BURHAN

Systèmes mécaniques oscillants

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/systemes-mecaniques-oscillants/cours

Chapitre	Semestre
Systèmes mécaniques oscillants	Semestre 2

Mouvement oscillatoire et oscillations libres

Un mobile entre deux ressorts

Sur un banc horizontal à coussin d'air, un mobile est attaché entre deux ressorts tendus. Les frottements sont très faibles. Au repos, le mobile occupe sa **position d'équilibre**.

Tu l'écartes de $3{,}0\,\mathrm{cm}$ vers la droite, puis tu le lâches sans vitesse. Un capteur relève sa position toutes les $50\,\mathrm{ms}$: c'est un **enregistrement**.

Devine : Le mobile après le lâcher

Que fait le mobile pendant les deux secondes qui suivent le lâcher ?

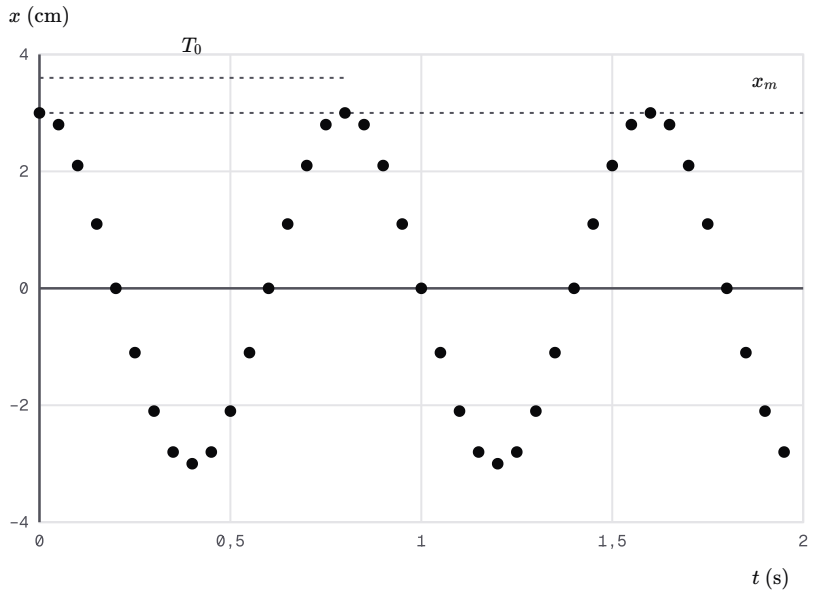
A. Il revient à l'équilibre et s'y arrête aussitôt.
Faux.
Arrivé à l'équilibre, il est lancé : rien ne le freine assez pour l'arrêter net.

B. Il fait des allers et retours autour de l'équilibre.
Juste.
Juste : les ressorts le ramènent sans cesse vers l'équilibre, qu'il dépasse à chaque passage.

C. Il reste immobile, écarté de $3{,}0\,\mathrm{cm}$.
Faux.
Lâché, il est tiré par les ressorts : il ne peut pas rester à l'écart.

D. Il s'éloigne de plus en plus vers la droite.
Faux.
Les ressorts le tirent vers l'équilibre, jamais vers l'extérieur.

Correction
Les ressorts tirent le mobile vers sa position d'équilibre. Il y arrive avec une vitesse, la dépasse, ralentit, puis revient. Le mouvement est une suite d'allers et retours : un **mouvement oscillatoire**.



● (libellé indisponible)

Enregistrement de la position x du mobile, une mesure toutes les 50 ms ; amplitude et période repérées.

Équilibre, amplitude et période sur l'enregistrement

Une mesure. Sur l'enregistrement, x est repérée depuis la position d'équilibre : $x = 0$ à l'équilibre. Le mobile va de $x = 3{,}0\,\text{cm}$ à $x = -3{,}0\,\text{cm}$. Ce plus grand écart, $3{,}0\,\text{cm}$, est l'**amplitude** x_m.

Le motif se répète. Deux motifs complets durent environ $1{,}6\,\text{s}$: un aller et retour dure environ $0{,}80\,\text{s}$.

En clair. Après le lâcher, personne ne pousse le mobile : seuls les ressorts agissent. Ses oscillations sont **libres**. Comme les frottements sont presque nuls, l'amplitude reste la même d'un aller et retour à l'autre.

Vérifie : Des oscillations libres ou non

Dans quel cas les oscillations sont-elles libres ?

A. Un hamac qu'un enfant pousse à chaque passage.

Faux.

La poussée répétée est une action extérieure qui entretient le mouvement.

B. Une masse sous un ressort dont le haut est secoué par un moteur.

Faux.

Le moteur agit sans cesse sur le système : les oscillations lui sont imposées.

C. Une masse sous un ressort, tirée vers le bas puis lâchée.

Juste.

Juste : après le lâcher, aucune action extérieure n'entretient le mouvement.

Correction

> Les oscillations sont libres quand le système, écarté puis abandonné, oscille seul. C'est le cas de la masse lâchée. Le hamac poussé et la masse secouée par un moteur reçoivent une action répétée.

Période propre et fréquence propre

Définition : Mouvement oscillatoire, oscillations libres et période propre

Un système a un **mouvement oscillatoire** lorsqu'il effectue des allers et retours de part et d'autre d'une position d'équilibre stable. Ce mouvement est **périodique** s'il se reproduit identique à lui-même à intervalles de temps égaux : la plus petite de ces durées est la **période** T, en secondes, et la **fréquence** est $N = \dfrac{1}{T}$, en hertz.

Les oscillations sont **libres** lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre puis abandonné, oscille sans aucune action extérieure qui l'entretienne. En l'absence de frottements, la période des oscillations libres est la **période propre** T_0 du système, et $N_0 = \dfrac{1}{T_0}$ est sa **fréquence propre**.

Exemple : Période propre et fréquence propre du mobile

Le banc est presque sans frottement : la période mesurée est la période propre. Pour plus de précision, on chronomètre cinq oscillations : elles durent $4{,}00\,\mathrm{s}$.

$$T_0 = \frac{4{,}00}{5} = 0{,}800\,\mathrm{s}$$
$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}800}$$
$$N_0 = 1{,}25\,\mathrm{Hz}$$

Le mobile fait un peu plus d'une oscillation par seconde.

Écrire un résultat calculé

Chiffres significatifs. Dans tout le chapitre, la précision d'un résultat calculé suit sa donnée la moins précise : il porte le même nombre de chiffres significatifs qu'elle. Les zéros écrits à gauche ne comptent pas.

Ainsi $4{,}00\,\mathrm{s}$ en a trois : $T_0 = 0{,}800\,\mathrm{s}$ et $N_0 = 1{,}25\,\mathrm{Hz}$ en ont trois aussi. Le nombre 5 d'oscillations est compté, pas mesuré : il ne limite pas la précision.

Vérifie : Une fréquence bien arrondie

Un autre mobile a la période propre $T_0 = 0{,}62\,\mathrm{s}$. Comment écrire sa fréquence propre ?

A. $N_0 = 1{,}613\,\mathrm{Hz}$
Faux.

Quatre chiffres : plus que la période n'en porte.

B. $N_0 = 2\,\text{Hz}$

Faux.

Un seul chiffre : l'arrondi jette une précision que la mesure porte.

C. $N_0 = 0{,}62\,\text{Hz}$

Faux.

C'est la période recopiée : la fréquence est son inverse.

D. $N_0 = 1{,}6\,\text{Hz}$

Juste.

Juste : la période a deux chiffres significatifs, la fréquence aussi.

Correction

$N_0 = \dfrac{1}{0{,}62} = 1{,}6\,\text{Hz}$: deux chiffres significatifs, comme la période.

À toi : Dix oscillations chronométrées

Un mobile accroché entre deux ressorts fait dix oscillations en $6{,}5\,\text{s}$. Calcule sa période propre T_0, puis sa fréquence propre N_0. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Une oscillation est un aller et retour complet ; la période en est la durée.

Indice 2

Divise la durée totale par le nombre d'oscillations, puis prends l'inverse de la période.

Indice 3

Point délicat : la durée a deux chiffres significatifs ; le nombre dix est compté, il ne limite rien.

Réponse

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{6{,}5}{10} \\ &= 0{,}65\,\text{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{0{,}65} \\ &= 1{,}5\,\text{Hz} \end{aligned}$$

Le mobile a une période propre de $0{,}65\,\text{s}$ et une fréquence propre de $1{,}5\,\text{Hz}$.

Force de rappel d'un ressort et équation différentielle de l'oscillateur horizontal

Ce que mesure un dynamomètre accroché au ressort

Une mesure. Sur le banc, un palet de masse $m = 0{,}200\,\text{kg}$ est relié à une paroi par un ressort. On tire le palet avec un dynamomètre et on note la valeur F de la force du ressort pour plusieurs allongements $\Delta\ell$.

$\Delta\ell$ (cm)	F (N)
$1{,}00$	$0{,}200$
$2{,}00$	$0{,}400$
$3{,}00$	$0{,}600$
$4{,}00$	$0{,}800$

Le quotient $\dfrac{F}{\Delta\ell}$ vaut $20{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ à chaque mesure : F est proportionnelle à $\Delta\ell$.

Devine : Le sens de la force quand le ressort est comprimé

La paroi est à gauche du palet. Tu pousses le palet vers la paroi : le ressort est comprimé de $2{,}0\,\mathrm{cm}$. Dans quel sens le ressort pousse-t-il le palet ?

A. Vers la droite, à l'opposé de la paroi.
Juste.
Juste : comprimé, le ressort repousse le palet pour retrouver sa longueur à vide.

B. Vers la gauche, vers la paroi.
Faux.
Ce serait le sens de la compression : le ressort s'y oppose.

C. Il n'exerce aucune force tant qu'il est plus court.
Faux.
Un ressort comprimé agit aussi : il tend à reprendre sa longueur à vide.

D. Vers le haut, perpendiculairement au banc.
Faux.
La force d'un ressort est portée par son axe, ici horizontal.

Correction
Le ressort comprimé tend à s'allonger. Il repousse donc le palet vers la droite, à l'opposé de la paroi. Sa force s'oppose à la déformation.

Propriété : Force de rappel exercée par un ressort

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur K et de longueur à vide ℓ_0, a la longueur ℓ ; son allongement est $\Delta\ell = \ell - \ell_0$. Il exerce sur le solide fixé à son extrémité une **force de rappel** $\vec{F}$:

- de direction l'axe du ressort ;
- de sens opposé à la déformation : elle tend à rendre au ressort sa longueur à vide ;
- de valeur $F = K\,|\Delta\ell|$, avec K en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Sur un axe $(O;\vec{i})$ porté par le ressort, orienté dans le sens de l'allongement, d'origine O à l'extrémité du ressort à vide, l'abscisse x de cette extrémité est l'allongement et

$$\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}.$$

Exemple : La force du ressort pour deux déformations

Le ressort a la raideur $K = 20{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

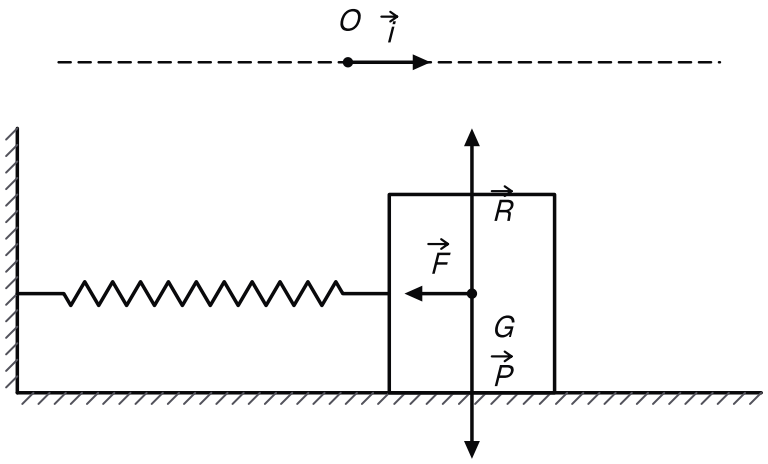
- Allongé de $2{,}5\,\mathrm{cm}$, soit $2{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$:

$$\begin{aligned} F &= K\,\Delta\ell \\ &= 20{,}0\times2{,}5\times10^{-2} \\ &= 0{,}50\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

La force tire le palet vers la paroi.

- Comprimé de $1{,}5\,\mathrm{cm}$, avec l'axe orienté vers la droite : $x = -1{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$, donc $F_x = -K\,x = 0{,}30\,\mathrm{N}$. Elle est positive : vers la droite.

Repérer le palet depuis l'équilibre



Palet relié à un ressort horizontal, écarté de 4,0 cm vers la droite : poids P, réaction R du banc et force de rappel F ; 1 unité pour 0,98 N.

Rappel : deuxième loi de Newton. Dans un référentiel galiléen, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$ pour tout solide de masse m. Pendant une expérience de quelques secondes, on suppose galiléen le référentiel terrestre.

Le choix de l'axe. On repère le centre d'inertie G du palet sur un axe $(O;\vec{i})$ porté par le ressort, orienté vers la droite, dans le sens où le ressort s'allonge. On place l'origine O là où se trouve G quand le palet est immobile. Sur le banc horizontal, le ressort a alors sa longueur à vide : l'abscisse x de G mesure son allongement.

Établir l'équation du mouvement du palet

Pourquoi est-ce vrai ? La force de rappel et la deuxième loi de Newton sont admises. Avec elles, on **établit** l'équation que vérifie x à chaque instant. La démonstration suit l'énoncé : elle nomme le système, le référentiel, les forces, puis projette sur l'axe.

Propriété : Équation différentielle de l'oscillateur solide-ressort horizontal

Un solide de masse m et de centre d'inertie G, fixé à un ressort horizontal de raideur K, glisse sans frottement sur un plan horizontal. L'axe $(O;\vec{i})$ est porté par l'axe du ressort, orienté dans le sens de l'allongement, et son origine O est la position de G à l'équilibre. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, l'abscisse x de G vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}\,x = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Système : le solide. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. À l'équilibre, sur le plan horizontal, aucune force horizontale autre que celle du ressort ne s'exerce : le ressort a sa longueur à vide. L'allongement du ressort à l'instant t est donc l'abscisse x de G.

Étape 2. Bilan des forces : le poids $\vec{P}$, vertical ; la réaction $\vec{R}$ du plan, normale au plan car il n'y a pas de frottement ; la force de rappel du ressort, $\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$ (force de rappel exercée par un ressort).

Étape 3. Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$.

Étape 4. Projection sur $(O;\vec{i})$: $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires à $\vec{i}$, et $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$. Il vient :

$$-K\,x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Étape 5. En divisant par m :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}\,x = 0.$$

> **Vérifie : Ce qui disparaît à la projection**
>
> Dans la preuve, pourquoi le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ n'apparaissent-ils plus après la projection sur $(O;\vec{i})$?

A. Ils sont perpendiculaires à $\vec{i}$: leurs projections sont nulles.

Juste.

Juste : c'est l'étape 4 de la preuve. Il ne reste que la projection de la force de rappel.

B. Leurs valeurs sont négligeables devant celle de la force du ressort.

Faux.

Le poids du palet vaut $1{,}96\,\mathrm{N}$: il n'est pas négligeable, mais il est vertical.

C. L'accélération du palet est nulle.

Faux.

L'accélération varie sans cesse : c'est elle qui fait osciller le palet.

D. La masse du palet ne compte pas dans le mouvement.

Faux.

La masse figure dans l'équation, au second membre de la deuxième loi.

Correction

Étape 4 : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticaux, donc perpendiculaires à $\vec{i}$. Leurs projections sur l'axe sont nulles. Il reste $-K\,x = m\,a_x$.

Exemple : L'équation différentielle du palet

Pour le palet, $K = 20{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $m = 0{,}200\,\mathrm{kg}$:

$$\frac{K}{m} = \frac{20{,}0}{0{,}200} = 100\,\mathrm{s^{-2}}$$

L'abscisse du palet vérifie donc $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 100\,x = 0$, avec x en mètres et t en secondes. Le quotient $\dfrac{K}{m}$ s'exprime en $\mathrm{s^{-2}}$, car $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$.

Les cinq étapes de la mise en équation

Méthode : Établir l'équation différentielle d'un solide-ressort

1. **Nomme** le système étudié et le référentiel terrestre, supposé galiléen.
2. **Oriente l'axe** le long du ressort, dans le sens où il s'allonge, et place l'origine à la position d'équilibre de G.
3. **Fais le bilan des forces**, puis écris l'allongement du ressort à la date t : x pour un ressort horizontal, $\Delta\ell_0 + x$ pour un ressort incliné ou vertical.
4. **Applique la deuxième loi de Newton** à l'équilibre, puis à une date quelconque ; projette chaque fois sur l'axe.

5. **Simplifie** grâce à la condition d'équilibre et mets l'équation sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{m}\,x = 0$.

Un air de déjà-vu. Dans un circuit LC, la charge du condensateur vérifie une équation différentielle de même forme, avec d'autres grandeurs.

À toi : L'équation d'un second palet

Un palet de masse $m = 0{,}500\,\mathrm{kg}$ est relié à un ressort horizontal de raideur $K = 32{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Écris l'équation différentielle de son mouvement. Donne ensuite la coordonnée F_x de la force de rappel quand $x = -2{,}5\,\mathrm{cm}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'équation a la forme établie plus haut : il reste à calculer $\dfrac{K}{m}$.

Indice 2

Pour la force, utilise $F_x = -K\,x$ avec x en mètres.

Indice 3

Point délicat : attention au signe de x.

Réponse

$$\begin{aligned}\frac{K}{m} &= \frac{32{,}0}{0{,}500}\\ &= 64{,}0\,\mathrm{s^{-2}}\end{aligned}$$

L'équation est $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 64{,}0\,x = 0$.

$$\begin{aligned}F_x &= -K\,x\\ &= -32{,}0 \times (-0{,}025)\\ &= 0{,}80\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

La force de rappel vaut $0{,}80\,\mathrm{N}$ et pousse le palet vers les x croissants, donc vers l'équilibre.

Équation horaire, conditions initiales et période propre

La période et l'amplitude du palet

Devine : Lâcher le palet de plus loin

Le palet du banc est lâché sans vitesse à $2{,}0\,\mathrm{cm}$ de l'équilibre, puis à $4{,}0\,\mathrm{cm}$. Que devient la période de ses oscillations ?

A. Elle double, car le chemin parcouru double.

Faux.

Le chemin double, mais la vitesse aussi : la durée d'un aller et retour ne change pas.

B. Elle est divisée par deux.

Faux.

Plus écarté, le palet est tiré plus fort, mais il a plus de chemin : les deux effets se compensent exactement.

C. Elle est multipliée par $\sqrt{2}$.

Faux.
Le facteur $\sqrt{2}$ apparaît quand on double la masse, pas l'amplitude.

D. Elle ne change pas.

Juste.
Juste : la mesure le confirme, et le calcul de la période l'explique.

Correction
La période reste la même. Écarté deux fois plus, le palet est tiré deux fois plus fort : il va plus vite et parcourt le double du chemin dans la même durée.

Une mesure. On chronomètre dix oscillations du palet dans chaque cas. Lâché à $2{,}0\,\mathrm{cm}$, il les fait en $6{,}28\,\mathrm{s}$; lâché à $4{,}0\,\mathrm{cm}$, aussi. La période propre vaut $T_0 = 0{,}628\,\mathrm{s}$ dans les deux cas : elle ne dépend pas de l'amplitude.

La solution sinusoïdale et la période propre

Pourquoi est-ce vrai ? En mathématiques, on admet que les solutions d'une équation $y'' + a^2 y = 0$ sont sinusoïdales. On **donne** donc la forme de $x(t)$, puis on la **vérifie** en la reportant dans l'équation du palet : cette vérification fixe la période propre.

Propriété : Équation horaire et période propre de l'oscillateur solide-ressort

La solution de l'équation différentielle de l'oscillateur solide-ressort s'écrit

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right),$$

où l'amplitude $x_m > 0$, en mètres, et la phase à l'origine φ, en radians, sont fixées par les conditions initiales. La période propre vaut :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Le mouvement de G est **rectiligne sinusoïdal**. Sa période propre ne dépend pas de l'amplitude. La vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et l'accélération $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ s'obtiennent en dérivant $x(t)$.

Démonstration

Étape 1. La forme de la solution est donnée, comme le permet l'outil de mathématiques admis : les solutions de $y'' + a^2 y = 0$ sont des fonctions sinusoïdales. On pose $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$ avec $x_m > 0$ et on cherche T_0.

Étape 2. Par la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}\, x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right),$$

puis

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x(t).$$

Étape 3. On reporte dans l'équation différentielle de l'oscillateur solide-ressort horizontal :

$$\left(\frac{K}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) x(t) = 0$$

pour tout t.

Étape 4. La fonction x n'est pas identiquement nulle, car $x_m > 0$. Donc $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{K}{m}$ et, comme $T_0 > 0$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$. Cette valeur ne contient pas x_m : la période propre ne dépend pas de l'amplitude.

Étape 5. Équation aux dimensions : K s'exprime en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, soit $\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$. Le quotient $\dfrac{m}{K}$ s'exprime donc en $\mathrm{s^2}$ et T_0 en secondes.

Exemple **: La période propre du palet**

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}200}{20{,}0}} \\ &= 0{,}628\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

On retrouve la durée chronométrée. La fréquence propre vaut $N_0 = \dfrac{1}{T_0} = 1{,}59\,\mathrm{Hz}$.

Vérifie : L'unité sous la racine

Dans $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$, en quelle unité s'exprime le quotient $\dfrac{m}{K}$?

A. En $\mathrm{s^2}$.

Juste.

Juste : K s'exprime en $\mathrm{kg\cdot s^{-2}}$, donc $\dfrac{m}{K}$ en $\mathrm{s^2}$ et sa racine en secondes.

B. En s.

Faux.

C'est l'unité de la racine du quotient, pas celle du quotient lui-même.

C. En $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$.

Faux.

C'est oublier que le newton contient des secondes : $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

D. Il est sans unité.

Faux.

Une masse divisée par une raideur garde des secondes : le quotient n'est pas un nombre pur.

Correction

D'après l'étape 5 de la preuve, K s'exprime en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, soit $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Le quotient $\dfrac{m}{K}$ s'exprime en s^2 et T_0 en secondes : c'est l'**équation aux dimensions**.

Attention : Ce dont la période propre ne dépend pas

✗ « Lâché deux fois plus loin, le palet oscille deux fois plus lentement. »

✓ $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ ne contient pas l'amplitude x_m. Le même palet relié au même ressort garde $T_0 = 0{,}628\,\mathrm{s}$ quelle que soit l'amplitude. En revanche, doubler la masse multiplie T_0 par $\sqrt{2}$.

Amplitude et phase à l'origine fixées par le départ

Deux inconnues, deux conditions. L'équation horaire contient deux constantes, x_m et φ. Elles dépendent de la façon dont on lance le palet : sa position $x(0)$ et sa vitesse $v_x(0)$ à la date $t = 0$, les **conditions initiales**. En dérivant $x(t)$, on obtient :

$$v_x(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\,x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right).$$

Méthode : Trouver l'amplitude et la phase à l'origine

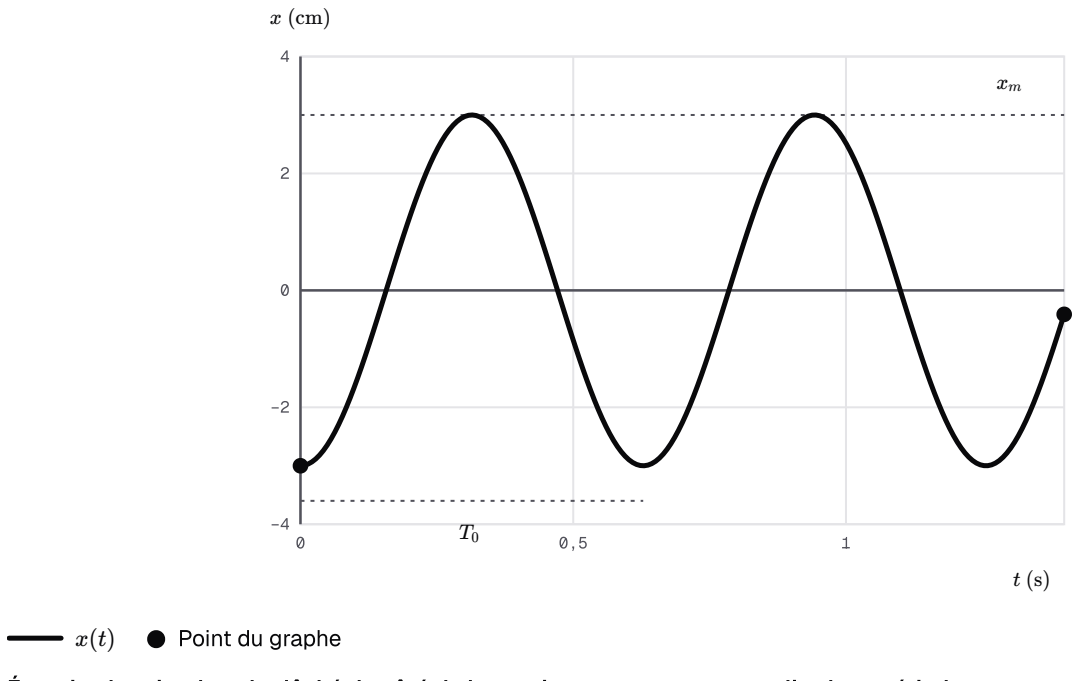
1. **Écris** les deux conditions à $t = 0$: $x(0) = x_m\cos\varphi$ et $v_x(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}\,x_m\sin\varphi$.
2. **Lâcher sans vitesse** depuis x_0 : $\sin\varphi = 0$. Si $x_0 > 0$, $\varphi = 0$ et $x_m = x_0$; si $x_0 < 0$, $\varphi = \pi$ et $x_m = -x_0$.
3. **Lancer depuis l'équilibre** avec la vitesse v_0 : $\cos\varphi = 0$. Si $v_0 > 0$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x_m = \dfrac{v_0\,T_0}{2\pi}$; si $v_0 < 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ et $x_m = -\dfrac{v_0\,T_0}{2\pi}$.
4. **Cas général** : $\cos\varphi = \dfrac{x(0)}{x_m}$ donne deux angles opposés. Garde celui dont le sinus a le signe contraire de $v_x(0)$.

Exemple : Le palet lâché du côté de la paroi

Le palet est lâché sans vitesse à $x_0 = -3{,}0\,\text{cm}$, du côté de la paroi. Comme $x_0 < 0$: $\varphi = \pi$ et $x_m = 3{,}0\,\text{cm}$. De plus, $\dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 10{,}0\,\text{s}^{-1}$. Avec x en centimètres et t en secondes :

$$x(t) = 3{,}0\cos\left(10{,}0\,t + \pi\right).$$

À $t = 0$, $x(0) = 3{,}0\cos\pi = -3{,}0\,\text{cm}$: c'est bien la position de départ.



Équation horaire du palet lâché du côté de la paroi : x en cm, t en s ; amplitude et période propre repérées.

Le sens du départ et la phase à l'origine

Attention : Choisir entre deux phases opposées

✗ « $x(0) = 1{,}5\,\text{cm}$ et $x_m = 3{,}0\,\text{cm}$: $\cos\varphi = 0{,}50$, donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$. »

✓ $\cos\varphi = 0{,}50$ a deux solutions, $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$. Si le palet part vers les x décroissants, $v_x(0) < 0$, donc $\sin\varphi > 0$: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Avec l'autre valeur, la courbe partirait dans le mauvais sens.

Exemple : Le palet lancé depuis l'équilibre

À $t = 0$, le palet passe par l'équilibre avec $v_0 = 0{,}25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, vers les x croissants. Alors $\cos\varphi = 0$ et $v_0 > 0$: $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

$$x_m = \frac{v_0\,T_0}{2\pi} = \frac{0{,}25}{10{,}0} = 2{,}5\times10^{-2}\,\text{m}$$

L'amplitude vaut $2{,}5\,\mathrm{cm}$.

À toi : Un palet lancé vers la paroi

Un autre palet, de masse $m = 0{,}450\,\mathrm{kg}$, est relié à un ressort de raideur $K = 50{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. À $t = 0$, il passe par l'équilibre avec $v_x(0) = -0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calcule T_0, puis x_m et φ. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La période propre vient de m et de K ; les conditions initiales donnent x_m et φ.
Indice 2
Départ à l'équilibre : $\cos\varphi = 0$, et x_m se tire de la valeur de la vitesse.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe de $v_x(0)$ pour choisir entre deux phases opposées.

Réponse

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}450}{50{,}0}}$$
$$= 0{,}596\,\mathrm{s}$$

Avec la valeur non arrondie de T_0 :

$$x_m = \frac{0{,}40\,T_0}{2\pi}$$
$$= 3{,}8\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Comme $v_x(0) < 0$, $\sin\varphi > 0$: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. L'amplitude vaut $3{,}8\,\mathrm{cm}$.

Exploiter les courbes de position, de vitesse et d'accélération

Lire période, amplitude et départ

Un document. Un capteur relié à un ordinateur enregistre l'abscisse x d'un palet de masse $m = 0{,}200\,\mathrm{kg}$, accroché à un autre ressort du banc. Le logiciel calcule aussi sa vitesse v_x en dérivant x. Les deux courbes sont tracées sur la même durée.

Devine : Les instants où la vitesse s'annule

Avant de regarder les courbes : à quels moments la vitesse du palet est-elle nulle ?

A. Quand il est à l'un de ses écarts extrêmes.
Juste.
Juste : il fait demi-tour ; sa vitesse change de signe en passant par zéro.

B. Quand il passe par la position d'équilibre.
Faux.
À l'équilibre, le palet va au contraire le plus vite.

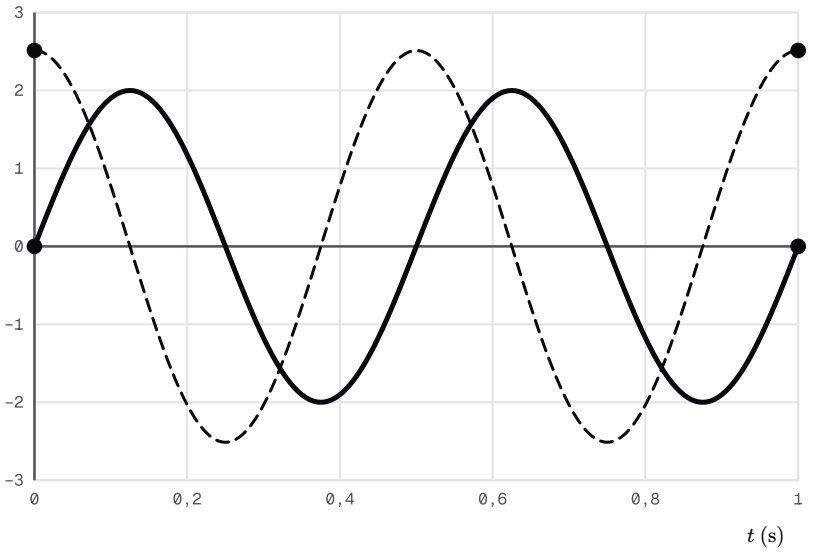
C. Jamais : il bouge sans arrêt.

Faux.

Il bouge sans arrêt, mais sa vitesse change de signe : elle passe donc par zéro.

Correction

Aux extrémités du mouvement, le palet s'arrête un instant pour repartir en sens inverse : $v_x = 0$. Il passe au contraire par l'équilibre avec sa plus grande vitesse.



Abscisse x en cm et vitesse v_x en dm/s d'un palet relié à un ressort, sur deux périodes propres (1 dm/s = 0,1 m/s).

Lecture. Deux motifs complets de $x(t)$ durent $1{,}0\,\mathrm{s}$: $T_0 \approx 0{,}50\,\mathrm{s}$. Les sommets sont à $2{,}0\,\mathrm{cm}$: $x_m \approx 2{,}0\,\mathrm{cm}$. À $t = 0$, $x = 0$ et x augmente : le palet part de l'équilibre vers les x croissants, donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

La raideur tirée de la période lue

Méthode : Exploiter un enregistrement d'oscillations

1. **Lis la période** entre deux sommets successifs ; sur plusieurs motifs, la lecture est plus précise. Lis l'**amplitude** x_m à la hauteur des sommets.
2. **Lis le départ** : la valeur $x(0)$ et le sens de variation de x en $t = 0$, qui donne le signe de $v_x(0)$. Déduis-en φ.
3. **Relie les courbes** : v_x s'annule aux sommets et aux creux de x ; sa valeur est la plus grande au passage par l'équilibre, avec $v_m = \dfrac{2\pi}{T_0}\,x_m$. L'accélération $a_x = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,x$ est de signe contraire à x.

4. **Calcule** K ou m avec l'expression de la période propre ; la même idée servira pour les pendules.

Exemple : La raideur du second ressort

De $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$, on tire $K = \dfrac{4\pi^2\, m}{T_0^2}$.

$$\begin{aligned} K &= \frac{4\pi^2 \times 0{,}200}{0{,}50^2} \\ &= 32\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \end{aligned}$$

La période lue n'a que deux chiffres significatifs : la raideur aussi.

Vitesse et accélération du palet

En clair. En dérivant $x(t)$ une fois, on obtient la vitesse ; deux fois, l'accélération :

$$a_x = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x.$$

La vitesse atteint ses extrêmes un quart de période avant ou après ceux de x. L'accélération est dirigée vers la position d'équilibre.

Exemple : Vitesse et accélération maximales du palet

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{2\pi\, x_m}{T_0} = \frac{2\pi \times 0{,}020}{0{,}50} \\ &= 0{,}25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{4\pi^2\, x_m}{T_0^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \times 0{,}020}{0{,}50^2} \\ &= 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

On lit bien $v_m \approx 2{,}5\,\mathrm{dm\cdot s^{-1}}$ sur la courbe de la vitesse.

Vérifie : L'accélération au sommet de la courbe

À l'instant où $x = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, sommet de la courbe, que vaut l'accélération a_x du palet ?

A. $a_x = 0$, car la vitesse est nulle.
Faux.
Vitesse nulle n'entraîne pas accélération nulle : la vitesse change de signe à cet instant.

B. $a_x = 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
Faux.

La valeur est juste, le signe non : l'accélération est dirigée vers l'équilibre, vers les x décroissants.

C. $a_x = -3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Juste.

Juste : a_x est de signe contraire à x, et sa valeur est la plus grande au sommet.

D. $a_x = 0{,}25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Faux.

C'est la valeur de v_m : une vitesse et une accélération n'ont ni la même unité ni la même valeur.

Correction

Au sommet, $x = x_m$ et $a_x = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,x_m = -3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. La vitesse est nulle, mais elle passe du positif au négatif : l'accélération, elle, n'est pas nulle.

Le décalage entre position et vitesse

Vérifie : Le quart de période entre les deux courbes

Entre $t = 0$ et $t = 0{,}40\,\mathrm{s}$, à quel instant la vitesse v_x prend-elle sa plus grande valeur positive ?

A. À $t \approx 0{,}125\,\mathrm{s}$, au sommet de x.

Faux.

Au sommet de x, le palet fait demi-tour : sa vitesse y est nulle.

B. À $t \approx 0{,}25\,\mathrm{s}$.

Faux.

Le palet passe bien par l'équilibre, mais vers les x décroissants : v_x y est la plus négative.

C. À $t \approx 0{,}375\,\mathrm{s}$.

Faux.

C'est le creux de x : la vitesse y est nulle.

D. À $t = 0$.

Juste.

Juste : le palet passe alors par l'équilibre vers les x croissants, un quart de période avant le sommet.

Correction

La vitesse est la plus grande au passage par l'équilibre. Le palet y passe vers les x croissants à $t = 0$, un quart de période avant le sommet de x : les deux courbes sont décalées de $\dfrac{T_0}{4}$.

À toi : Exploiter un second enregistrement

Sur l'enregistrement d'un palet de masse $m = 0{,}150\,\mathrm{kg}$, cinq périodes durent $2{,}00\,\mathrm{s}$ et les sommets sont à $1{,}5\,\mathrm{cm}$. Calcule la raideur K du ressort, puis la vitesse maximale v_m du palet. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la période propre ; la raideur vient de son expression.
Indice 2
Isole K dans $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$, puis utilise $v_m = \dfrac{2\pi}{T_0}\,x_m$.
Indice 3
Point délicat : x_m s'écrit en mètres, et v_m n'a que deux chiffres significatifs.

Réponse
$T_0 = \dfrac{2{,}00}{5} = 0{,}400\,\mathrm{s}$.

$$K = \frac{4\pi^2 \times 0{,}150}{0{,}400^2} = 37{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

$$v_m = \frac{2\pi \times 0{,}015}{0{,}400} = 0{,}24\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Le ressort a une raideur de $37{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$; le palet atteint $0{,}24\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ au passage par l'équilibre.

Ressort incliné ou vertical et mesure de la raideur

Une masse marquée sous un ressort vertical

On accroche une masse marquée, de masse $m = 0{,}100\,\mathrm{kg}$, sous un ressort vertical de raideur $K = 25{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Le ressort s'allonge, puis la masse s'immobilise : c'est sa position d'équilibre. Tirée vers le bas puis lâchée, elle oscille de part et d'autre de cette position.

Devine : Doubler la masse accrochée

On remplace la masse par une masse deux fois plus grande, sous le même ressort. Que devient l'allongement du ressort à l'équilibre ?

A. Il double.
Juste.
Juste : à l'équilibre, la force du ressort compense le poids, qui double.

B. Il ne change pas.
Faux.
Le ressort doit retenir un poids deux fois plus grand : il s'allonge davantage.

C. Il est multiplié par $\sqrt{2}$.
Faux.

Le facteur $\sqrt{2}$ concerne la période propre ; l'allongement suit le poids.

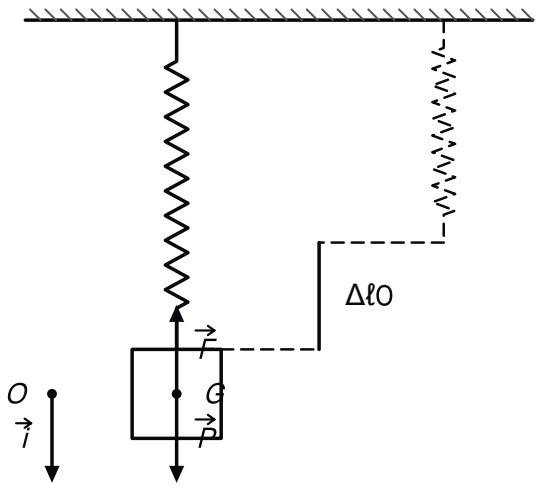
D. Il est divisé par deux.

Faux.

Une masse plus grande tire plus fort : le ressort s'allonge plus, pas moins.

Correction

À l'équilibre, la force du ressort compense le poids : $K\,\Delta\ell_0 = m\,g$. Si m double, $\Delta\ell_0$ double.



Ressort vertical à vide, à droite, et ressort à l'équilibre avec la masse accrochée : allongement Δℓ0, axe orienté vers le bas, forces P et F.

Établir l'équation du ressort vertical ou incliné

Pourquoi est-ce vrai ? La méthode est celle du ressort horizontal, avec une différence : à l'équilibre, le ressort est déjà allongé de $\Delta\ell_0$. On écrit la deuxième loi de Newton deux fois, à l'équilibre puis à une date quelconque, et on compare les deux projections.

Propriété : Oscillateur solide-ressort incliné ou vertical

Un solide de masse m est accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort de raideur K dont l'axe fait l'angle α avec l'horizontale ($\alpha = 90^\circ$ pour un ressort vertical). Le solide se déplace sans frottement selon l'axe du ressort. À l'équilibre, le ressort est allongé de $\Delta\ell_0$, avec

$$K\,\Delta\ell_0 = m\,g\sin\alpha.$$

L'axe $(O;\vec{i})$ est porté par l'axe du ressort, orienté vers le bas, et son origine O est la position d'équilibre de G. L'abscisse x de G vérifie alors la même équation différentielle que pour le ressort horizontal :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}\,x = 0,$$

et la période propre reste $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

Démonstration

Étape 1. Système : le solide. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$; la réaction $\vec{R}$ du plan, perpendiculaire à l'axe du ressort car il n'y a pas de frottement (elle n'existe pas pour un ressort vertical) ; la force de rappel $\vec{F}$ du ressort.

Étape 2. L'axe est orienté vers le bas, dans le sens de l'allongement. La projection du poids sur cet axe vaut $m\,g\sin\alpha$. Quand G a l'abscisse x, l'allongement du ressort vaut $\Delta\ell_0 + x$ et la projection de $\vec{F}$ vaut $-K\,(\Delta\ell_0 + x)$.

Étape 3. À l'équilibre, $x = 0$ et l'accélération est nulle. La deuxième loi de Newton projetée sur l'axe donne :

$$m\,g\sin\alpha - K\,\Delta\ell_0 = 0.$$

Étape 4. À un instant quelconque, la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe donne :

$$m\,g\sin\alpha - K\,(\Delta\ell_0 + x) = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Étape 5. D'après l'étape 3, les termes $m\,g\sin\alpha$ et $K\,\Delta\ell_0$ s'éliminent : $-K\,x = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{K}{m}\,x = 0$. L'équation est celle de l'oscillateur horizontal : d'après l'équation horaire et la période propre de l'oscillateur solide-ressort, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

Exemple : Allongement et période de la masse marquée

Ici le ressort est vertical : $\alpha = 90^\circ$ et $\sin\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}\Delta\ell_0 &= \frac{m\,g}{K} = \frac{0{,}100 \times 9{,}80}{25{,}0}\\ &= 3{,}92 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

La période propre ne dépend pas de g :

$$\begin{aligned}T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}100}{25{,}0}}\\ &= 0{,}397\ \mathrm{s}\end{aligned}$$

Vérifie : Pourquoi le poids disparaît de l'équation

Dans la preuve, pourquoi l'équation différentielle de la masse marquée ne contient-elle pas le terme $m\,g\sin\alpha$?

A. Parce que le poids est perpendiculaire à l'axe du ressort.

Faux.

Le poids est vertical, comme l'axe de ce ressort : sa projection sur l'axe n'est pas nulle.

B. Parce que le poids est négligeable devant la force du ressort.

Faux.

Ici $m\,g = 0{,}98\,\mathrm{N}$: il n'est pas négligeable.

C. Parce que $K\,\Delta\ell_0$ le compense, d'après l'équilibre.

Juste.

Juste : c'est l'étape 5 de la preuve, qui utilise l'étape 3.

D. Parce que l'origine est l'extrémité du ressort à vide.

Faux.

C'est l'inverse : l'origine est la position d'équilibre, et ce choix élimine le poids.

Correction

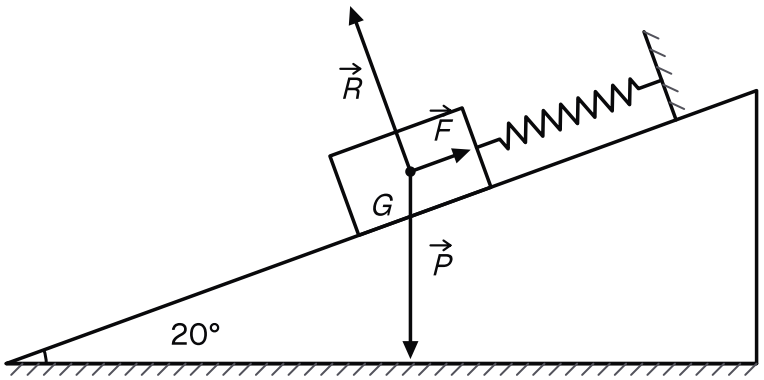
À l'étape 3, l'équilibre donne $m\,g\sin\alpha = K\,\Delta\ell_0$. À l'étape 5, ces deux termes disparaissent ensemble : il reste $-K\,x = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

Attention : L'allongement d'un ressort vertical à la date t

✗ « Le ressort vertical est allongé de x, donc $F_x = -K\,x$ et le poids reste dans l'équation. »

✓ L'origine O est la position d'équilibre, pas l'extrémité du ressort à vide. À la date t, l'allongement vaut $\Delta\ell_0 + x$. Le terme $K\,\Delta\ell_0$ compense alors exactement $m\,g$, et le poids disparaît de l'équation différentielle.

Un chariot retenu sur une rampe



Chariot à l'équilibre sur une rampe inclinée de 20 degrés, retenu par un ressort : forces P, R et F.

Exemple : Le chariot sur la rampe

Un chariot de masse $m = 0{,}500\,\text{kg}$ glisse sans frottement sur une rampe inclinée de $\alpha = 20°$. Il est retenu par un ressort de raideur $K = 40{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

$$\begin{aligned}\Delta\ell_0 &= \frac{m\,g\sin\alpha}{K}\\ &= \frac{0{,}500\times 9{,}80\times\sin 20°}{40{,}0}\\ &= 4{,}19\times10^{-2}\,\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}500}{40{,}0}}\\ &= 0{,}702\,\text{s}\end{aligned}$$

Le chariot oscille autour de cette position d'équilibre avec une période propre de $0{,}702\,\text{s}$.

Mesurer la raideur d'un ressort au laboratoire

Méthode : Deux façons de mesurer une raideur

1. **Méthode statique** : accroche des masses m connues au ressort vertical et mesure chaque allongement à l'équilibre $\Delta\ell_0$. La courbe de $m\,g$ en fonction de $\Delta\ell_0$ est une droite qui passe par l'origine ; son coefficient directeur est K.
2. **Méthode dynamique** : pour chaque masse, chronomètre dix oscillations et déduis T_0. La courbe de T_0^2 en fonction de m est une droite qui passe par l'origine, de coefficient directeur $\dfrac{4\pi^2}{K}$.

3. **Compare** les deux valeurs de K. Cite les causes d'écart : masse du ressort, frottements, lecture des durées.

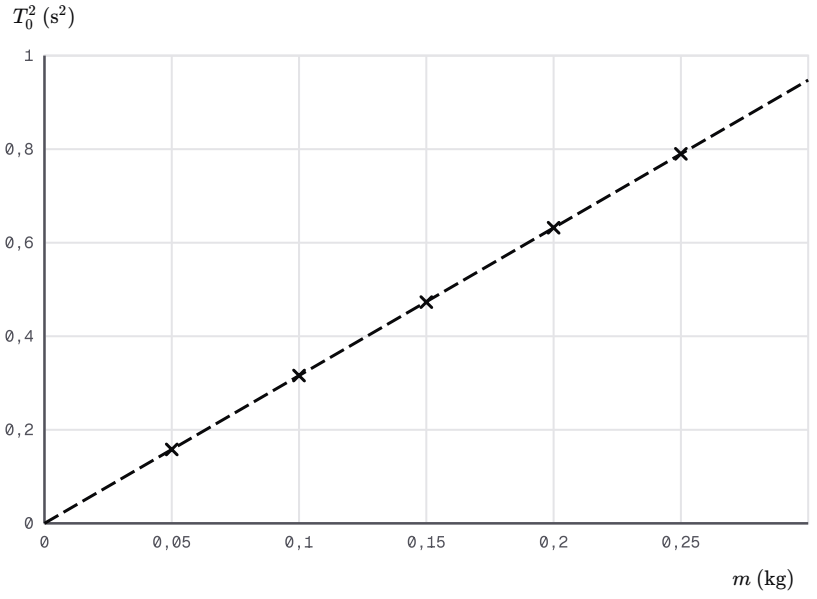
Méthode : Montage, protocole et exploitation de la mesure de raideur

Montage. Un ressort vertical pend d'une potence ; on y accroche des masses marquées. Un chronomètre mesure la durée de dix oscillations.

Protocole. Pour chaque masse, écarte-la d'environ $2\,\mathrm{cm}$ vers le bas et lâche-la. Déclenche le chronomètre à un passage par l'équilibre, puis compte dix oscillations.

m (kg)	$10\,T_0$ (s)	T_0^2 (s^2)
$0{,}050$	$3{,}97$	$0{,}158$
$0{,}100$	$5{,}62$	$0{,}316$
$0{,}150$	$6{,}88$	$0{,}473$
$0{,}200$	$7{,}95$	$0{,}632$
$0{,}250$	$8{,}89$	$0{,}790$

Exploitation. Trace T_0^2 en fonction de m et modélise les points par une droite qui passe par l'origine.



× $Mesures$ – – – (libellé indisponible)

Carré de la période propre en fonction de la masse accrochée : points de mesure et droite de modélisation passant par l'origine.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 5 points : y = a x, avec a ≈ 3,159.

Exemple : La raideur du ressort du laboratoire

La droite de modélisation a pour coefficient directeur $a \approx 3{,}16\,\mathrm{s^2 \cdot kg^{-1}}$. Comme $a = \dfrac{4\pi^2}{K}$:

$$K = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{3{,}16} \\ = 12{,}5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

Le fabricant annonce $12{,}5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$: la méthode dynamique le confirme.

À toi : La raideur par l'allongement à l'équilibre

Une masse de $0{,}250\,\mathrm{kg}$ accrochée à un ressort vertical l'allonge de $4{,}9\,\mathrm{cm}$ à l'équilibre. Calcule la raideur K, puis la période propre des oscillations verticales. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
À l'équilibre, la force du ressort compense le poids.
Indice 2
Pense à la condition d'équilibre, puis à l'expression de la période propre.
Indice 3
Point délicat : $\Delta\ell_0$ s'écrit en mètres ; la période ne contient pas g, mais le calcul de K utilise g.

Réponse

$$K = \frac{m\,g}{\Delta\ell_0} \\ = \frac{0{,}250 \times 9{,}80}{0{,}049} \\ = 50\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}250}{50}} \\ = 0{,}44\,\mathrm{s}$$

Le ressort a une raideur de $50\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$; la masse oscille avec une période propre de $0{,}44\,\mathrm{s}$.

Oscillations amorties : régimes, frottement solide et fluide

Trois oscillateurs freinés

Trois enregistrements. On coupe la soufflerie du banc : le palet frotte alors sur le rail par un patin. C'est un **frottement solide**. Sous un ressort vertical, une masse porte une palette plongée dans l'eau : c'est un **frottement fluide**, faible. Une large palette plongée dans l'huile subit un frottement fluide fort. Sans frottement, les trois oscillateurs auraient la même période propre, $T_0 = 0{,}50\,\mathrm{s}$. Tous sont lâchés à $3{,}0\,\mathrm{cm}$ de l'équilibre. On étudie d'abord les deux palettes, puis le patin.

Devine : L'effet des frottements sur l'amplitude

Que devient l'amplitude des oscillations quand des frottements s'exercent ?

A. Elle reste constante ; seule la période change.

Faux.

La période change peu ; c'est l'amplitude qui diminue.

B. Elle augmente peu à peu.

Faux.

Les frottements s'opposent au mouvement : ils ne peuvent pas l'amplifier.

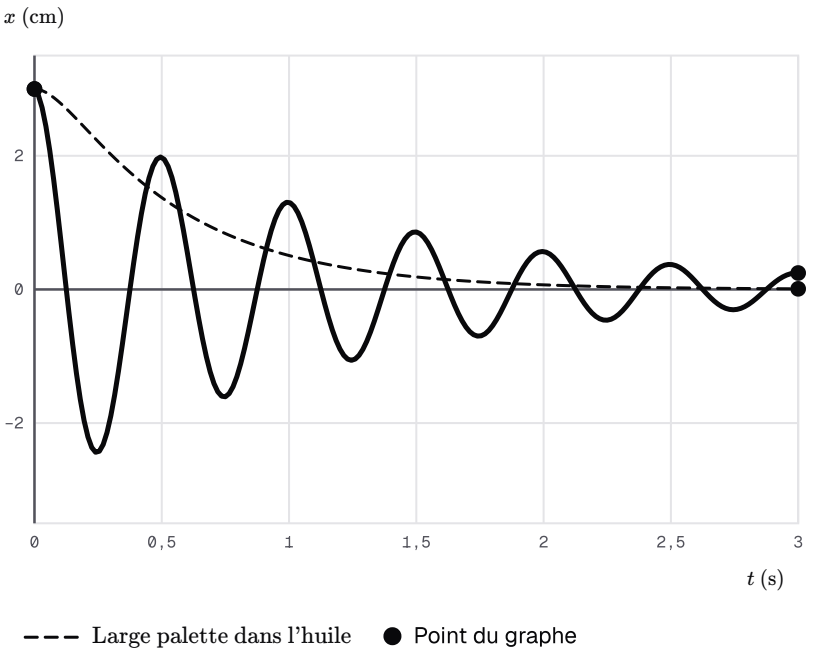
C. Elle diminue au fil des oscillations.

Juste.

Juste : les frottements freinent l'oscillateur à chaque aller et retour.

Correction

Les frottements s'opposent au mouvement. L'amplitude diminue d'une oscillation à l'autre : les oscillations sont **amorties**.



Modèles tracés par le moteur : palette dans l'eau (amortissement faible) et large palette dans l'huile (amortissement fort) ; x en cm, t en s.

Régime pseudo-périodique et régime apériodique

Définition : Amortissement des oscillations : régimes et types de frottement

Lorsque des frottements s'exercent, l'amplitude des oscillations libres diminue au cours du temps : les oscillations sont **amorties**.

- **Régime pseudo-périodique** : le système oscille avec une amplitude décroissante. La durée qui sépare deux maximums successifs est la **pseudo-période** T. Pour un amortissement faible, elle est voisine de la période propre : $T \approx T_0$.
- **Régime apériodique** : pour un amortissement important, le système revient à sa position d'équilibre sans osciller. Le **régime critique** sépare les deux régimes.
- **Frottement solide** (contact entre deux solides) : l'amplitude diminue de la même valeur à chaque oscillation ; les maximums de la courbe s'alignent sur une droite et le mouvement s'arrête après un nombre fini d'oscillations.
- **Frottement fluide** (air, eau, huile) : l'amplitude diminue de moins en moins vite ; les maximums s'alignent sur une courbe qui décroît en se rapprochant de zéro.

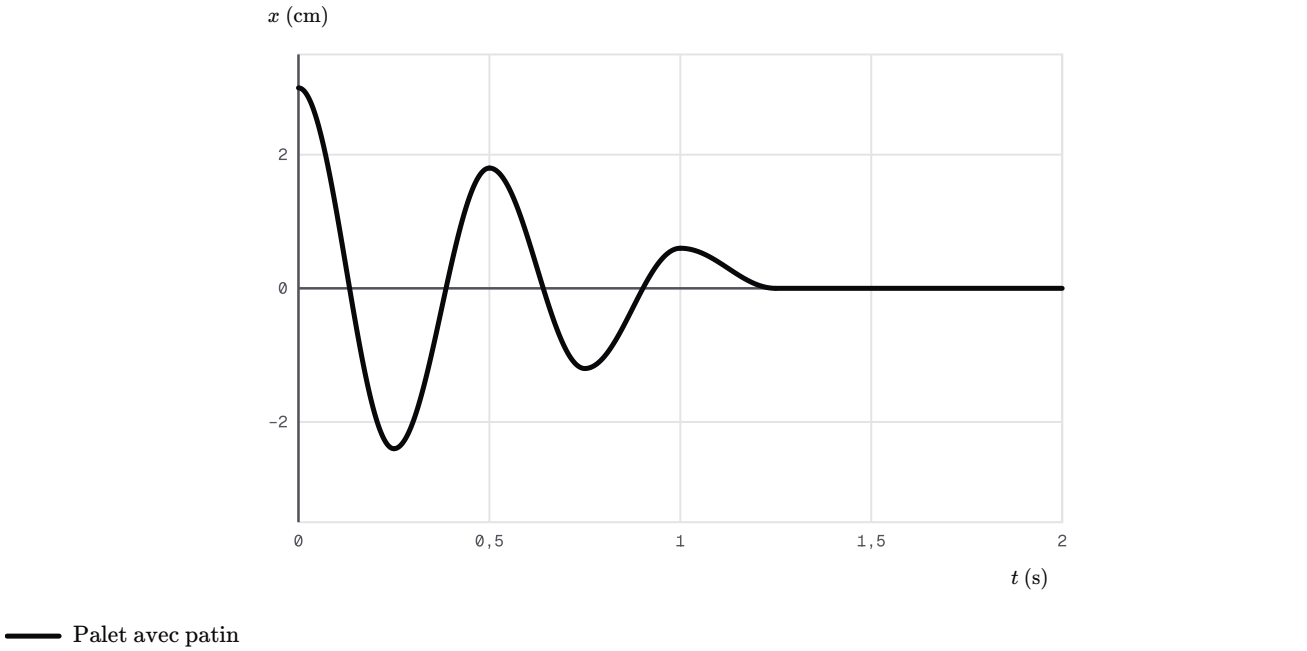
Exemple : Lecture des sommets dans l'eau

Sur la courbe de la palette dans l'eau, les sommets sont aux dates 0 ; $0{,}50$; $1{,}00$ et $1{,}50\,\text{s}$, à environ $3{,}0$; $2{,}0$; $1{,}3$ et $0{,}86\,\text{cm}$.

- Deux sommets successifs sont séparés de $T \approx 0{,}50\,\text{s}$: la pseudo-période est voisine de T_0.
- Le rapport de deux sommets successifs reste voisin de $0{,}66$: l'amplitude diminue de moins en moins vite. C'est la marque d'un frottement fluide.

Trois régimes. Dans l'eau, l'amortissement est faible : le régime est **pseudo-périodique**. Dans l'huile, la large palette est si freinée que la masse revient vers l'équilibre sans le dépasser : le régime est **apériodique**. Le régime **critique** sépare ces deux comportements.

Patin sur le rail ou palette dans l'eau



Modèle tracé par le moteur : palet freiné par un patin qui frotte sur le rail ; x en cm, t en s.

Exemple : Lecture des sommets avec le patin

Avec le patin, les sommets valent environ $3{,}0$; $1{,}8$ et $0{,}6\,\text{cm}$, aux dates 0 ; $0{,}50$ et $1{,}00\,\text{s}$. L'amplitude perd $1{,}2\,\text{cm}$ à chaque oscillation : les sommets s'alignent sur une droite. Le palet s'arrête vers $t \approx 1{,}25\,\text{s}$, après un nombre fini d'oscillations. C'est la marque d'un frottement solide.

Méthode : Reconnaître un amortissement sur une courbe

1. **Regarde si la courbe oscille** : si elle passe et repasse par la position d'équilibre, le régime est pseudo-périodique ; si elle y revient sans la dépasser, il est apériodique.
2. **Relève les sommets successifs.** S'ils baissent chaque fois de la même valeur, ils sont alignés : le frottement est solide. S'ils baissent de moins en moins, avec un rapport à peu près constant, le frottement est fluide.
3. **Mesure la pseudo-période** entre deux sommets et compare-la à la période propre.

Vérifie : Le type de frottement d'après quatre sommets

Un enregistrement montre des sommets successifs de $4{,}0$; $3{,}2$; $2{,}4$ et $1{,}6\,\text{cm}$. Quel est le type d'amortissement ?

A. Un frottement fluide : l'amplitude diminue.
Faux.

Toute amplitude amortie diminue ; ici les baisses sont égales, ce qui n'est pas le cas d'un frottement fluide.

B. Un régime apériodique.

Faux.

La courbe a des sommets successifs : elle oscille, le régime est pseudo-périodique.

C. Un régime critique.

Faux.

Le régime critique ne présente aucune oscillation, donc aucun sommet successif.

D. Un frottement solide : des baisses égales de $0{,}8\,\text{cm}$.

Juste.

Juste : des baisses égales alignent les sommets sur une droite.

Correction

Les baisses valent $4{,}0 - 3{,}2 = 0{,}8\,\text{cm}$, puis $0{,}8\,\text{cm}$ et $0{,}8\,\text{cm}$: elles sont égales. Les sommets s'alignent : le frottement est solide, et le régime pseudo-périodique.

Identifier un amortissement sur des mesures

Attention : Pseudo-période et période propre

✗ « Avec frottements, la pseudo-période est égale à la période propre, quel que soit l'amortissement. »

✓ $T \approx T_0$ seulement si l'amortissement est faible. Pour un frottement fluide, l'écart grandit quand l'amortissement augmente. En régime apériodique, il n'y a plus d'oscillation, donc plus de pseudo-période.

À toi : Les sommets d'un oscillateur amorti

Un oscillateur présente des sommets successifs de $5{,}0$; $4{,}0$; $3{,}2$ et $2{,}6\,\text{cm}$, aux dates 0 ; $0{,}82$; $1{,}64$ et $2{,}46\,\text{s}$. Donne le régime, le type de frottement et la pseudo-période. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Une courbe qui a plusieurs sommets oscille ; regarde ensuite comment les sommets baissent.

Indice 2

Calcule les baisses entre sommets successifs, puis leurs rapports.

Indice 3

Point délicat : pour chaque type de frottement, demande-toi quelle grandeur reste constante.

Réponse

Le régime est pseudo-périodique : la courbe oscille. Les baisses valent $1{,}0$; $0{,}8$ et $0{,}6\,\mathrm{cm}$: elles diminuent. Les rapports valent $\dfrac{4{,}0}{5{,}0} = 0{,}80$, puis environ $0{,}80$ et $0{,}81$: ils sont à peu près constants. Le frottement est fluide, et la pseudo-période vaut $T \approx 0{,}82\,\mathrm{s}$.

Pendule de torsion : couple de rappel et période propre

Une barre au bout d'un fil d'acier

Un fil d'acier vertical est fixé en haut à une potence. En bas, il tient en son milieu une barre horizontale. Deux masselottes se fixent sur la barre ou s'en retirent. La barre peut tourner dans un plan horizontal autour de l'axe Δ du fil. Quand on la tourne d'un angle θ, le fil se tord.

Devine : Tordre deux fois plus le fil

Pour maintenir la barre tournée de $0{,}40\,\mathrm{rad}$ au lieu de $0{,}20\,\mathrm{rad}$, quel moment ta main doit-elle exercer par rapport à l'axe ?

A. Le même moment.

Faux.

Le fil plus tordu ramène la barre plus fort : il faut un moment plus grand pour la retenir.

B. Un moment deux fois plus grand.

Juste.

Juste : le moment exercé par le fil est proportionnel à l'angle de torsion.

C. Un moment quatre fois plus grand.

Faux.

Le moment n'est pas proportionnel au carré de l'angle, mais à l'angle lui-même.

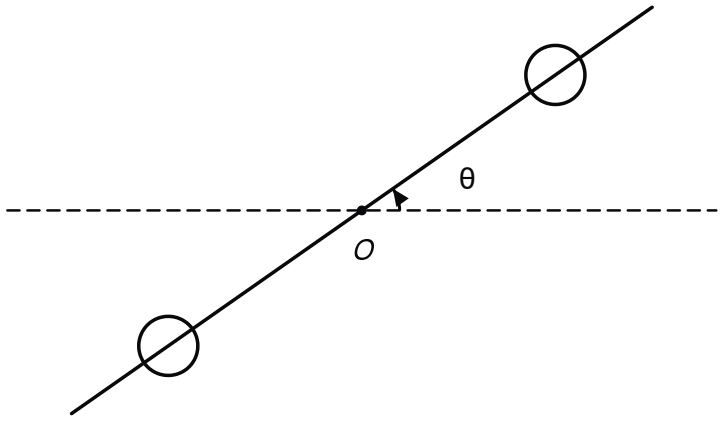
D. Aucun moment : le fil la retient seul.

Faux.

Lâchée, la barre revient vers sa position d'équilibre : il faut la retenir.

Correction

La mesure montre que le moment exercé par le fil est proportionnel à l'angle de torsion. Pour un angle double, ta main doit exercer un moment double.



Pendule de torsion vu de dessus : l'axe Δ du fil est le point O ; barre tournée de θ depuis sa position d'équilibre, en pointillés.

Le couple de rappel du fil

Une mesure. Une main maintient la barre tournée de θ ; on mesure le moment qu'elle exerce par rapport à Δ. Il compense celui du fil.

θ (rad)	moment de la main ($\mathrm{N \cdot m}$)
$0{,}100$	$2{,}50 \times 10^{-3}$
$0{,}200$	$5{,}00 \times 10^{-3}$
$0{,}300$	$7{,}50 \times 10^{-3}$

Le moment est proportionnel à θ : le quotient vaut $2{,}50 \times 10^{-2}\,\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$.

Propriété : Couple de rappel exercé par un fil de torsion

Un fil de torsion vertical, de constante de torsion C, est fixé par son extrémité supérieure ; un solide est fixé à son extrémité inférieure. Quand le solide tourne d'un angle θ (en radians) à partir de la position où le fil n'est pas tordu, le fil exerce sur lui un **couple de rappel** dont le moment par rapport à l'axe Δ du fil vaut

$$\mathcal{M}_C = -C\,\theta,$$

avec C en $\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$. Ce couple tend à ramener le solide vers la position où le fil n'est pas tordu, quel que soit le sens de la torsion.

Exemple : Le couple de rappel pour un angle de 30 degrés

Le fil a la constante de torsion $C = 2{,}50 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$. On tourne la barre de $30°$, soit $\theta = \dfrac{30 \times \pi}{180} = 0{,}524\,\mathrm{rad}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_C &= -C\,\theta \\ &= -2{,}50 \times 10^{-2} \times 0{,}524 \\ &= -1{,}31 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Le signe moins dit que le couple ramène la barre vers $\theta = 0$.

Établir l'équation de la barre

Rappel : relation fondamentale de la dynamique en rotation. Pour un solide qui tourne autour d'un axe fixe Δ, $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

Pourquoi est-ce vrai ? On applique cette loi admise à la barre, avec le couple de rappel du fil ; la preuve suit l'énoncé.

Propriété : Équation différentielle et période propre du pendule de torsion

Un pendule de torsion est formé d'un solide de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ d'un fil de torsion vertical de constante C. Les frottements sont négligeables. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, l'abscisse angulaire θ du solide, nulle à l'équilibre, vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{C}{J_\Delta}\,\theta = 0.$$

Sa solution s'écrit $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, avec $\theta_m > 0$ et φ fixées par les conditions initiales, et la période propre vaut :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}.$$

Démonstration

Étape 1. Système : le solide fixé au fil. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. L'axe Δ est l'axe du fil, fixe et vertical ; θ est orienté et nul quand le fil n'est pas tordu.

Étape 2. Bilan des actions et de leurs moments par rapport à Δ : le poids $\vec{P}$ est parallèle à Δ, son moment est nul ; la tension du fil s'exerce le long de Δ, son moment est nul ; le couple de rappel du fil a pour moment $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$ (couple de rappel exercé par un fil de torsion).

Étape 3. Relation fondamentale de la dynamique en rotation autour de l'axe fixe Δ :

$$-C\,\theta = J_\Delta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2},$$

soit, en divisant par J_Δ : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{C}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

Étape 4. Cette équation a la forme de celle de l'oscillateur solide-ressort, avec θ à la place de x et $\dfrac{C}{J_\Delta}$ à la place de $\dfrac{K}{m}$. La même substitution que pour l'équation horaire et la période propre de l'oscillateur solide-ressort donne $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{C}{J_\Delta}$, donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$.

Étape 5. Équation aux dimensions : C s'exprime en $\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$; le radian étant sans dimension, cela revient à $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$, et J_Δ en $\mathrm{kg \cdot m^2}$. Le quotient $\dfrac{J_\Delta}{C}$ s'exprime en $\mathrm{s^2}$ et T_0 en secondes.

Vérifie : Les actions qui ne font pas tourner la barre

Quel argument de la preuve écarte le poids de la barre de la relation fondamentale de la dynamique en rotation ?

A. Le poids d'une barre horizontale est nul.

Faux.

La barre a une masse, donc un poids : c'est son moment qui est nul.

B. Le poids est petit devant le couple de rappel.

Faux.

On ne compare pas une force et un moment : ce ne sont pas des grandeurs de même nature.

C. Le poids est parallèle à l'axe Δ : son moment est nul.

Juste.

Juste : c'est l'étape 2 de la preuve. Une force parallèle à l'axe ne fait pas tourner le solide.

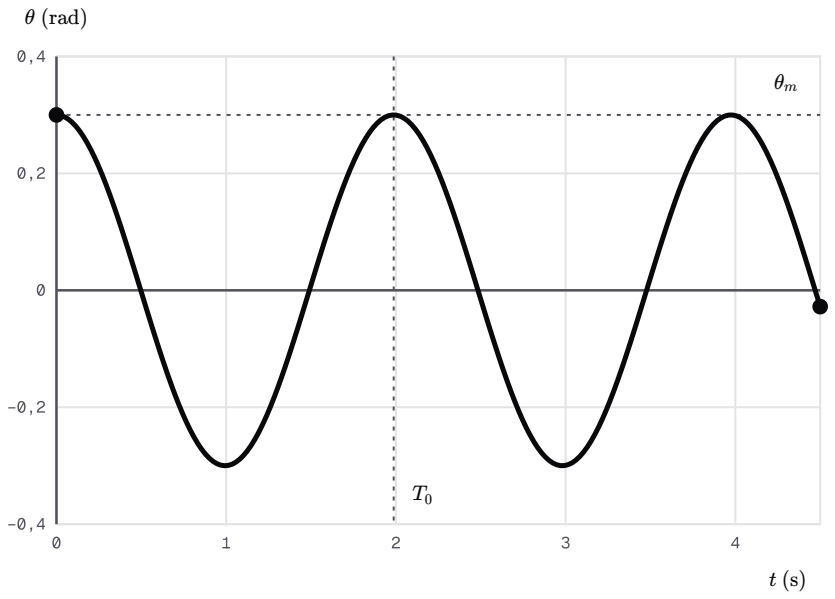
Correction

Le poids est vertical, comme l'axe Δ : son moment par rapport à Δ est nul (étape 2). La tension du fil, portée par Δ, a aussi un moment nul. Seul le couple de rappel reste.

Exemple : La période propre de la barre sans masselottes

Sans masselottes, la barre a le moment d'inertie $J_\Delta = 2{,}50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ par rapport à Δ.

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2{,}50 \times 10^{-3}}{2{,}50 \times 10^{-2}}} \\ &= 1{,}99\,\mathrm{s} \end{aligned}$$



Abscisse angulaire θ de la barre sans masselottes, lâchée sans vitesse à 0,30 rad ; θ en rad, t en s.

Modifier le moment d'inertie avec les masselottes

Méthode : Établir l'équation différentielle d'un pendule

1. **Nomme** le système, le référentiel terrestre supposé galiléen, l'axe fixe Δ et le sens positif de θ.
2. **Fais le bilan des actions** et donne le moment de chacune par rapport à Δ : nul pour une force qui rencontre l'axe ou lui est parallèle, $-C\,\theta$ pour le couple de torsion.
3. **Applique la relation fondamentale de la dynamique en rotation** : $\sum \mathcal{M}_{\Delta} = J_{\Delta}\,\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.
4. **Pour un pendule pesant**, étudié à la section suivante, remplace $\sin\theta$ par θ, en radians, pour de petites oscillations.
5. **Identifie** l'équation à $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,\theta = 0$ pour en tirer T_0.

Méthode : Montage, protocole et exploitation du pendule de torsion

Montage. Le fil et la barre décrits plus haut ; deux masselottes de $50{,}0\ \mathrm{g}$ se fixent de part et d'autre de l'axe, à la distance d.

Protocole. Pour chaque position, tourne la barre d'environ $0{,}3\ \mathrm{rad}$, lâche-la et chronomètre dix oscillations.

d (cm)	$10\,T_0$ (s)
sans masselottes	$19{,}9$

d (cm)	$10\,T_0$ (s)
$5{,}0$	$20{,}8$
$10{,}0$	$23{,}5$
$15{,}0$	$27{,}4$

Exploitation. T_0 augmente quand on écarte les masselottes : J_Δ augmente. Pour $d = 10{,}0\,\text{cm}$, $J_\Delta = \dfrac{C\,T_0^2}{4\pi^2} = 3{,}50 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

À toi : La constante de torsion d'un autre fil

Un cylindre suspendu par son axe à un fil de torsion a le moment d'inertie $J_\Delta = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Il oscille avec la période propre $T_0 = 3{,}0\,\text{s}$. Calcule la constante de torsion C du fil. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La période propre du pendule de torsion relie T_0, J_Δ et C.
Indice 2
Élève au carré l'expression de T_0, puis isole C.
Indice 3
Point délicat : T_0 apparaît au carré au dénominateur ; garde deux chiffres significatifs.

Réponse

$$C = \frac{4\pi^2\,J_\Delta}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 1{,}2 \times 10^{-3}}{3{,}0^2}$$

Le fil a la constante de torsion $C = 5{,}3 \times 10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.

Pendule pesant, pendule simple et pendule simple synchrone

Une tige qui oscille autour d'un axe horizontal

Une tige rigide percée de trous peut tourner autour d'un axe horizontal Δ qui passe par l'un d'eux. Sa masse vaut $m = 0{,}300\,\text{kg}$; son centre d'inertie G est à la distance $d = 0{,}300\,\text{m}$ de l'axe. On l'écarte de 10° de la verticale et on la lâche : dix oscillations durent $13{,}9\,\text{s}$.

Devine : Le moment du poids d'un pendule écarté

La tige est écartée d'un angle $\theta > 0$ de la verticale, dans le sens positif. Quel est le signe du moment de son poids par rapport à Δ ?

A. Négatif : il ramène la tige vers la verticale.
Juste.

Juste : le moment du poids est de signe contraire à θ, comme celui du couple de torsion.

B. Positif : il fait tourner la tige dans le sens de θ.

Faux.

Le poids ramène G sous l'axe : il fait tourner la tige dans le sens où θ diminue.

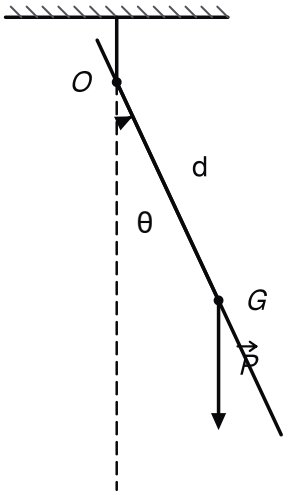
C. Nul : le poids est vertical.

Faux.

Le poids est vertical, mais l'axe est horizontal : il ne lui est pas parallèle et ne le rencontre pas.

Correction

Écartée de la verticale, la tige n'a plus G sous l'axe. Le poids tend à l'y ramener : son moment est de signe contraire à θ. C'est un moment de rappel.



Pendule pesant : axe Δ horizontal en O, centre d'inertie G à la distance d, tige écartée de θ de la verticale, poids P.

Établir l'équation des petites oscillations

Rappel : moment d'une force. Par rapport à un axe, le moment d'une force vaut, au signe près, sa valeur multipliée par son bras de levier.

Pourquoi est-ce vrai ? On suit la méthode du pendule de torsion. Le moment du poids contient $\sin\theta$; pour de petits angles, on le remplace par θ grâce à la tangente en 0 à la courbe du sinus.

Propriété : Pendule pesant et pendule simple : petites oscillations

Un **pendule pesant** est un solide de masse m, mobile autour d'un axe horizontal fixe Δ qui ne passe pas par son centre d'inertie G ; d est la distance de G à l'axe et J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à Δ. L'abscisse angulaire θ est l'angle orienté entre la verticale descendante et la

droite qui joint l'axe à G. Les frottements sont négligeables. Pour de **petites oscillations**, on fait l'approximation $\sin\theta \approx \theta$, avec θ en radians ; l'abscisse angulaire vérifie alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,d}{J_\Delta}\,\theta = 0.$$

La période propre vaut alors :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m\,g\,d}}.$$

Le **pendule simple** de longueur ℓ (objet de petites dimensions au bout d'un fil inextensible de masse négligeable) en est le cas $J_\Delta = m\,\ell^2$ et $d = \ell$: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$. Le **pendule simple synchrone** d'un pendule pesant a la même période propre ; sa longueur est $\ell = \dfrac{J_\Delta}{m\,d}$.

Démonstration

Étape 1. Système : le solide. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. L'axe Δ est fixe et horizontal ; θ est orienté et nul quand G est à la verticale de l'axe, au-dessous de lui.

Étape 2. Bilan des actions et de leurs moments par rapport à Δ : la réaction de l'axe passe par Δ, son moment est nul (aucun frottement) ; le poids $\vec{P}$, appliqué en G, a pour bras de levier $d\,|\sin\theta|$ et tend à ramener G sous l'axe : son moment est $-m\,g\,d\sin\theta$.

Étape 3. Relation fondamentale de la dynamique en rotation autour de l'axe fixe Δ :

$$-m\,g\,d\sin\theta = J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.$$

Étape 4. Pour de petites oscillations, $\sin\theta \approx \theta$ (θ en radians, tangente en 0 à la courbe du sinus). L'équation devient $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{m\,g\,d}{J_\Delta}\,\theta = 0$.

Étape 5. La même substitution que pour l'équation horaire et la période propre de l'oscillateur solide-ressort, avec $\dfrac{m\,g\,d}{J_\Delta}$ à la place de $\dfrac{K}{m}$, donne $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d}}$.

Étape 6. Pendule simple : toute la masse est à la distance ℓ de l'axe, donc $J_\Delta = m\,\ell^2$ et $d = \ell$. Il vient $\dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d} = \dfrac{\ell}{g}$, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$. Les deux pendules ont la même période propre si $\dfrac{\ell}{g} = \dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d}$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{J_\Delta}{m\,d}$.

Exemple : La période de la tige et sa longueur synchrone

Pour la tige, $J_\Delta = 4{,}30 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m\,g\,d}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{4{,}30\times10^{-2}}{0{,}300\times9{,}80\times0{,}300}}$$
$$= 1{,}39\,\mathrm{s}$$

C'est la durée mesurée. Le pendule simple synchrone a la longueur :

$$\ell = \frac{J_\Delta}{m\,d} = \frac{4{,}30\times10^{-2}}{0{,}300\times0{,}300}$$
$$= 0{,}478\,\mathrm{m}$$

Vérifie : L'approximation des petits angles

La preuve remplace $\sin\theta$ par θ. Sur quoi repose ce remplacement ?

A. Sur la mesure de θ en degrés, pour un petit angle.

Faux.
En degrés, la valeur de l'angle est bien plus grande que son sinus : l'approximation exige des radians.

B. Sur la tangente en 0 au sinus, de pente 1, avec θ en radians.

Juste.
Juste : c'est l'étape 4 de la preuve. Près de 0, la courbe se confond avec sa tangente.

C. Sur l'égalité $\sin\theta = \theta$, vraie pour tout angle.

Faux.
Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$ alors que $\theta \approx 1{,}57$: l'égalité est fausse en général.

D. Sur la mesure de la période, qui ne dépend pas de l'angle.

Faux.
C'est une conséquence du modèle pour les petits angles, pas sa justification.

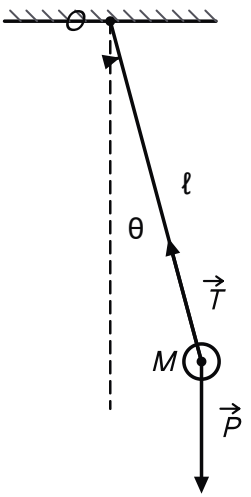
Correction
Étape 4 : la tangente en 0 à la courbe du sinus a pour équation $y = \theta$, avec θ en radians. Pour de petits angles, $\sin\theta \approx \theta$, et l'équation prend la forme de celle d'un oscillateur.

Attention : Des angles petits et en radians

✗ « Pour $\theta = 12°$, on remplace $\sin\theta$ par 12. »

✓ L'approximation s'écrit avec θ en radians : $12°$ valent $0{,}209\,\mathrm{rad}$ et $\sin 12° = 0{,}208$. L'écart relatif reste sous $1\,\%$. Pour une grande amplitude, la période du pendule pesant s'écarte de l'expression établie pour les petites oscillations.

Le pendule simple



Pendule simple à son écart extrême : fil de longueur ℓ, angle θ avec la verticale, poids et tension du fil.

Exemple : La bille au bout d'un fil

Une bille au bout d'un fil de longueur $\ell = 0{,}650\,\text{m}$ forme un pendule simple.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}650}{9{,}80}}$$
$$= 1{,}62\,\text{s}$$

La masse de la bille n'intervient pas : elle se simplifie dans $\dfrac{J_\Delta}{m\,g\,d} = \dfrac{\ell}{g}$.

Vérifie : Une bille plus lourde au bout du même fil

On remplace la bille par une bille trois fois plus lourde, de même taille, au bout du même fil. Que devient la période propre ?

A. Elle est divisée par $\sqrt{3}$.

Faux.
Ce serait le cas d'un solide-ressort dont on diviserait la masse par trois ; ici, la masse se simplifie.

B. Elle est multipliée par $\sqrt{3}$.

Faux.
Pour un pendule simple, la masse n'intervient pas dans T_0.

C. Elle ne change pas.

Juste.

Juste : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ ne contient pas la masse.

Correction

Pour le pendule simple, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$: seules la longueur et g comptent. La période reste $1{,}62\,\mathrm{s}$.

La période du pendule simple et sa longueur

Méthode : Montage, protocole et exploitation du pendule simple

Montage. Une bille d'acier pend au bout d'un fil fin dont on règle la longueur ℓ, mesurée jusqu'au centre de la bille.

Protocole. Pour chaque longueur, écarte la bille d'au plus 10°, lâche-la et chronomètre dix oscillations.

ℓ (m)	$10\,T_0$ (s)
$0{,}200$	$8{,}98$
$0{,}400$	$12{,}69$
$0{,}600$	$15{,}55$
$0{,}800$	$17{,}95$
$1{,}000$	$20{,}07$

Exploitation. Calcule $\dfrac{T_0^2}{\ell}$ pour chaque ligne : il reste voisin de $4{,}03\,\mathrm{s^2\cdot m^{-1}}$: T_0^2 est proportionnel à ℓ, comme le prévoit le modèle.

Exemple : La valeur de g tirée des mesures

Le modèle donne $\dfrac{T_0^2}{\ell} = \dfrac{4\pi^2}{g}$. Avec la valeur moyenne mesurée :

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2}{4{,}03} \\ &= 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

On retrouve l'intensité de la pesanteur à la précision des mesures.

À toi : Régler un pendule simple sur une période

Quelle longueur faut-il donner au fil d'un pendule simple pour que sa période propre soit $T_0 = 1{,}50\,\mathrm{s}$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

La période propre du pendule simple ne dépend que de ℓ et de g.

Indice 2

Élève $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ au carré, puis isole ℓ.

Indice 3

Point délicat : n'oublie pas le carré de T_0 ; le résultat a trois chiffres significatifs.

Réponse

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{g\,T_0^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{9{,}80 \times 1{,}50^2}{4\pi^2} \\ &= 0{,}559\,\text{m}\end{aligned}$$

Le fil doit mesurer $0{,}559\,\text{m}$ jusqu'au centre de la bille.

Système oscillant composé d'un solide en translation et d'un solide en rotation

Un solide suspendu, une poulie et un ressort

Un solide de masse $m = 0{,}200\,\text{kg}$ pend au bout d'un fil enroulé sur la gorge d'une poulie de rayon $r = 5{,}00\,\text{cm}$. La poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe Δ ; son moment d'inertie vaut $J_\Delta = 2{,}00 \times 10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Un second fil, enroulé sur la même gorge, part du haut de la poulie. Il la relie à un ressort horizontal de raideur $K = 35{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, fixé à une paroi.

Devine : La poulie change-t-elle la période ?

Le solide, tiré vers le bas puis lâché, oscille verticalement. Comparée au cas où le solide serait accroché au même ressort sans poulie, sa période propre est-elle plus grande, plus petite ou égale ?

A. Plus grande : la poulie, qui tourne aussi, alourdit le système.

Juste.

Juste : tout se passe comme si une masse s'ajoutait à celle du solide.

B. Égale : seuls m et K comptent.

Faux.

La poulie tourne avec le solide : son inertie compte aussi.

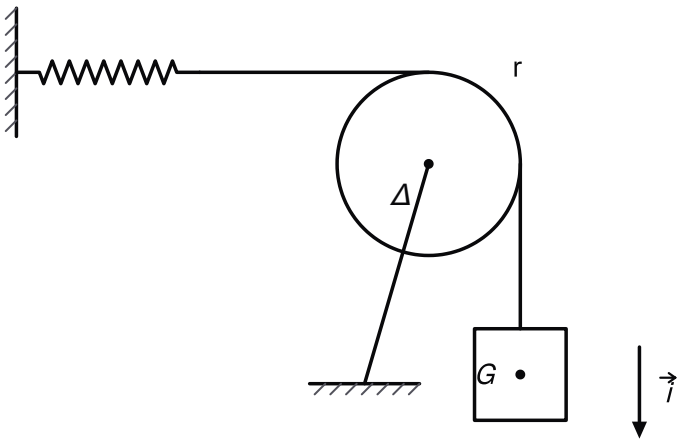
C. Plus petite : la poulie aide le solide à remonter.

Faux.

La poulie ne pousse rien : elle résiste au contraire aux changements de vitesse.

Correction

La poulie doit être mise en rotation à chaque oscillation : son inertie freine les changements de vitesse. La période propre est plus grande que celle du solide seul sous le même ressort.



Système composé : solide suspendu à un fil enroulé sur une poulie de rayon r, retenue par un ressort horizontal fixé à une paroi.

Méthode : Établir l'équation d'un système à deux solides

1. **Sépare** le système : le solide en translation, de masse m et d'abscisse x ; le solide en rotation, de moment d'inertie J_Δ et d'abscisse angulaire θ.
2. **Applique la deuxième loi de Newton** au premier et **la relation fondamentale de la dynamique en rotation** au second. Chacun subit la tension du fil qui les relie.
3. **Écris la liaison** : le fil est inextensible et ne glisse pas sur la poulie de rayon r, donc $x = r\,\theta$, les origines étant prises ensemble.
4. **Élimine** les tensions pour obtenir une seule équation en x, puis tire la période propre.

Les deux lois, solide par solide

Exemple : Le solide suspendu et la deuxième loi de Newton

Système : le solide. Référentiel terrestre supposé galiléen. Axe $(O;\vec{i})$ vertical, orienté vers le bas, d'origine la position d'équilibre de G. Forces : le poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}_1$ du fil. La deuxième loi de Newton, projetée sur l'axe, donne :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\,g - \|\vec{T}_1\|.$$

Exemple : La poulie et la relation fondamentale en rotation

Système : la poulie ; θ est orienté dans le sens où elle tourne quand le solide descend. Son poids et la réaction de l'axe passent par Δ : leurs moments sont nuls. Le fil du solide a le moment $\|\vec{T}_1\|\,r$; le fil du ressort, de tension $\vec{T}_2$, a le moment $-\|\vec{T}_2\|\,r$.

$$J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = r\left(\|\vec{T}_1\| - \|\vec{T}_2\|\right)$$

Le second fil a une masse négligeable : $\|\vec{T}_2\|$ est la valeur de la force du ressort, $K\,(\Delta\ell_0 + x)$.

Liaison, élimination et période propre

La liaison. Le fil est inextensible et ne glisse pas : quand le solide descend de x, la poulie tourne de $\theta = \dfrac{x}{r}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

L'équilibre. Pour $x = 0$, les accélérations sont nulles : $\|\vec{T}_1\| = m\,g$ et $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = K\,\Delta\ell_0$, donc $K\,\Delta\ell_0 = m\,g$.

Exemple : L'équation différentielle et la période du solide suspendu

On tire $\|\vec{T}_1\|$ de la première équation, puis on reporte dans la seconde, divisée par r :

$$\begin{aligned}\frac{J_\Delta}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= m\,g - m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ &\quad - K\,\Delta\ell_0 - K\,x\end{aligned}$$

Avec $K\,\Delta\ell_0 = m\,g$:

$$\left(m + \frac{J_\Delta}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + K\,x = 0.$$

Ici $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = \dfrac{2{,}00\times10^{-4}}{0{,}0500^2} = 0{,}0800\,\mathrm{kg}$.

$$\begin{aligned}T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m + J_\Delta/r^2}{K}}\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}200 + 0{,}0800}{35{,}0}}\\ &= 0{,}562\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

En clair. Pour le solide, la poulie se comporte comme une masse $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$ ajoutée à la sienne. Sans poulie, le même solide sous le même ressort aurait $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}200}{35{,}0}} = 0{,}475\,\mathrm{s}$.

Vérifie : L'origine de la liaison entre les deux solides

Quelle hypothèse permet d'écrire $x = r\,\theta$?

A. Le fil a une masse négligeable.
Faux.

Cette hypothèse rend égales les tensions aux deux bouts d'un fil, pas les déplacements.

B. L'axe de la poulie tourne sans frottement.

Faux.

Sans frottement, aucun moment ne s'ajoute ; cela ne relie pas x à θ.

C. Le fil est inextensible et ne glisse pas sur la gorge.

Juste.

Juste : la longueur de fil déroulée, $r\,\theta$, est exactement la descente du solide.

D. Le système est à l'équilibre.

Faux.

La liaison vaut à chaque instant, pendant tout le mouvement.

Correction

Le fil ne s'allonge pas et ne glisse pas : la longueur déroulée de la gorge, $r\,\theta$, est égale à la descente x du solide. Les origines sont prises ensemble, à l'équilibre.

À toi : Le même système avec une poulie plus légère

La poulie cède la place à une autre, de rayon $r = 5{,}00\,\mathrm{cm}$ elle aussi, mais de moment d'inertie $J_\Delta = 5{,}00 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Le solide et le ressort ne changent pas. Calcule la nouvelle période propre. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'équation garde sa forme ; seul le terme dû à la poulie change.

Indice 2

Calcule d'abord $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$, puis la période propre.

Indice 3

Point délicat : r s'écrit en mètres ; $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$ s'exprime en kilogrammes.

Réponse

$$\frac{J_\Delta}{r^2} = \frac{5{,}00 \times 10^{-5}}{0{,}0500^2}$$
$$= 0{,}0200\,\mathrm{kg}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}220}{35{,}0}}$$
$$= 0{,}498\,\mathrm{s}$$

La poulie plus légère rapproche la période de celle du solide seul, $0{,}475\,\mathrm{s}$.

Résonance mécanique : excitateur et résonateur

Un ressort secoué par un moteur

Une masse de $0{,}400\,\mathrm{kg}$ pend à un ressort vertical de raideur $K = 16{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Seul, cet oscillateur a la fréquence propre $N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}} = 1{,}01\,\mathrm{Hz}$. Le haut du ressort est maintenant accroché à un moteur à excentrique : il monte et descend à la fréquence N_e, que l'on règle.

Devine : La fréquence de la masse secouée

Le moteur tourne à $N_e = 0{,}50\,\mathrm{Hz}$. Une fois le mouvement régulier, à quelle fréquence la masse oscille-t-elle ?

A. À $1{,}01\,\mathrm{Hz}$, sa fréquence propre.
Faux.
Ce serait le cas d'oscillations libres ; ici, le moteur impose son rythme.

B. À $1{,}51\,\mathrm{Hz}$, la somme des deux.
Faux.
Les fréquences ne s'ajoutent pas : une seule fréquence s'impose.

C. Elle ne bouge pas : les fréquences sont différentes.
Faux.
La masse bouge, avec une amplitude modeste loin de la fréquence propre.

D. À $0{,}50\,\mathrm{Hz}$, la fréquence du moteur.
Juste.
Juste : le moteur impose sa fréquence à la masse, une fois le régime établi.

Correction
Après un court régime transitoire, la masse oscille à la fréquence du moteur, $0{,}50\,\mathrm{Hz}$. Le moteur est l'**excitateur**, l'oscillateur est le **résonateur** : ses oscillations sont **forcées**.

Méthode : Montage, protocole et exploitation de la courbe de résonance

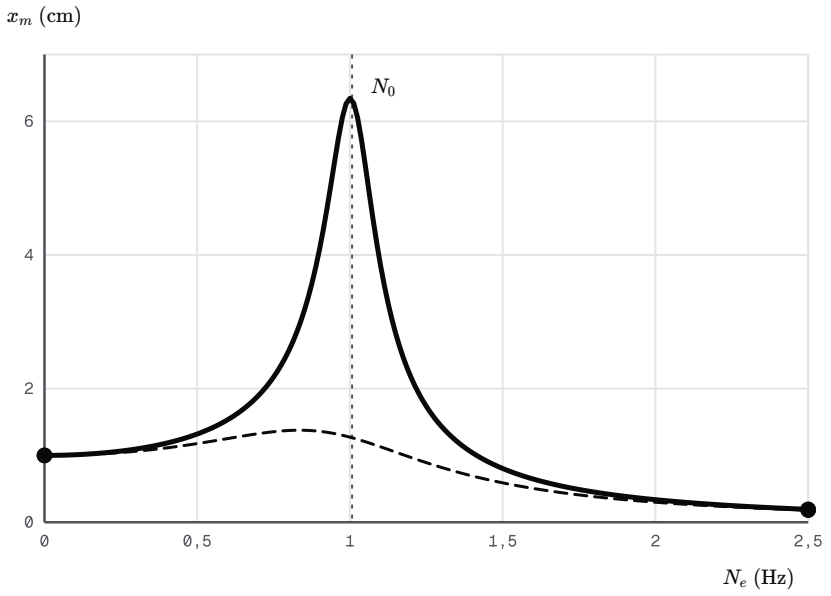
Montage. Le moteur, la masse et le ressort décrits plus haut ; une règle verticale derrière la masse.

Protocole. Pour chaque fréquence N_e, attends que l'amplitude ne change plus, puis relève l'amplitude x_m de la masse.

N_e (Hz)	x_m (cm)
$0{,}40$	$1{,}2$
$0{,}70$	$1{,}9$
$0{,}90$	$4{,}1$
$1{,}00$	$6{,}3$
$1{,}10$	$3{,}8$
$1{,}30$	$1{,}4$

N_e (Hz)	x_m (cm)
1,60	0,6

Exploitation. Trace x_m en fonction de N_e : l'amplitude passe par un maximum pour N_e voisine de N_0. Recommence avec une petite palette plongée dans l'huile sous la masse.



Modèles tracés par le moteur : amplitude des oscillations forcées en fonction de N_e, sans palette et avec une petite palette dans l'huile ; N_0 repérée.

Hauteur et largeur du pic de résonance

Définition : Résonance mécanique : excitateur, résonateur et conditions

Un oscillateur mécanique de fréquence propre N_0, le **résonateur**, est soumis par un autre système, l'**excitateur**, à une action périodique de fréquence N_e. Après un régime transitoire, le résonateur oscille à la fréquence N_e imposée par l'excitateur : ses oscillations sont **forcées**.

L'amplitude des oscillations forcées dépend de N_e. Elle passe par un maximum pour une fréquence voisine de N_0 : c'est la **résonance mécanique**.

- **Amortissement faible** : la résonance est **aiguë**, le maximum d'amplitude est élevé et obtenu pour $N_e \approx N_0$.
- **Amortissement important** : la résonance est **floue**, le maximum est moins élevé et moins marqué ; pour un amortissement très fort, il n'y a plus de résonance.

Exemple : Résonance aiguë et résonance floue

Sans palette, l'amortissement est faible : la courbe forme un pic étroit, d'environ $6{,}3\,\mathrm{cm}$, pour $N_e \approx 1{,}0\,\mathrm{Hz}$, voisine de $N_0 = 1{,}01\,\mathrm{Hz}$. La résonance est **aiguë**. Quand N_e tend vers zéro, la courbe part d'environ $1{,}0\,\mathrm{cm}$.

Avec la petite palette dans l'huile, la courbe ne forme qu'un pic bas et large. Son maximum, d'environ $1{,}4\,\mathrm{cm}$, se lit vers $0{,}8\,\mathrm{Hz}$, un peu sous N_0. La résonance est **floue**.

Attention : La fréquence des oscillations forcées

✗ « Le résonateur oscille à sa fréquence propre N_0, quelle que soit la fréquence du moteur. »

✓ En régime permanent, il oscille à la fréquence N_e de l'excitateur. La fréquence propre sert à prévoir où se trouve la résonance : $N_e \approx N_0$ quand l'amortissement est faible.

Résonance et sécurité des structures

Vérifie : Le réglage qui donne la plus grande amplitude

Dans quel cas l'amplitude des oscillations forcées est-elle la plus grande ?

A. $N_e = N_0$ et amortissement fort.
Faux.
Un amortissement fort aplatit la courbe : la résonance est floue.

B. $N_e = 3\,N_0$ et amortissement faible.
Faux.
Loin de N_0, l'amplitude reste faible, même peu amortie.

C. $N_e = N_0$ et amortissement faible.
Juste.
Juste : c'est la résonance aiguë, au sommet du pic.

D. $N_e = \dfrac{N_0}{3}$ et amortissement fort.
Faux.
Loin de N_0 et fortement amorti : l'amplitude reste proche de sa valeur à basse fréquence.

Correction
L'amplitude est la plus grande à la résonance, pour N_e voisine de N_0, et d'autant plus que l'amortissement est faible.

Résonance et sécurité. Une machine qui tourne, le vent ou des pas réguliers peuvent jouer le rôle d'excitateur pour un bâtiment ou un pont. Si leur fréquence est voisine d'une fréquence propre de la structure, l'amplitude peut devenir dangereuse. Les ingénieurs éloignent alors ces fréquences, ou ajoutent des **amortisseurs** à frottement fluide, qui rendent la résonance floue.

À toi : Prévoir la fréquence de résonance

Un résonateur peu amorti est formé d'une masse de $0{,}500\,\mathrm{kg}$ et d'un ressort de raideur $K = 45{,}0\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Pour quelle fréquence de l'excitateur observe-t-on la résonance ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour un amortissement faible, la résonance se produit près de la fréquence propre.
Indice 2
Calcule la période propre, puis son inverse.
Indice 3
Point délicat : la réponse est une fréquence en hertz, pas une période en secondes.

Réponse

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{45{,}0}{0{,}500}} \\ &= 1{,}51\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

La résonance est observée pour $N_e \approx 1{,}51\,\mathrm{Hz}$.

Et ensuite. Le chapitre suivant étudie ces oscillations du point de vue de l'énergie.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Systèmes mécaniques oscillants » (2bac · pc · physique-chimie)