaque longueur, on obtient $T_0 = \dfrac{\Delta t}{10}$, avec une erreur de déclenchement divisée par dix.

B.2. 0,5 pts

Le document 2 donne les mesures de l'horloger et le document 3 les points $(\ell ; T_0^2)$ avec la droite de modélisation, de coefficient directeur $a \approx 4{,}04\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-1}}$. En déduire la longueur ℓ_s du pendule battant la seconde.

Document 2. Durée Δt de dix oscillations.

ℓ (m)	Δt (s)
0,40	12,7
0,60	15,5
0,80	18,0
1,00	20,1
1,20	22,0



Document 3 : carré de la période en fonction de la longueur du pendule simple

INDICE

Début : calcule le carré de la période voulue. **Ensuite :** cherche l'abscisse du point de la droite qui a cette ordonnée.

CORRIGÉ

Carré de la période. $T_0^2 = 2{,}0^2 = 4{,}0\,\mathrm{s^2}$.

Lecture sur la droite. $T_0^2 = a\,\ell$, donc :

$$\ell_s = \frac{T_0^2}{a}$$
$$\ell_s = \frac{4{,}0}{4{,}04}$$
$$\ell_s \approx 0{,}99\,\mathrm{m}$$

Conclusion. Le pendule battant la seconde mesure environ $0{,}99\,\mathrm{m}$.

B.3. `1,25 pts`

Une horloge munie de ce pendule de $0{,}99\,\mathrm{m}$ est installée dans une base lunaire, où l'intensité de la pesanteur vaut $g_L = 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, contre $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ sur la Terre. L'horloge avance d'une seconde à chaque passage du pendule par la verticale.

Quelle durée l'horloge affiche-t-elle au bout d'une heure réelle ? Quelle longueur faudrait-il donner au pendule pour qu'elle y donne de nouveau l'heure juste ?

INDICE

Point délicat : une oscillation complète compte deux passages par la verticale.

CORRIGÉ

Période sur la Lune.

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_s}{g_L}}$$
$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}99}{1{,}62}}$$
$$T_L \approx 4{,}9\,\mathrm{s}$$

Durée affichée. En $3\,600\,\mathrm{s}$, le pendule fait $\dfrac{3\,600}{T_L}$ oscillations ; chacune fait avancer l'horloge de $2{,}0\,\mathrm{s}$:

$$t_a = \frac{3\,600 \times 2{,}0}{T_L}$$
$$t_a = \frac{7\,200}{4{,}91}$$
$$t_a \approx 1{,}5 \times 10^{3}\,\mathrm{s}$$

Retard. L'horloge affiche environ $24\,\mathrm{min}$ pour une heure : elle retarde d'environ $36\,\mathrm{min}$ par heure.

Nouvelle longueur. La période propre $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ reste égale à $2{,}0\,\mathrm{s}$ si le rapport $\dfrac{\ell}{g}$ garde sa valeur terrestre :

$$\ell_L = \ell_s\,\frac{g_L}{g}$$
$$\ell_L = 0{,}99 \times \frac{1{,}62}{9{,}80}$$
$$\ell_L \approx 0{,}16\,\mathrm{m}$$

Conclusion. Sur la Lune, l'horloge n'affiche qu'environ $24\,\mathrm{min}$ par heure réelle ; raccourci à environ $0{,}16\,\mathrm{m}$, le pendule lui rendrait l'heure juste.

B.4. `0,5 pts`

Les mesures ont été faites avec une amplitude de $6°$. Montrer que l'approximation des petites oscillations est justifiée.

INDICE

Point délicat : convertis l'angle en radians avant de le comparer à son sinus.

CORRIGÉ

Conversion. $\theta = 6 \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}105\,\text{rad}$ et $\sin\theta \approx 0{,}105$.

Écart. L'écart relatif entre θ et $\sin\theta$ vaut environ $0{,}2\,\%$.

Conclusion. À $6°$, $\sin\theta$ et θ sont presque égaux : l'approximation des petites oscillations est justifiée.

Exercice 4 6 pts

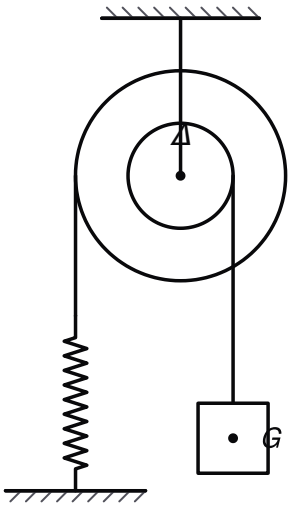
Poulie à deux gorges et trieuse de colis

Une poulie à deux gorges, de rayons $r_1 = 3{,}0\,\text{cm}$ et $r_2 = 6{,}0\,\text{cm}$, tourne sans frottement autour d'un axe horizontal fixe Δ. Son moment d'inertie vaut $J_\Delta = 1{,}8 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Un fil enroulé sur la petite gorge porte un solide de masse $m = 0{,}25\,\text{kg}$. Un second fil, enroulé en sens inverse sur la grande gorge, est attaché à un ressort vertical de raideur $K = 80\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, fixé au sol. Les fils sont inextensibles, sans masse, et ne glissent pas. On prend $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'abscisse angulaire θ de la poulie est nulle à l'équilibre et positive quand le solide descend ; les oscillations sont assez petites pour que les fils restent tendus.

Document 1. Schéma du dispositif.



Poulie à deux gorges : solide suspendu d'un côté, ressort fixé au sol de l'autre

A.1. 0,75 pts

Partie A : système oscillant composé.

À l'équilibre, la tension du fil du solide vaut $m\,g$ et celle du fil du ressort vaut $K\,\Delta\ell_0$. Écrire l'équilibre des moments de la poulie et calculer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort.

INDICE

Outil : à l'équilibre, la somme des moments par rapport à Δ est nulle ; chaque tension agit au rayon de sa gorge.

CORRIGÉ

Équilibre des moments. $m\,g\,r_1 - K\,\Delta\ell_0\,r_2 = 0$, avec $m\,g\,r_1 = 0{,}25 \times 9{,}80 \times 0{,}030 \approx 7{,}35 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m}$ et $K\,r_2 = 80 \times 0{,}060 = 4{,}8\,\mathrm{N}$:

$$\begin{aligned} \Delta\ell_0 &= \frac{m\,g\,r_1}{K\,r_2} \\ \Delta\ell_0 &= \frac{7{,}35 \times 10^{-2}}{4{,}8} \\ \Delta\ell_0 &\approx 1{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Conclusion. À l'équilibre, le ressort est allongé d'environ $1{,}5\,\mathrm{cm}$.

A.2. 0,75 pts

En mouvement, on note $\|\vec{T}_1\|$ la tension du fil du solide et $\|\vec{T}_2\|$ celle du fil du ressort. Le solide descend de $x = r_1\,\theta$ et le ressort s'allonge de $\Delta\ell_0 + r_2\,\theta$.

Écrire la deuxième loi de Newton pour le solide. Appliquer à la poulie, d'axe Δ, la relation fondamentale de la dynamique en rotation. Exprimer enfin $\|\vec{T}_2\|$.

INDICE

Début : projette la deuxième loi sur un axe vertical vers le bas. **Point délicat :** le fil du ressort transmet la force de rappel, de valeur K fois l'allongement.

CORRIGÉ

Solide, axe vertical vers le bas, avec $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = r_1\,\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$:

$$\begin{aligned} m\,g - \|\vec{T}_1\| \\ = m\,r_1\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Poulie, sens positif de θ :

$$\begin{aligned} r_1\,\|\vec{T}_1\| - r_2\,\|\vec{T}_2\| \\ = J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Ressort. $\|\vec{T}_2\| = K\,(\Delta\ell_0 + r_2\,\theta)$.

Conclusion. Ces trois relations lient θ aux deux tensions.

A.3. 1,25 pts

Montrer que θ vérifie une équation différentielle de la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,\theta = 0$, et exprimer la période propre T_0 en fonction de J_Δ, m, r_1, K et r_2.

INDICE

Début : il faut éliminer les deux tensions. **Point délicat :** les termes constants disparaissent grâce à l'équilibre.

CORRIGÉ

Report. $\|\vec{T_1}\| = m\,g - m\,r_1\,\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$, d'où :

$$\begin{aligned} m\,g\,r_1 - m\,r_1^2\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \\ - K\,\Delta\ell_0\,r_2 - K\,r_2^2\,\theta \\ = J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Équilibre. $m\,g\,r_1 = K\,\Delta\ell_0\,r_2$: ces deux termes s'annulent. En regroupant :

$$\begin{aligned} \left(J_\Delta + m\,r_1^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \\ + K\,r_2^2\,\theta = 0 \end{aligned}$$

Identification. En divisant par $J_\Delta + m\,r_1^2$, le coefficient de θ vaut $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{K\,r_2^2}{J_\Delta + m\,r_1^2}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta + m\,r_1^2}{K\,r_2^2}}$$

Conclusion. L'équation a la forme annoncée, et la période propre vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta + m\,r_1^2}{K\,r_2^2}}$.

A.4. 0,75 pts

Calculer la valeur de la période propre T_0.

INDICE

Outil : calcule séparément le numérateur et le dénominateur sous la racine, dans les unités du système international.

CORRIGÉ

Valeurs. $J_\Delta + m\,r_1^2 = 1{,}8\times10^{-3} + 2{,}25\times10^{-4} \approx 2{,}03\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ et $K\,r_2^2 = 80\times0{,}060^2 = 0{,}288\,\mathrm{N\cdot m}$.

Période propre.

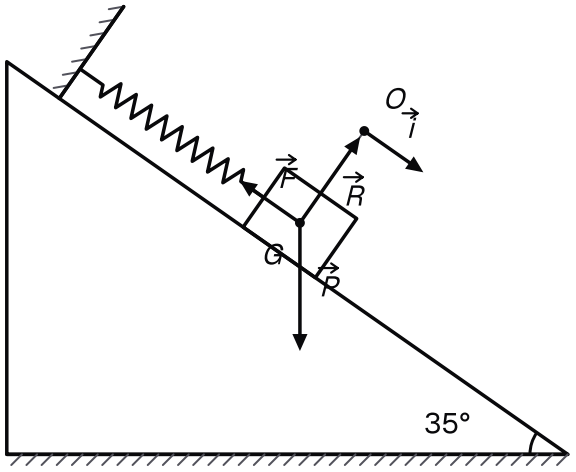
$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{2{,}03\times10^{-3}}{0{,}288}} \\ T_0 &\approx 0{,}53\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. La période propre du système vaut environ $0{,}53\,\mathrm{s}$.

B.1. `0,5 pts`

Partie B : plateau incliné d'une trieuse de colis.

Dans une trieuse, un godet de masse $M = 0{,}60\,\text{kg}$ glisse sans frottement sur un plateau incliné de $\beta = 35^\circ$ sur l'horizontale. Il est accroché sous un ressort de raideur $k = 24\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, parallèle au plateau et fixé en haut. Calculer l'allongement $\Delta\ell_0'$ du ressort à l'équilibre.



Document 2 : godet accroché à un ressort sur le plateau incliné de la trieuse

INDICE

Outil : à l'équilibre, la force de rappel compense la composante du poids parallèle au plateau.

CORRIGÉ

Équilibre. $k\,\Delta\ell_0' = M\,g\sin\beta$, avec $M\,g\sin\beta = 0{,}60\times 9{,}80\times 0{,}574 \approx 3{,}37\,\text{N}$:

$$\Delta\ell_0' = \frac{M\,g\sin\beta}{k}$$
$$\Delta\ell_0' \approx 0{,}14\,\text{m}$$

Conclusion. À l'équilibre, le ressort est allongé d'environ $14\,\text{cm}$.

B.2. 0,5 pts

On admet que l'abscisse x du centre d'inertie, sur un axe parallèle au plateau orienté vers le bas et d'origine à l'équilibre, vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{M}\,x = 0$. Calculer la période propre T_0'.

INDICE

Outil : identifie $\dfrac{k}{M}$ à $\dfrac{4\pi^2}{T_0'^2}$.

CORRIGÉ

Période propre.

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$
$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}60}{24}}$$
$$T_0' \approx 0{,}99\,\mathrm{s}$$

Conclusion. La période propre du godet vaut environ $0{,}99\,\mathrm{s}$.

B.3. 1 pts

À $t = 0$, le godet est à $x(0) = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ et remonte le plateau avec une vitesse de valeur $0{,}10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer l'amplitude x_m et la phase à l'origine φ de $x(t) = x_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0'}\,t + \varphi\right)$.

INDICE

Début : écris $x(0)$ et $v_x(0)$; élève au carré et ajoute pour obtenir x_m. **Point délicat :** le godet remonte, donc $v_x(0) < 0$.

CORRIGÉ

Conditions initiales. $x_m\cos\varphi = 0{,}020\,\mathrm{m}$ et $\dfrac{2\pi}{T_0'}\,x_m\sin\varphi = 0{,}10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, avec $\dfrac{2\pi}{T_0'} = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \approx 6{,}32\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Amplitude. $x_m\sin\varphi \approx 0{,}0158\,\mathrm{m}$:

$$x_m^2 = 0{,}020^2 + 0{,}0158^2$$
$$x_m \approx 2{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Phase. $\cos\varphi \approx 0{,}78$ et $\sin\varphi > 0$: $\varphi \approx 0{,}67\,\mathrm{rad}$.

Conclusion. L'amplitude vaut environ $2{,}5\,\mathrm{cm}$ et la phase à l'origine environ $0{,}67\,\mathrm{rad}$.

B.4. `0,5 pts`

On admet $x_m = 2{,}5\,\text{cm}$, $\varphi = 0{,}67\,\text{rad}$ et $\dfrac{2\pi}{T_0'} = 6{,}32\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Écrire l'équation horaire, x en centimètres, puis déterminer la date du premier passage du godet par sa position d'équilibre.

INDICE

Début : le godet passe par l'équilibre quand le cosinus s'annule. **Point délicat :** cherche la plus petite date positive.

CORRIGÉ

Équation horaire. $x = 2{,}5\cos\Phi$, avec $\Phi = 6{,}32\,t + 0{,}67$.

Passage par l'équilibre. $x = 0$ quand $6{,}32\,t + 0{,}67 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k entier. La plus petite date positive correspond à $k = 0$:

$$t_1 = \frac{\pi/2 - 0{,}67}{6{,}32}$$
$$t_1 \approx 0{,}14\,\text{s}$$

Conclusion. On a $x(t) = 2{,}5\cos(6{,}32\,t + 0{,}67)$, en centimètres ; le godet passe pour la première fois par l'équilibre à $t \approx 0{,}14\,\text{s}$, en remontant.

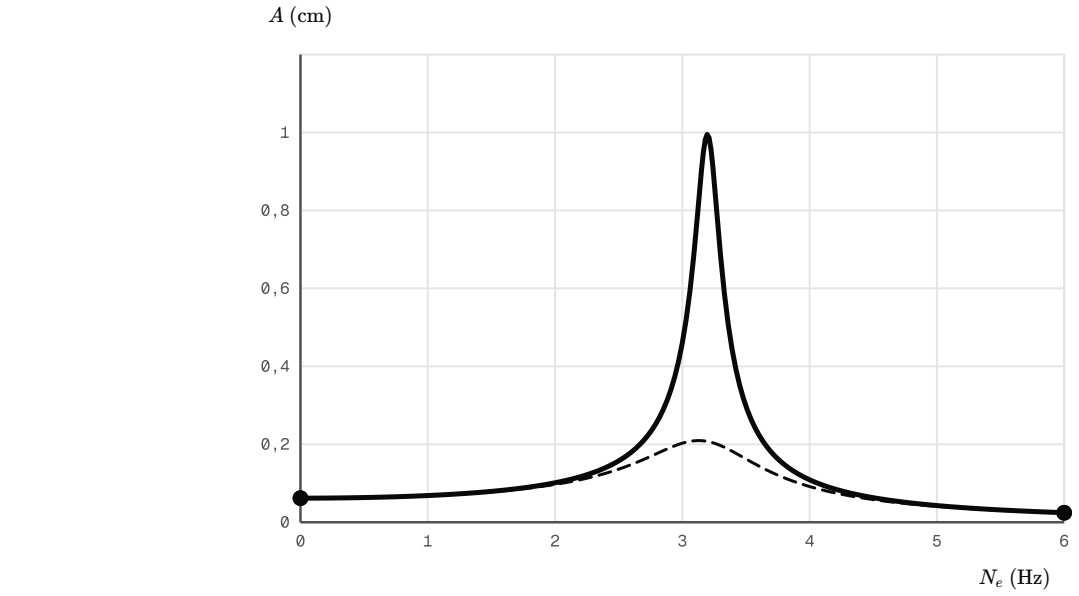
Exercice 5 6 pts

Résonance et amortisseurs

Un solide de masse $m = 0{,}200\,\text{kg}$ est suspendu à un ressort vertical ; le haut du ressort est relié par un fil à la membrane d'un vibreur.

Le vibreur impose au point d'attache du ressort un mouvement vertical sinusoïdal de fréquence N_e réglable. Pour chaque fréquence, on mesure l'amplitude A des oscillations du solide en régime permanent.

Document. Courbes modèles de l'amplitude tracées à partir des mesures : courbe 1, solide dans l'air ; courbe 2, solide plongé dans de l'huile.



Courbes modèles de l'amplitude en fonction de la fréquence du vibreur

A.1. 0,5 pts

Partie A : fréquence propre de l'oscillateur.

Lire sur la courbe 1 la fréquence N_r pour laquelle l'amplitude est maximale. Que vaut, à peu près, la fréquence propre N_0 du solide-ressort ?

INDICE

Outil : que dit le frottement dans l'air sur l'écart entre N_r et N_0 ?

CORRIGÉ

Lecture. Le maximum de la courbe 1 est atteint pour $N_r \approx 3{,}2\,\text{Hz}$.

Fréquence propre. Dans l'air, le frottement fluide est faible : $N_0 \approx N_r$.

Conclusion. La fréquence propre du solide-ressort vaut environ $3{,}2\,\text{Hz}$.

A.2. 1 pts

En déduire la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : $N_0 = \dfrac{1}{T_0}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

CORRIGÉ

Expression. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$, donc $K = 4\pi^2\, N_0^2\, m$.

Valeur.

$$K = 4\pi^2 \times 3{,}2^2 \times 0{,}200$$
$$K \approx 81\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

Conclusion. La raideur du ressort vaut environ $81\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

A.3. 0,75 pts

Le vibreur est réglé à $N_e = 5{,}0\,\mathrm{Hz}$. Comparer l'amplitude lue sur la courbe 1 à son maximum. À quelle fréquence le solide oscille-t-il alors ?

INDICE

Outil : repère sur la courbe 1 le point d'abscisse $5{,}0\,\mathrm{Hz}$.

CORRIGÉ

Amplitude. À $5{,}0\,\mathrm{Hz}$, loin de la résonance, la courbe 1 est presque confondue avec l'axe : l'amplitude est très inférieure au maximum d'environ $1{,}0\,\mathrm{cm}$.

Fréquence. En régime permanent, les oscillations sont forcées : le solide oscille à $5{,}0\,\mathrm{Hz}$, et non à $3{,}2\,\mathrm{Hz}$.

Conclusion. Le solide oscille à $5{,}0\,\mathrm{Hz}$ avec une amplitude très faible devant celle de la résonance.

B.1. 0,5 pts

Partie B : effet de l'amortissement.

On admet que la fréquence propre du solide-ressort vaut $N_0 = 3{,}2\,\mathrm{Hz}$ et la raideur $K = 81\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Comparer les deux courbes : hauteur du maximum, largeur du pic. Laquelle montre une résonance aiguë ?

INDICE

Outil : une résonance aiguë donne un pic haut et étroit.

CORRIGÉ

Courbe 1. Maximum d'environ $1{,}0\,\mathrm{cm}$; le pic est étroit autour de $3{,}2\,\mathrm{Hz}$.

Courbe 2. Maximum d'environ $0{,}2\,\mathrm{cm}$; le sommet est large et peu marqué.

Conclusion. La courbe 1, dans l'air, amortissement faible, montre une résonance aiguë ; la courbe 2, dans l'huile, amortissement fort, une résonance floue.

B.2. 1 pts

Énoncer les conditions d'une résonance aiguë.

INDICE

Outil : relis ce que la comparaison des deux courbes vient de montrer.

CORRIGÉ

Fréquence. La fréquence de l'excitateur est voisine de la fréquence propre du résonateur : $N_e \approx N_0$.

Amortissement. Il est faible.

Conclusion. Une résonance aiguë exige $N_e \approx N_0$ et un résonateur peu amorti.

B.3. 0,75 pts

Les véhicules et certains bâtiments sont équipés d'amortisseurs. En s'appuyant sur le document, expliquer leur rôle.

INDICE

Outil : compare les amplitudes des deux courbes près de N_0, puis loin de N_0.

CORRIGÉ

Excitation. Une route bosselée ou un séisme impose des oscillations forcées à la caisse ou à la structure, qui sont des résonateurs.

Danger. Près de leur fréquence propre, un amortissement faible donne une résonance aiguë : grande amplitude, inconfort, risque de rupture.

Rôle. Les amortisseurs ajoutent un frottement fluide : comme pour la courbe 2, le maximum d'amplitude est bien plus faible. Loin de la résonance, les deux courbes sont presque confondues.

Conclusion. Les amortisseurs rendent la résonance floue et réduisent fortement l'amplitude au voisinage de la fréquence propre.

B.4. 1,5 pts

On utilise ce solide-ressort comme support d'un petit compresseur. Le moteur tourne à 190 tours par minute et impose ses vibrations à la fréquence de sa rotation. Montrer que le support risque d'entrer en résonance.

Sans changer le ressort, quelle masse totale minimale (solide, compresseur et lest) le ressort doit-il porter pour que la fréquence propre soit inférieure d'au moins $40\,\%$ à la fréquence du moteur ?

INDICE

Début : convertis la vitesse du moteur en hertz. **Ensuite :** traduis la condition sur la fréquence propre en une condition sur la masse.

CORRIGÉ

Excitation. $N_e = \dfrac{190}{60} \approx 3{,}17\,\text{Hz}$, voisine de $N_0 = 3{,}2\,\text{Hz}$: le support entrerait en résonance.

Condition. Il faut $N_0' \leq 0{,}60\,N_e \approx 1{,}90\,\text{Hz}$. Or $N_0' = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m'}}$ diminue quand m' augmente : il faut $m' \geq \dfrac{K}{4\pi^2\,N_0'^2}$.

Masse minimale, avec $K = 81\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$:

$$m' = \frac{81}{4\pi^2 \times 1{,}90^2}$$
$$m' \approx 0{,}57\,\text{kg}$$

Conclusion. Le ressort doit porter au moins $0{,}57\,\text{kg}$ au total, solide, compresseur et lest compris : la fréquence propre descend alors à $1{,}9\,\text{Hz}$ au plus, loin des $3{,}2\,\text{Hz}$ du moteur.