BURHAN

Systèmes mécaniques oscillants : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/systemes-mecaniques-oscillants/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Systèmes mécaniques oscillants	Entraînement	7

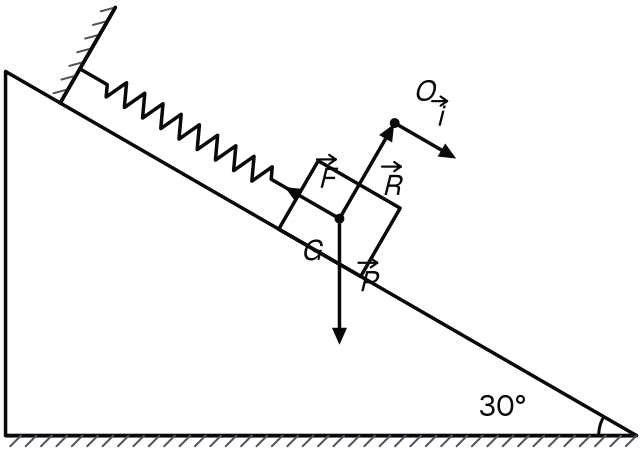
Exercice 1

Solide retenu par un ressort sur une glissière inclinée

Un solide de masse $m = 0{,}80\,\text{kg}$ glisse sans frottement sur une glissière en aluminium inclinée de $\alpha = 30°$ sur l'horizontale. Il est accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort de raideur $K = 60\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, de masse négligeable, fixé en haut de la glissière. On prend $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'axe $(O;\vec{i})$ est parallèle à la glissière, orienté vers le bas ; son origine O est la position du centre d'inertie G à l'équilibre.

Document. Schéma du dispositif à l'équilibre et des forces exercées sur le solide.



Solide accroché à un ressort sur une glissière inclinée, à l'équilibre

1.

Nommer les forces qui s'exercent sur le solide et écrire la condition d'équilibre projetée sur l'axe $(O;\vec{i})$. En déduire l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort à l'équilibre.

INDICE

Outil : seule la composante du poids parallèle à la glissière intervient dans la projection ; la réaction lui est perpendiculaire.

CORRIGÉ

Forces. Le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la glissière, perpendiculaire à celle-ci faute de frottement, et la force de rappel $\vec{F}$, dirigée vers le haut de la glissière.

Projection à l'équilibre. $m\,g\sin\alpha - K\,\Delta\ell_0 = 0$, avec $m\,g\sin\alpha = 0{,}80\times 9{,}80\times 0{,}5 = 3{,}92\,\mathrm{N}$:

$$\begin{aligned}\Delta\ell_0 &= \frac{m\,g\sin\alpha}{K}\\ \Delta\ell_0 &= \frac{3{,}92}{60}\\ \Delta\ell_0 &\approx 6{,}5\times 10^{-2}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Conclusion. À l'équilibre, le ressort est allongé d'environ $6{,}5\,\mathrm{cm}$.

2.

Le solide est écarté de sa position d'équilibre puis lâché. Montrer que son abscisse x vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}\,x = 0$$

INDICE

Début : quand G a l'abscisse x, écris l'allongement du ressort à l'aide de $\Delta\ell_0$ et de x. **Ensuite :** la condition d'équilibre élimine deux termes.

CORRIGÉ

Cadre. Système : le solide ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe $(O;\vec{i})$ orienté vers le bas, d'origine à l'équilibre.

Deuxième loi de Newton. $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m\,\vec{a}_G$. L'allongement vaut $\Delta\ell_0 + x$; en projection :

$$\begin{aligned}m\,g\sin\alpha - K\,(\Delta\ell_0 + x)\\ = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

Simplification. $m\,g\sin\alpha = K\,\Delta\ell_0$, il reste $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -K\,x$.

Conclusion. En divisant par m, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{m}\,x = 0$: c'est l'équation annoncée.

3.

Calculer la période propre T_0 de l'oscillateur. Serait-elle différente avec la glissière horizontale ?

INDICE

Outil : identifie le coefficient de x à $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$.

CORRIGÉ

Identification. $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{K}{m}$, donc :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}80}{60}}$$
$$T_0 \approx 0{,}73\,\text{s}$$

Glissière horizontale. L'équation différentielle est la même ; ni g ni α n'y figurent.

Conclusion. La période propre vaut environ $0{,}73\,\text{s}$, la même qu'avec la glissière horizontale.

4.

À $t = 0$, le solide est à $2{,}0\,\mathrm{cm}$ sous sa position d'équilibre et descend la glissière avec une vitesse de valeur $0{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer l'amplitude x_m et la phase à l'origine φ, écrire l'équation horaire, x en centimètres, et vérifier que le ressort reste tendu.

INDICE

Début : écris $x(0)$ et $v_x(0)$ en fonction de x_m et de φ. **Point délicat :** le sens du départ choisit le signe de φ. **Ensuite :** le ressort reste tendu tant que $\Delta\ell_0 + x > 0$.

CORRIGÉ

Conditions initiales. Avec $\dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \approx 8{,}66\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$: $x_m\cos\varphi = 0{,}020\,\mathrm{m}$ et $v_x(0) = -8{,}66\,x_m\sin\varphi = 0{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, positive car le solide descend.

Amplitude. $x_m\sin\varphi = -\dfrac{0{,}20}{8{,}66} \approx -0{,}0231\,\mathrm{m}$; on élève au carré et on ajoute :

$$\begin{aligned} x_m^2 &= 0{,}020^2 \\ &\quad + 0{,}0231^2 \\ x_m &\approx 3{,}1\times10^{-2}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Phase. $\cos\varphi = \dfrac{0{,}020}{0{,}0306} \approx 0{,}65$ et $\sin\varphi < 0$:

$$\varphi \approx -0{,}86\,\mathrm{rad}$$

Équation horaire, x en centimètres :

$$\begin{aligned} x &= 3{,}1\cos\Phi \\ \Phi &= 8{,}66\,t - 0{,}86 \end{aligned}$$

Ressort tendu. L'allongement minimal vaut $6{,}5 - 3{,}1 = 3{,}4\,\mathrm{cm}$, positif.

Conclusion. On a $x(t) = 3{,}1\cos(8{,}66\,t - 0{,}86)$, en centimètres ; le ressort reste allongé d'au moins $3{,}4\,\mathrm{cm}$, donc tendu.

Exercice 2

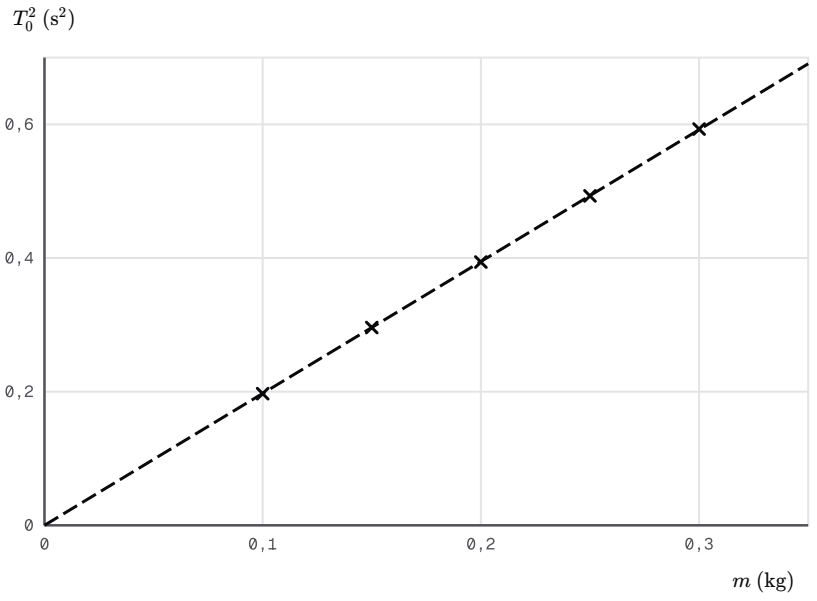
Raideur d'un ressort par la méthode dynamique

Pour mesurer la raideur K d'un ressort du laboratoire, un groupe d'élèves accroche successivement plusieurs solides de masse m au ressort vertical. Pour chaque masse, il chronomètre la durée Δt de dix oscillations.

Document 1. Mesures.

m (kg)	Δt (s)
0,10	4,44
0,15	5,44
0,20	6,28
0,25	7,02
0,30	7,70

Document 2. Points $(m ; T_0^2)$ calculés depuis ces mesures et droite de modélisation passant par l'origine.



× Points de mesure — — Droite de modélisation

Carré de la période propre en fonction de la masse suspendue

1.

Proposer un protocole pour mesurer la période propre de l'oscillateur pour une masse donnée : matériel, gestes et précautions.

INDICE

Outil : demande-toi quelle durée mesurer, avec quel instrument, et ce qui peut fausser cette mesure.

CORRIGÉ

Matériel. Un support, le ressort, les solides de masses connues, un chronomètre et un repère fixe, par exemple un trait au niveau de la position d'équilibre.

Gestes. Accrocher un solide, attendre l'équilibre, l'écarter de un à deux centimètres vers le bas et le lâcher sans vitesse. Déclencher le chronomètre à un passage par le repère, dans un sens donné. L'arrêter au dixième passage suivant dans le même sens.

Précautions. Faible amplitude, pour que le ressort reste tendu et les spires non jointives ; plusieurs essais pour chaque masse ; $T_0 = \dfrac{\Delta t}{10}$.

Conclusion. Chronométrer dix oscillations depuis le passage par l'équilibre réduit l'erreur de déclenchement sur T_0.

2.

Pour $m = 0{,}20\,\mathrm{kg}$, calculer T_0 puis T_0^2.

INDICE

Outil : une oscillation dure une période propre.

CORRIGÉ

Période. $T_0 = \dfrac{6{,}28\,\mathrm{s}}{10} = 0{,}628\,\mathrm{s}$.

Carré. $T_0^2 = 0{,}628^2 \approx 0{,}394\,\mathrm{s}^2$.

Conclusion. Pour cette masse, $T_0 = 0{,}628\,\mathrm{s}$ et $T_0^2 \approx 0{,}394\,\mathrm{s}^2$, le point placé à l'abscisse $0{,}20\,\mathrm{kg}$ du document 2.

3.

Montrer que la théorie prévoit une droite passant par l'origine, et exprimer son coefficient directeur en fonction de K. Vérifier par une équation aux dimensions que ce coefficient s'exprime en $\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

INDICE

Outil : élève au carré l'expression de la période propre d'un solide-ressort. **Ensuite :** écris l'unité de K avec les unités de base.

CORRIGÉ

Carré de la période propre.

$$T_0^2 = 4\pi^2 \, \frac{m}{K}$$
$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{K} \times m$$

Dimensions. Une force s'exprime en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$; la raideur, force divisée par une longueur, en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Le nombre $4\pi^2$ est sans unité : $\dfrac{4\pi^2}{K}$ s'exprime en $\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

Conclusion. T_0^2 est proportionnel à m : la courbe est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $\dfrac{4\pi^2}{K}$, exprimé en $\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ comme l'indique le document 2.

4.

Le coefficient directeur de la droite de modélisation vaut environ $1{,}97\,\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$. En déduire la raideur K.

INDICE

Outil : égale le coefficient mesuré à son expression théorique.

CORRIGÉ

Raideur. $\dfrac{4\pi^2}{K} = 1{,}97\,\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, donc :

$$K = \frac{4\pi^2}{1{,}97}$$
$$K \approx 20\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

Conclusion. La raideur du ressort vaut environ $20\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

5.

Citer deux sources d'écart entre cette mesure et la raideur réelle du ressort.

INDICE

Outil : relis les hypothèses du modèle une à une, puis pense à la façon dont la durée est mesurée.

CORRIGÉ

Modèle. La masse du ressort, négligée, participe un peu au mouvement et allonge la période. Les frottements de l'air amortissent légèrement les oscillations.

Mesure. Le déclenchement et l'arrêt du chronomètre se font à la main, avec un retard de l'ordre du dixième de seconde.

Conclusion. La masse du ressort et le chronométrage manuel sont deux sources d'écart ; mesurer dix oscillations limite la seconde.

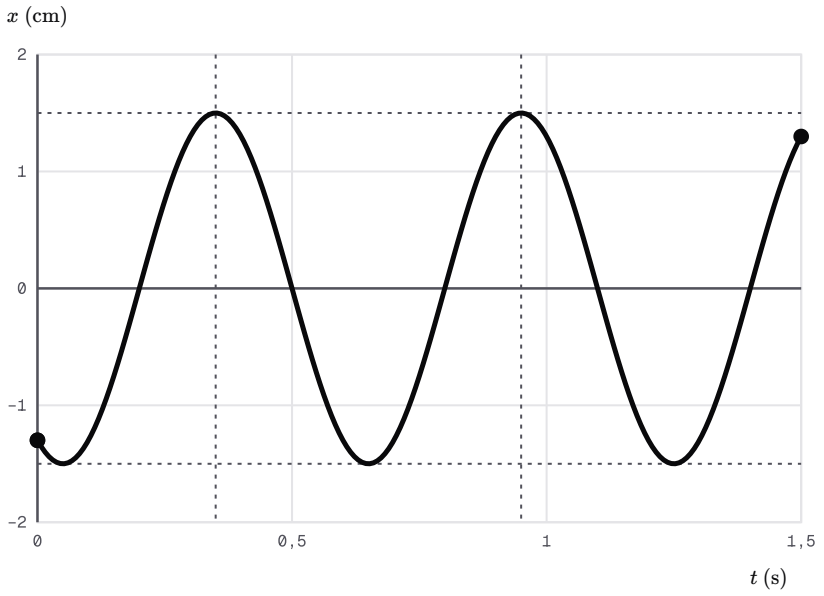
Exercice 3

Équation horaire de la masse d'un sismographe

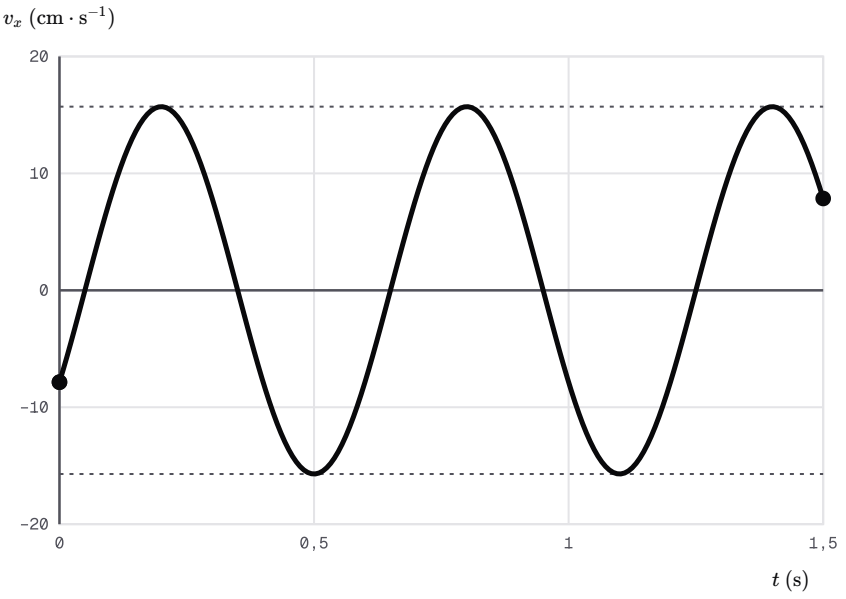
Un sismographe horizontal contient une masse $m = 0{,}50\,\text{kg}$ qui glisse sans frottement le long d'un axe $(O;\vec{i})$, retenue par un ressort. Lors d'un essai, la masse est écartée puis lancée ; un capteur enregistre son abscisse x, comptée depuis sa position d'équilibre O.

Document 1. Enregistrement $x(t)$; les droites verticales passent par deux maximums successifs, à $t = 0{,}35\,\text{s}$ et $t = 0{,}95\,\text{s}$.

Document 2. Vitesse $v_x(t)$ de la masse pendant le même essai, en centimètres par seconde.



Document 1 : abscisse de la masse du sismographe pendant l'essai



Document 2 : vitesse de la masse du sismographe pendant le même essai

1.

Lire la période propre T_0 et l'amplitude x_m.

INDICE

Outil : deux maximums successifs sont séparés d'une période.

CORRIGÉ

Période. $T_0 \approx 0{,}95 - 0{,}35 = 0{,}60\,\text{s}$.

Amplitude. Les maximums valent $1{,}5\,\text{cm}$: $x_m \approx 1{,}5\,\text{cm}$.

Conclusion. On lit $T_0 \approx 0{,}60\,\text{s}$ et $x_m \approx 1{,}5\,\text{cm}$.

2.

On lit $x(0) \approx -1{,}3\,\text{cm}$. Déterminer la phase à l'origine φ, puis écrire l'équation horaire, x en centimètres.

INDICE

Début : calcule $\cos\varphi$. **Point délicat :** deux angles ont ce cosinus ; le sens de départ de la courbe tranche.

CORRIGÉ

Cosinus. $\cos\varphi = \dfrac{x(0)}{x_m} = \dfrac{-1{,}3}{1{,}5} \approx -0{,}87$, donc $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $\varphi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Sens. La courbe descend en $t = 0$: $v_x(0) < 0$, donc $\sin\varphi > 0$ et $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$.

Équation horaire. $\dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{0{,}60} = \dfrac{10\pi}{3}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$x = 1{,}5\cos\Phi$$
$$\Phi = \frac{10\pi}{3}\,t + \frac{5\pi}{6}$$

Conclusion. L'équation horaire est $x(t) = 1{,}5\cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\,t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$, en centimètres.

3.

Lire sur le document 2 la vitesse maximale v_m. Exprimer $v_x(t)$ et $a_x(t)$, puis en déduire par le calcul v_m et la valeur maximale a_m de l'accélération.

INDICE

Outil : la vitesse maximale est la valeur des extrêmes de $v_x(t)$; pour le calcul, dérive $x(t)$ et travaille en mètres.

CORRIGÉ

Lecture. Les extrêmes de v_x valent environ $\pm 16\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$: $v_m \approx 0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Dérivées. Avec $x = x_m \cos\Phi$ et $\Phi = \dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi$:

$$v_x = -\frac{2\pi}{T_0}\,x_m \sin\Phi$$
$$a_x = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x_m \cos\Phi$$

Le sinus et le cosinus varient entre -1 et 1 : les valeurs maximales sont les coefficients de $\sin\Phi$ et de $\cos\Phi$.

Vitesse maximale calculée.

$$v_m = \frac{2\pi\,x_m}{T_0}$$
$$v_m = \frac{2\pi \times 0{,}015}{0{,}60}$$
$$v_m \approx 0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Accélération maximale.

$$a_m = \frac{4\pi^2\,x_m}{T_0^2}$$
$$a_m = \frac{4\pi^2 \times 0{,}015}{0{,}60^2}$$
$$a_m \approx 1{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Conclusion. La lecture et le calcul donnent la même vitesse maximale, environ $0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, atteinte au passage par l'équilibre ; l'accélération atteint au plus $1{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, aux extrémités.

4.

Calculer la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : isole K dans l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Raideur.

$$K = \frac{4\pi^2\, m}{T_0^2}$$
$$K = \frac{4\pi^2 \times 0{,}50}{0{,}60^2}$$
$$K \approx 55\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

Conclusion. La raideur du ressort du sismographe vaut environ $55\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Exercice 4

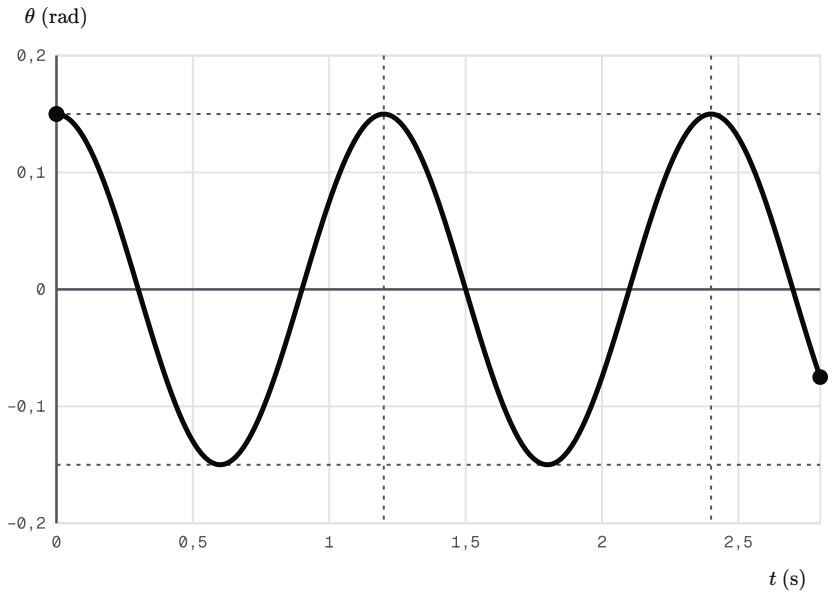
Pendule de torsion à plateau porte-masses

Un pendule de torsion de laboratoire est formé d'un plateau porte-masses horizontal, suspendu en son centre à un fil de torsion vertical de constante C inconnue. Le moment d'inertie du plateau vide par rapport à l'axe Δ du fil vaut $J_0 = 1{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

Les frottements sont négligeables. L'abscisse angulaire θ du plateau est nulle quand le fil n'est pas tordu.

Le plateau vide est tourné d'un angle θ_m, puis lâché sans vitesse à $t = 0$.

Document. Enregistrement $\theta(t)$ du plateau vide ; les droites verticales passent par $t = 1{,}2\,\mathrm{s}$ et $t = 2{,}4\,\mathrm{s}$.



Abscisse angulaire du plateau vide au cours du temps

1.

Montrer que l'abscisse angulaire du plateau vide vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{C}{J_0}\,\theta = 0$$

INDICE

Début : calcule le moment de chaque action par rapport à l'axe du fil ; deux d'entre eux sont nuls.

CORRIGÉ

Cadre. Système : le plateau ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe Δ fixe, vertical, confondu avec le fil ; θ orienté.

Moments. Le poids est parallèle à Δ et la tension du fil s'exerce le long de Δ : leurs moments sont nuls. Le couple de rappel a pour moment $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$.

Relation fondamentale en rotation.

$$J_0\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -C\,\theta$$

Conclusion. En divisant par J_0, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C}{J_0}\,\theta = 0$.

2.

Lire sur le document la période propre T_0 et l'amplitude θ_m, puis donner la phase à l'origine.

INDICE

Outil : la courbe part d'un maximum ; deux maximums successifs sont séparés d'une période.

CORRIGÉ

Lectures. Les maximums se succèdent à 0, $1{,}2\,\mathrm{s}$ et $2{,}4\,\mathrm{s}$: $T_0 \approx 1{,}2\,\mathrm{s}$. Les extrêmes valent $\pm 0{,}15\,\mathrm{rad}$: $\theta_m \approx 0{,}15\,\mathrm{rad}$.

Phase. Lâcher sans vitesse en $\theta(0) = \theta_m > 0$: $\cos\varphi = 1$, donc $\varphi = 0$.

Conclusion. On lit $T_0 \approx 1{,}2\,\mathrm{s}$ et $\theta_m \approx 0{,}15\,\mathrm{rad}$, avec $\varphi = 0$.

3.

En déduire la constante de torsion C du fil.

INDICE

Outil : la période propre vaut $2\pi\sqrt{\dfrac{J_0}{C}}$.

CORRIGÉ

Constante de torsion.

$$C = \frac{4\pi^2\, J_0}{T_0^2}$$
$$C = \frac{4\pi^2 \times 1{,}5 \times 10^{-3}}{1{,}2^2}$$
$$C \approx 4{,}1 \times 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$$

Conclusion. La constante de torsion vaut environ $4{,}1 \times 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$.

4.

On pose sur le plateau deux plots de laiton identiques de masse $80\ \mathrm{g}$, placés symétriquement à $10\ \mathrm{cm}$ de l'axe. On les assimile à des points matériels. Calculer le nouveau moment d'inertie J_1, puis prévoir la nouvelle période propre T_1.

INDICE

Outil : un point matériel de masse m à la distance d de l'axe a le moment d'inertie $m\,d^2$; les moments d'inertie s'ajoutent.

CORRIGÉ

Plots. $2\,m\,d^2 = 2 \times 0{,}080 \times 0{,}10^2 = 1{,}6 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

Moment d'inertie.

$$J_1 = J_0 + 2\,m\,d^2$$
$$J_1 = 3{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

Période propre. Le fil est le même :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{C}}$$
$$T_1 \approx 1{,}7\ \mathrm{s}$$

Conclusion. Avec les plots, la période propre prévue vaut environ $1{,}7\ \mathrm{s}$: des masses placées loin de l'axe ralentissent les oscillations.

5.

Dix oscillations du plateau muni des plots durent $17{,}3\,\mathrm{s}$. La mesure confirme-t-elle la prévision ?

INDICE

Outil : calcule la période mesurée et l'écart relatif à la valeur prévue, non arrondie.

CORRIGÉ

Période mesurée. $T_1 = \dfrac{17{,}3\,\mathrm{s}}{10} = 1{,}73\,\mathrm{s}$.

Écart. La prévision non arrondie vaut $1{,}725\,\mathrm{s}$: l'écart relatif est de l'ordre de $0{,}3\,\%$.

Conclusion. La mesure confirme la prévision, aux erreurs de lecture et de chronométrage près.

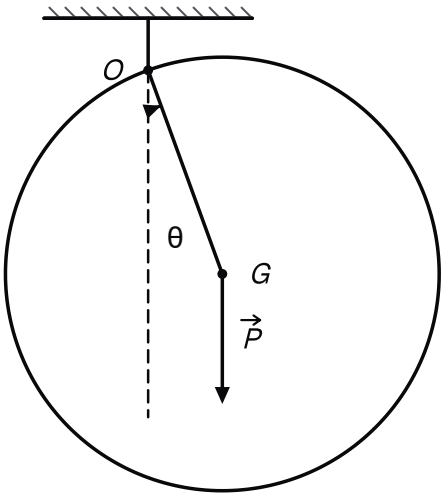
Exercice 5

Anneau oscillant autour d'un clou

Un anneau mince de masse $m = 0{,}40\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 0{,}25\,\mathrm{m}$ est accroché par un point de son bord à un clou horizontal, autour duquel il peut tourner sans frottement.

Son centre d'inertie G est le centre de l'anneau : $d = R$. Son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ du clou vaut $J_\Delta = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. On prend $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document. Schéma de l'anneau écarté de l'angle θ, orienté depuis la verticale descendante.



Anneau suspendu à un clou, écarté de sa position d'équilibre

1.

Faire le bilan des actions qui s'exercent sur l'anneau et donner le moment de chacune par rapport à Δ.

INDICE

Outil : pour chaque force, cherche la distance de l'axe à sa droite d'action.

CORRIGÉ

Réaction du clou. Elle s'applique sur l'axe : son moment est nul.

Poids. Appliqué en G, de bras de levier $d\,|\sin\theta|$; il tend à ramener θ vers 0, donc son moment est de signe opposé à θ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -m\,g\,d\sin\theta$.

Conclusion. Seul le poids a un moment non nul, $-m\,g\,d\sin\theta$, de signe opposé à θ.

2.

Montrer que, pour de petites oscillations, θ vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,d}{J_\Delta}\,\theta = 0$$

INDICE

Début : la somme des moments égale J_Δ fois l'accélération angulaire. **Ensuite :** pour un petit angle en radians, $\sin\theta \approx \theta$.

CORRIGÉ

Relation fondamentale en rotation. Système : l'anneau ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe fixe Δ :

$$J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -m\,g\,d\sin\theta$$

Petits angles. Avec $\sin\theta \approx \theta$:

$$J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + m\,g\,d\,\theta = 0$$

Conclusion. En divisant par J_Δ, on obtient l'équation annoncée.

3.

Calculer la période propre T_0 des petites oscillations.

INDICE

Outil : identifie le coefficient de θ à $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$.

CORRIGÉ

Période propre. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d}}$, avec $m\,g\,d = 0{,}40 \times 9{,}80 \times 0{,}25 = 0{,}98\,\mathrm{N\cdot m}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}050}{0{,}98}}$$
$$T_0 \approx 1{,}4\,\mathrm{s}$$

Conclusion. La période propre des petites oscillations vaut environ $1{,}4\,\mathrm{s}$.

4.

Calculer la longueur ℓ du pendule simple synchrone de l'anneau et la comparer à son diamètre.

INDICE

Outil : le pendule simple synchrone a la même période propre ; égale les deux expressions.

CORRIGÉ

Longueur. $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d}}$ donne :

$$\ell = \frac{J_\Delta}{m\,d}$$
$$\ell = \frac{0{,}050}{0{,}40 \times 0{,}25}$$
$$\ell = 0{,}50\,\mathrm{m}$$

Conclusion. Le pendule simple synchrone mesure $0{,}50\,\mathrm{m}$, exactement le diamètre de l'anneau.

5.

L'anneau est écarté de 8°. L'approximation des petites oscillations est-elle justifiée ?

INDICE

Point délicat : compare θ et $\sin\theta$ avec l'angle converti en radians.

CORRIGÉ

Conversion. $\theta = 8 \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}140\,\mathrm{rad}$ et $\sin\theta \approx 0{,}139$.

Écart. L'écart relatif entre θ et $\sin\theta$ vaut environ $0{,}3\,\%$.

Conclusion. L'approximation $\sin\theta \approx \theta$ est justifiée pour cet écart.

6.

L'anneau, écarté de 8° du côté positif, est lâché sans vitesse à $t = 0$. Écrire son équation horaire $\theta(t)$, θ en radians, puis calculer la valeur maximale de sa vitesse angulaire.

INDICE

Début : un lâcher sans vitesse fixe la phase à l'origine. **Ensuite :** dérive $\theta(t)$.

CORRIGÉ

Conditions initiales. $\theta(0) = \theta_m \approx 0{,}140\,\text{rad}$ et vitesse nulle : $\varphi = 0$.

Coefficient du temps. $\dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{m\,g\,d}{J_\Delta}} = \sqrt{\dfrac{0{,}98}{0{,}050}} \approx 4{,}43\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Équation horaire.

$$\theta = 0{,}140\cos(4{,}43\,t)$$

Vitesse angulaire maximale.

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{T_0}\,\theta_m &= 4{,}43 \times 0{,}140 \\ &\approx 0{,}62\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Conclusion. On a $\theta(t) = 0{,}140\cos(4{,}43\,t)$, en radians ; la vitesse angulaire atteint au plus $0{,}62\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, au passage par la verticale.

Exercice 6

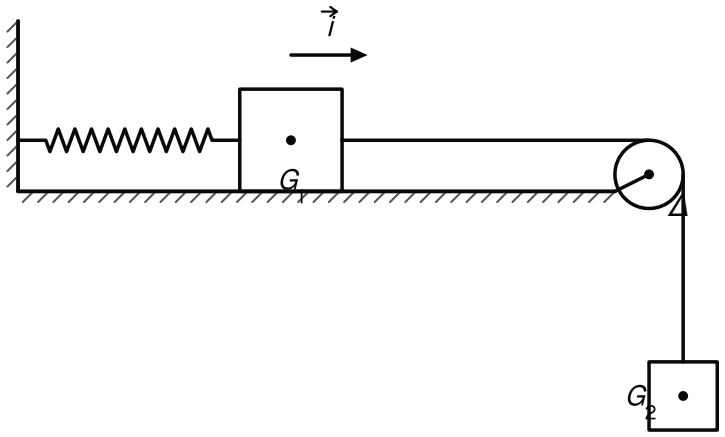
Solide, poulie et masse suspendue

Un solide S_1 de masse $m_1 = 0{,}35\,\text{kg}$ glisse sans frottement sur une table horizontale. Un ressort horizontal de raideur $K = 36\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, fixé à un mur, le retient.

De l'autre côté, un fil inextensible et sans masse passe sur une poulie et porte un solide S_2 de masse $m_2 = 0{,}10\,\text{kg}$. La poulie a un rayon $r = 2{,}0\,\text{cm}$ et un moment d'inertie $J_\Delta = 4{,}0\times10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$; le fil ne glisse pas sur elle. On prend $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

L'abscisse x de G_1 est repérée sur l'axe $(O;\vec{i})$ orienté vers la poulie, d'origine O à l'équilibre ; S_2 descend de x quand G_1 avance de x. Les oscillations sont assez petites pour que le fil reste tendu.

Document. Schéma du dispositif.



Solide relié à un ressort et, par un fil passant sur une poulie, à une masse suspendue

1.

À l'équilibre, les tensions des deux brins du fil ont la valeur $m_2\,g$. Calculer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort.

INDICE

Outil : à l'équilibre, la force de rappel compense la tension du brin horizontal.

CORRIGÉ

Équilibre de S_1. $K\,\Delta\ell_0 = m_2\,g$:

$$\Delta\ell_0 = \frac{m_2\,g}{K}$$
$$\Delta\ell_0 = \frac{0{,}10\times9{,}80}{36}$$
$$\Delta\ell_0 \approx 2{,}7\times10^{-2}\,\text{m}$$

Conclusion. À l'équilibre, le ressort est allongé d'environ $2{,}7\,\text{cm}$.

2.

En mouvement, on note $\|\vec{T}_1\|$ et $\|\vec{T}_2\|$ les tensions des brins horizontal et vertical. Écrire la deuxième loi de Newton pour S_1 et pour S_2, et appliquer à la poulie, d'axe Δ, la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

INDICE

Début : l'allongement du ressort vaut $\Delta\ell_0 + x$. **Point délicat :** la poulie a un moment d'inertie, donc les deux tensions diffèrent.

CORRIGÉ

Solide S_1, projection sur $\vec{i}$:

$$\begin{aligned} \|\vec{T}_1\| - K\,(\Delta\ell_0 + x) \\ = m_1\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Solide S_2, projection sur un axe vertical vers le bas :

$$m_2\,g - \|\vec{T}_2\| = m_2\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

Poulie. Le fil ne glisse pas : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, et :

$$\begin{aligned} r\,\|\vec{T}_2\| - r\,\|\vec{T}_1\| \\ = \frac{J_\Delta}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Conclusion. Les trois relations lient x aux deux tensions, qu'il reste à éliminer.

3.

Montrer que x vérifie l'équation différentielle :

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}\right) \times \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + K\,x = 0$$

INDICE

Début : tire $\|\vec{T_1}\|$ et $\|\vec{T_2}\|$ des équations des deux solides et reporte-les dans celle de la poulie. **Ensuite :** la condition d'équilibre élimine $m_2\,g$.

CORRIGÉ

Report. Dans l'équation de la poulie divisée par r :

$$\begin{aligned} m_2\,g - m_2\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ - m_1\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ - K\,\Delta\ell_0 - K\,x \\ = \frac{J_\Delta}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Équilibre. $m_2\,g = K\,\Delta\ell_0$: ces deux termes disparaissent.

Conclusion. En regroupant les termes en $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$, on obtient l'équation annoncée.

4.

Calculer la période propre T_0 du système. Quelle période trouverait-on en négligeant le moment d'inertie de la poulie ?

INDICE

Outil : l'équation a la forme de celle d'un solide-ressort de masse $m_1 + m_2 + \dfrac{J_\Delta}{r^2}$.

CORRIGÉ

Masse équivalente. $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = \dfrac{4{,}0 \times 10^{-5}}{4{,}0 \times 10^{-4}} = 0{,}10\,\mathrm{kg}$, donc $M = 0{,}55\,\mathrm{kg}$.

Période propre.

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}55}{36}} \\ T_0 &\approx 0{,}78\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Poulie négligée.

$$\begin{aligned} T_0' &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}45}{36}} \\ T_0' &\approx 0{,}70\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. La période propre vaut environ $0{,}78\,\mathrm{s}$; négliger la poulie la sous-estimerait d'environ $10\,\%$.

Exercice 7

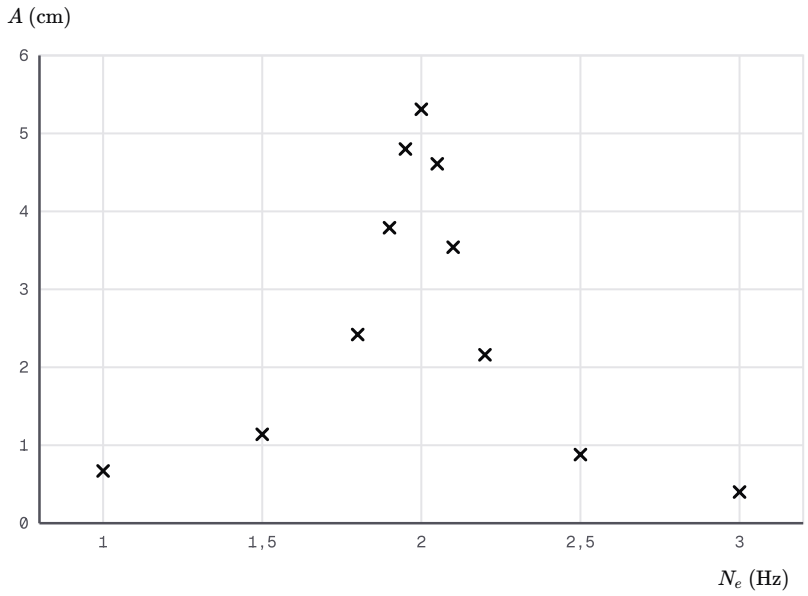
Résonance d'une maquette de passerelle sur un vibreur

Le tablier d'une maquette de passerelle, de masse $m = 0{,}50\,\text{kg}$, repose sur des appuis élastiques. Un vibreur électromagnétique, de fréquence N_e réglable, le secoue verticalement. Pour chaque fréquence, on mesure l'amplitude A des oscillations du tablier en régime permanent.

Document 1. Mesures.

N_e (Hz)	A (cm)
1,0	0,67
1,5	1,14
1,8	2,42
1,9	3,79
1,95	4,80
2,0	5,31
2,05	4,61
2,1	3,54
2,2	2,16
2,5	0,88
3,0	0,40

Document 2. Points de la série de mesures.



× Points de mesure

Amplitude du tablier en fonction de la fréquence du vibreur

1.

Pour quelle fréquence l'amplitude est-elle maximale ? En déduire une valeur approchée de la fréquence propre N_0 du tablier.

INDICE

Outil : pour un résonateur peu amorti, la résonance a lieu à une fréquence très voisine de sa fréquence propre.

CORRIGÉ

Résonance. L'amplitude est maximale, $5{,}31\,\text{cm}$, pour $N_e = 2{,}0\,\text{Hz}$.

Fréquence propre. Le pic est haut : l'amortissement est faible, donc $N_0 \approx 2{,}0\,\text{Hz}$.

Conclusion. La résonance a lieu vers $2{,}0\,\text{Hz}$ et la fréquence propre du tablier vaut environ $2{,}0\,\text{Hz}$.

2.

Entre quelles fréquences du tableau l'amplitude dépasse-t-elle la moitié de sa valeur maximale ? La résonance est-elle aiguë ou floue ?

INDICE

Début : calcule la moitié du maximum. **Ensuite :** compare l'écart entre ces fréquences à la fréquence de résonance.

CORRIGÉ

Moitié du maximum. $\dfrac{5{,}31}{2} \approx 2{,}66\,\text{cm}$.

Lecture. L'amplitude dépasse $2{,}66\,\text{cm}$ de $1{,}90\,\text{Hz}$ à $2{,}10\,\text{Hz}$; elle n'est que de $2{,}42\,\text{cm}$ à $1{,}80\,\text{Hz}$ et de $2{,}16\,\text{cm}$ à $2{,}20\,\text{Hz}$.

Finesse. La bande, entre $0{,}2$ et $0{,}4\,\text{Hz}$ de large, est étroite devant $2{,}0\,\text{Hz}$: le pic est étroit et haut.

Conclusion. L'amplitude dépasse la moitié du maximum entre $1{,}9\,\text{Hz}$ et $2{,}1\,\text{Hz}$ environ : la résonance est aiguë.

3.

On arrête le vibreur, on écarte le tablier de sa position d'équilibre, puis on le lâche. Comment nomme-t-on ses oscillations ? Quelle est leur fréquence, à peu près ?

INDICE

Outil : plus aucun excitateur n'agit sur le tablier.

CORRIGÉ

Nature. Sans excitateur, le tablier oscille seul : ses oscillations sont libres, faiblement amorties par ses appuis.

Fréquence. Un oscillateur libre peu amorti oscille à une fréquence voisine de sa fréquence propre, environ $2{,}0\,\text{Hz}$.

Conclusion. Les oscillations sont libres, de fréquence voisine de $2{,}0\,\text{Hz}$, alors qu'avec le vibreur elles étaient forcées à la fréquence N_e.

4.

On fixe sur le tablier une charge qui double sa masse, sans changer les appuis. À quelle fréquence faut-il régler le vibreur pour obtenir de nouveau la résonance ?

INDICE

Outil : écris la fréquence propre d'un solide-ressort en fonction de la masse et de la raideur.

CORRIGÉ

Fréquence propre. $N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$: à raideur fixée, doubler la masse divise N_0 par $\sqrt{2}$.

Nouvelle résonance.

$$N_0' = \frac{N_0}{\sqrt{2}}$$
$$N_0' = \frac{2{,}0}{\sqrt{2}}$$
$$N_0' \approx 1{,}4\,\text{Hz}$$

Conclusion. Il faut régler le vibreur vers $1{,}4\,\text{Hz}$ pour retrouver la résonance du tablier alourdi.