BURHAN

Satellites artificiels et planètes

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/satellites-et-planetes/cours

Chapitre	Semestre
Satellites artificiels et planètes	Semestre 2

Choisir un référentiel : héliocentrique ou géocentrique

Le ciel vu depuis la Terre

Nuit après nuit, la planète Mars se déplace lentement parmi les étoiles. Tous les deux ans environ, pendant près de deux mois, elle semble pourtant reculer, puis elle reprend sa route. Vue depuis la Terre, sa trajectoire dessine une boucle.

Ce mouvement compliqué dépend de l'observateur. Avant d'étudier une planète ou un satellite, tu dois donc préciser par rapport à quoi tu décris son mouvement.

Devine : Le bon observateur pour Mars

Tu veux décrire le mouvement de Mars par une trajectoire simple, sans boucle. Par rapport à quel astre vaut-il mieux le décrire ?

A. Par rapport à la Terre, d'où on l'observe.

Faux.

Faux. Vue depuis la Terre, qui tourne elle-même autour du Soleil, Mars décrit des boucles : c'est le mouvement observé, pas le plus simple.

B. Par rapport au Soleil, autour duquel elle tourne.

Juste.

Oui. Par rapport au Soleil, Mars décrit une courbe fermée sans boucle. La boucle observée vient du mouvement de la Terre elle-même.

C. Par rapport à la Lune, l'astre le plus proche de nous.

Faux.

Faux. La Lune tourne autour de la Terre : par rapport à elle, le mouvement de Mars serait encore plus compliqué.

Indice 1

Demande-toi autour de quel astre Mars tourne.

Correction

Le mouvement d'une planète est le plus simple par rapport au Soleil : sa trajectoire est une courbe fermée. On décrit donc les planètes dans un référentiel lié au Soleil.

Deux référentiels liés au Soleil et à la Terre

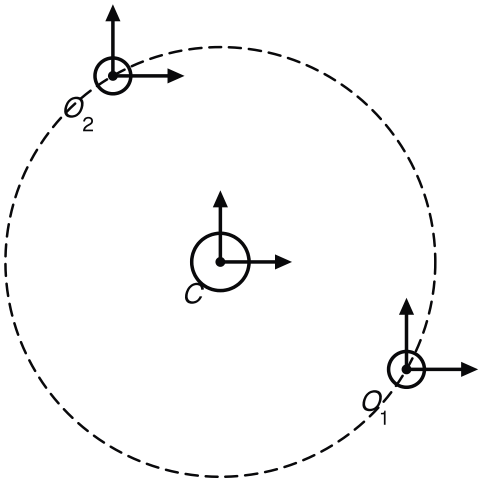
Une origine et trois axes. Un référentiel d'astronomie se repère par une origine et trois axes. Pour que les axes ne tournent pas, on les dirige vers des étoiles très lointaines. Leurs directions ne changent pratiquement pas pendant des siècles.

Définition : Référentiels héliocentrique et géocentrique

Le **référentiel héliocentrique** a pour origine le centre du Soleil et trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines, considérées comme fixes.

Le **référentiel géocentrique** a pour origine le centre de la Terre et trois axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique : il est en translation par rapport à lui et ne tourne pas avec la Terre.

On étudie le mouvement des planètes dans le référentiel héliocentrique, celui de la Lune et des satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique. Dans ce chapitre, ces deux référentiels sont supposés **galiléens** pendant les durées étudiées.



Référentiel géocentrique en deux positions de la Terre : ses axes restent parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Échelle non respectée.

Vérifie : Le référentiel géocentrique ne tourne pas

La Terre tourne sur elle-même en un jour environ. Que font les axes du référentiel géocentrique pendant cette journée ?

A. Ils tournent avec la Terre, un tour par jour.

Faux.

Faux. Ce serait un référentiel lié au sol. Les axes géocentriques restent dirigés vers les mêmes étoiles.

B. Ils restent pointés vers le Soleil en permanence.

Faux.

Faux. Des axes toujours tournés vers le Soleil feraient un tour en un an : le référentiel tournerait.

C. Ils gardent la même direction ; seule l'origine se déplace.

Juste.

Oui. Le centre de la Terre avance sur son orbite, mais les axes restent parallèles à eux-mêmes : c'est une translation.

Correction

Le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel héliocentrique. Son origine parcourt l'orbite de la Terre, et ses axes gardent des directions fixes. Sur la figure, les flèches en O_1 et en O_2 sont parallèles à celles en C.

Choisir le référentiel adapté

Exemple **: Trois mouvements, trois référentiels**

- La Terre autour du Soleil : référentiel héliocentrique.
- La Lune autour de la Terre : référentiel géocentrique.
- Un satellite de télécommunication : référentiel géocentrique.

La règle : on choisit le référentiel lié au centre de l'astre qui attire le corps étudié. Pour une lune de Jupiter, on construirait de même un référentiel lié au centre de Jupiter.

Supposé galiléen. Le référentiel géocentrique n'est pas exactement galiléen : son origine fait le tour du Soleil en un an. Pendant les quelques heures que dure un tour de satellite, ce mouvement est presque rectiligne et uniforme. On le suppose donc galiléen. De même, le référentiel héliocentrique est supposé galiléen pour l'étude des planètes.

À toi : Un référentiel pour chaque étude

Pour chaque étude, choisis le référentiel et justifie : (a) la comète de Halley autour du Soleil ; (b) la station spatiale autour de la Terre ; (c) une sonde en route vers Mars, loin de la Terre et de Mars. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Cherche l'astre dont l'attraction gouverne le mouvement.

Indice 2

Repère, pour chaque objet, le centre de la courbe qu'il parcourt.

Indice 3

Point délicat : pour la sonde, son point de départ ne suffit pas à choisir le référentiel.

Réponse

(a) Référentiel héliocentrique : la comète tourne autour du Soleil.

(b) Référentiel géocentrique : la station tourne autour de la Terre.

(c) Référentiel héliocentrique : loin des deux planètes, la sonde est surtout attirée par le Soleil.

Précision d'un résultat numérique

À retenir : Combien de chiffres garder dans un résultat

Rappel. Dans tout le chapitre, la donnée la moins précise fixe la précision du résultat : on garde son nombre de chiffres significatifs. Les valeurs intermédiaires ne sont jamais arrondies : la calculatrice garde la valeur complète jusqu'au bout.

Par exemple, G, M_T et R_T ont trois chiffres significatifs. Une durée tirée de ces trois données s'écrit donc avec trois chiffres : $4{,}82 \times 10^{5}\,\mathrm{s}$, et non $481\,754\,\mathrm{s}$.

Vérifie : Arrondir un affichage de calculatrice

Un calcul de vitesse, fait avec des données à trois chiffres significatifs, affiche $1\,525{,}684$ sur la calculatrice. Quelle écriture retenir ?

A. $1{,}53 \times 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Juste.

Oui. Trois chiffres significatifs, comme les données, en écriture scientifique.

B. $1\,525{,}684\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. Sept chiffres : la précision affichée dépasse de loin celle des données.

C. $1{,}5 \times 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. Deux chiffres seulement : on perd une partie de la précision des données.

Correction

Les données ont trois chiffres significatifs : le résultat aussi. On arrondit $1\,525{,}684$ à $1{,}53 \times 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Lois de Kepler : orbites, aires et périodes

Une distance Terre-Soleil qui varie

Les mesures astronomiques donnent la distance entre le centre de la Terre et celui du Soleil au fil des mois :

Date	Distance
début janvier	$1{,}471 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
début avril	$1{,}494 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
début juillet	$1{,}521 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
début octobre	$1{,}498 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

La distance varie d'environ 3 % entre janvier et juillet.

Devine : La forme de l'orbite terrestre

La distance au Soleil change au fil des mois. Que peux-tu en conclure sur la trajectoire de la Terre ?

A. C'est un cercle dont le Soleil occupe le centre.

Faux.

Faux. Sur un cercle centré sur le Soleil, la distance au Soleil resterait la même tout au long de l'orbite.

B. Ce n'est pas un cercle centré sur le Soleil.

Juste.

Oui. Une distance qui varie exclut un cercle centré sur le Soleil. La première loi de Kepler donne la forme exacte.

C. La Terre s'éloigne peu à peu du Soleil.

Faux.

Faux. La distance augmente jusqu'en juillet puis diminue en octobre : elle ne croît pas sans cesse.

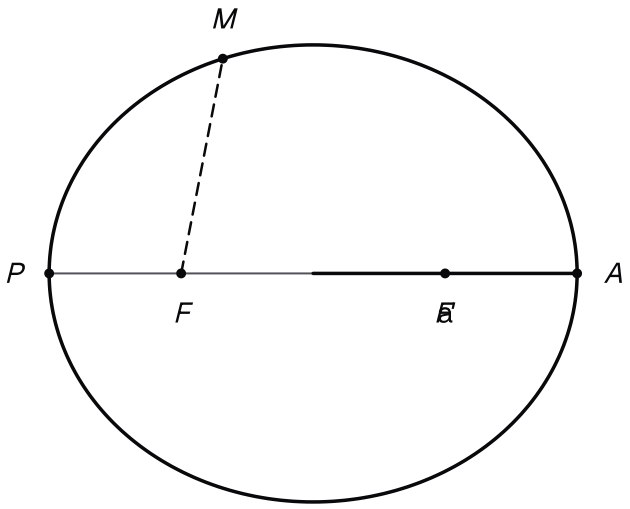
Correction

La distance est la plus petite en janvier, la plus grande en juillet, puis elle diminue de nouveau en octobre. La trajectoire n'est donc pas un cercle centré sur le Soleil.

L'ellipse, ses foyers et son demi-grand axe

Foyers et demi-grand axe. Une ellipse est l'ensemble des points M dont la somme des distances à deux points fixes F et F', ses **foyers**, est constante : $MF + MF' = 2a$.

Le plus long segment de l'ellipse passe par les deux foyers ; sa moitié a est le **demi-grand axe**. Quand le Soleil occupe le foyer F, le point de l'orbite le plus proche de lui est le **périhélie**, le plus éloigné l'**aphélie**.



Orbite elliptique d'une planète M : le Soleil occupe le foyer F ; P est le périhélie, A l'aphélie, a le demi-grand axe. Ellipse plus aplatie que les orbites réelles.

Propriété : Les trois lois de Kepler

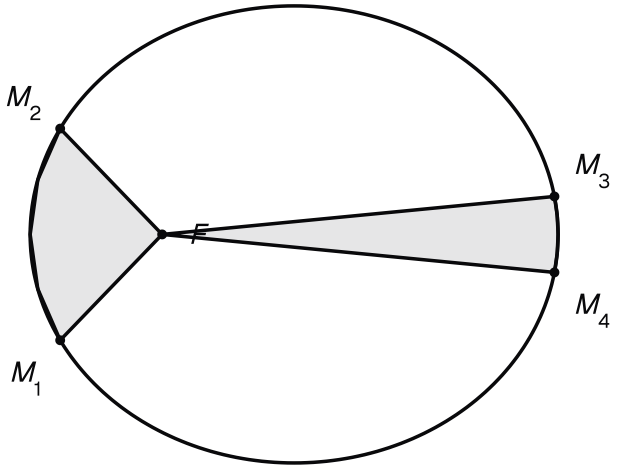
Dans le référentiel héliocentrique, le mouvement du centre de chaque planète obéit à trois lois.

1. **Loi des orbites.** La trajectoire est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des deux foyers.
2. **Loi des aires.** Le segment qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
3. **Loi des périodes.** Le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'ellipse : $\frac{T^2}{a^3} = k$, la constante k étant la même pour toutes les planètes du Système solaire.

Ces lois s'appliquent aussi aux satellites d'un même astre, avec une constante propre à cet astre. Un cercle est une ellipse dont les deux foyers sont confondus avec le centre : pour une orbite circulaire, a est le rayon r de l'orbite et la loi des aires impose un mouvement uniforme.

Des lois tirées de l'observation. Kepler a publié ces trois lois entre 1609 et 1619. Il les a tirées des positions de Mars relevées par Tycho Brahe. Ce sont des lois admises : Newton les a ensuite rattachées à la gravitation. Dans ce chapitre, tous les calculs portent sur des orbites circulaires.

Des aires égales en des durées égales



Loi des aires : en des durées égales, la planète balaie deux secteurs de même aire. Secteurs approchés par des polygones, ellipse plus aplatie que les orbites réelles.

Vérifie : Où la planète va-t-elle le plus vite ?

Sur la figure, les deux secteurs sont balayés pendant la même durée. Sur quel arc la planète va-t-elle le plus vite ?

A. Sur l'arc proche du périhélie, le plus long.

Juste.

Oui. Même aire, même durée : près du Soleil, le secteur est court et large, et l'arc parcouru est plus long. La planète y va plus vite.

B. Sur l'arc proche de l'aphélie, loin du Soleil.

Faux.

Faux. Près de l'aphélie, le secteur est long et étroit : l'arc parcouru pendant la même durée est plus court.

C. À la même vitesse sur les deux arcs, car les aires sont égales.

Faux.

Faux. Les aires sont égales, pas les longueurs des arcs. Près du Soleil, la même aire demande un arc plus long.

Correction

La loi des aires fixe l'aire balayée pendant une durée donnée. Près du périhélie, la distance FM est courte : pour balayer la même aire, la planète parcourt un arc plus long. Elle va donc plus vite au périhélie qu'à l'aphélie.

Attention : Le Soleil n'est pas au centre de l'ellipse

✗ « Le Soleil est au centre de l'orbite de la planète. »

✓ Le Soleil occupe un **foyer** de l'ellipse. La distance entre la planète et le Soleil varie donc : minimale au périhélie, maximale à l'aphélie. Le Soleil n'est au centre que d'une orbite circulaire, dont les deux foyers sont confondus.

Le cas d'une orbite circulaire

Le cas circulaire. Quand l'énoncé donne une orbite circulaire, les deux foyers sont confondus avec le centre. Le demi-grand axe a devient le rayon r de l'orbite. La distance au centre ne change pas : la loi des aires impose des arcs égaux en des durées égales, donc un **mouvement uniforme**. La loi des périodes s'écrit alors $\frac{T^2}{r^3} = k$.

Trouve l'erreur : Vitesse constante sur quelle orbite

Un élève affirme : « D'après la loi des aires, toute planète a une vitesse de valeur constante. » Où est l'erreur ?

A. La loi des aires ne dit rien de la vitesse.

Faux.

Faux. Elle parle d'aires, mais elle a une conséquence sur la vitesse : la planète va plus vite près du Soleil.

B. Il n'y a pas d'erreur : la vitesse est toujours constante.

Faux.

Faux. Près du périhélie, la planète va plus vite qu'à l'aphélie.

C. C'est vrai seulement pour une orbite circulaire.

Juste.

Oui. Sur une ellipse, la distance au Soleil change, et la vitesse aussi. Seule une orbite circulaire donne une vitesse constante.

Correction

La loi des aires impose des aires égales en des durées égales. Sur une orbite circulaire, cela donne des arcs égaux, donc une vitesse constante. Sur une ellipse, les arcs changent de longueur : la vitesse varie.

Exemple : Période de deux satellites d'un même astre

Deux satellites tournent sur des orbites circulaires autour du même astre, avec $r_2 = 4\,r_1$. La constante k est la même pour les deux :

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3},$$

donc

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = 64.$$

Ainsi $T_2 = 8\,T_1$: quatre fois plus loin, le satellite met huit fois plus de temps à faire un tour.

À toi : Du rapport des périodes au rapport des rayons

Deux lunes d'une même planète ont des orbites circulaires. La période de la seconde vaut 27 fois celle de la première : $T_2 = 27\,T_1$. Exprime r_2 en fonction de r_1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux lunes tournent autour du même astre : la constante de la loi des périodes leur est commune.
Indice 2
Écris $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$ en fonction de $\frac{T_2}{T_1}$.
Indice 3
Point délicat : pour revenir au rapport des rayons, il faut une racine cubique, pas une racine carrée.

Réponse
La loi des périodes donne

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 27^2 = 729$$

donc $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{729} = 9$. La seconde lune est neuf fois plus loin : $r_2 = 9\,r_1$.

Gravitation universelle : forces d'interaction entre deux corps

Deux astres qui s'attirent

Rappel. Au tronc commun, tu as vu la valeur de la force d'attraction entre deux corps de masses m_A et m_B, dont les centres sont distants de d :

$$F = G\,\frac{m_A\,m_B}{d^2}.$$

La Terre attire ainsi la Lune, dont la masse est environ 81 fois plus petite que celle de la Terre.

Devine : La Lune attire-t-elle la Terre ?

La Terre exerce une force sur la Lune. Que vaut la force exercée par la Lune sur la Terre ?

A. Elle est 81 fois plus petite, comme la masse de la Lune.
Faux.

Faux. La valeur $G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}$ contient les deux masses : elle est la même pour les deux corps.

B. Elle a la même valeur, dans le sens opposé.

Juste.

Oui. Les deux forces ont la même valeur et la même droite d'action, en sens opposés.

C. Elle est nulle : seule la Terre attire.

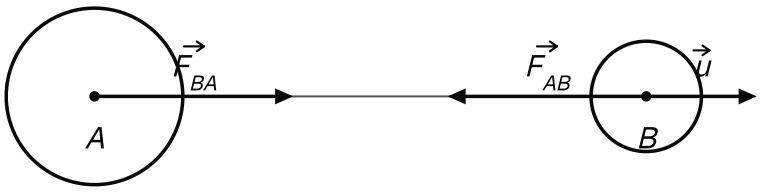
Faux.

Faux. Chaque corps attire l'autre : la Lune attire aussi la Terre, et provoque les marées.

Correction

L'interaction est réciproque. La force exercée par la Terre sur la Lune et celle exercée par la Lune sur la Terre ont la même valeur, car la formule contient le produit des deux masses. Leurs effets diffèrent : la Lune, bien moins massive, est beaucoup plus accélérée.

La force sous forme vectorielle



Interaction entre deux corps A et B : F_AB, exercée par A sur B, et F_BA, exercée par B sur A ; u est le vecteur unitaire de A vers B.

Propriété : Loi de gravitation universelle sous forme vectorielle

Deux corps ponctuels A et B, de masses m_A et m_B, séparés par la distance $d = AB$, exercent l'un sur l'autre des forces **attractives**, de même droite d'action (AB) et de sens opposés : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$, avec

$$\vec{F}_{A/B} = -G\,\frac{m_A\,m_B}{d^2}\,\vec{u}_{AB},$$

où $\vec{u}_{AB}$ est le vecteur unitaire dirigé de A vers B et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$ la constante de gravitation universelle. Les deux forces ont la même valeur $F = G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}$.

La loi s'applique aussi à deux corps à **répartition sphérique de masse** : d est alors la distance entre leurs centres.

Lire la formule. Le vecteur $\vec{u}_{AB}$ va de A vers B. Le signe moins donne à $\vec{F}_{A/B}$ le sens opposé, de B vers A : la force exercée par A attire B vers A. Cette loi, énoncée par Newton en 1687, est admise.

Vérifie : L'expression de la force exercée par B sur A

Avec les notations de la loi, quelle expression donne la force exercée par B sur A ?

A. $\vec{F}_{B/A} = G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}\,\vec{u}_{AB}$

Juste.

Oui. $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$: le signe moins disparaît. Cette force est dirigée de A vers B : B attire A.

B. $\vec{F}_{B/A} = -G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}\,\vec{u}_{AB}$

Faux.

Faux. C'est l'expression de $\vec{F}_{A/B}$, la force qui s'exerce sur B.

C. $\vec{F}_{B/A} = G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d}\,\vec{u}_{AB}$

Faux.

Faux. La valeur varie comme l'inverse du carré de la distance : d^2 au dénominateur.

Correction

D'après la loi, $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$. On change donc le signe : $\vec{F}_{B/A} = G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}\,\vec{u}_{AB}$. Cette force s'exerce sur A et pointe vers B.

Des astres à répartition sphérique de masse

Corps à répartition sphérique de masse. Une planète n'est pas un point. Sa masse est cependant répartie en couches sphériques autour de son centre. À l'extérieur, un tel corps attire comme un point de même masse placé en son centre. La distance d se mesure alors entre les centres.

Méthode : Calculer et représenter une attraction entre deux astres

1. **Repère les deux corps**, leurs masses et la distance d entre leurs centres ; pour un satellite, $d = R_T + h$.
2. **Convertis** les distances en mètres et les masses en kilogrammes.
3. **Représente** chaque force au centre du corps qui la subit, dirigée vers le centre de l'autre corps, avec la même longueur pour les deux.
4. **Calcule** $F = G\,\dfrac{m_A\,m_B}{d^2}$ et donne le résultat en newtons, avec les chiffres significatifs des données.

Exemple : L'attraction entre la Terre et la Lune

Données : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$; masse de la Lune $m_L = 7{,}35 \times 10^{22}\,\text{kg}$; distance des centres $d = 3{,}84 \times 10^{8}\,\text{m}$.

$$\begin{aligned} F &= G\,\frac{M_T\,m_L}{d^2} \\ &= 6{,}67 \times 10^{-11} \\ &\quad \times \frac{5{,}97 \times 10^{24}}{(3{,}84 \times 10^{8})^2} \\ &\quad \times 7{,}35 \times 10^{22} \\ &= 1{,}98 \times 10^{20}\,\text{N} \end{aligned}$$

Les deux forces, l'une sur la Terre, l'autre sur la Lune, ont cette valeur.

Ordres de grandeur et distance à prendre

Exemple : Deux élèves assis côte à côte

Deux élèves de $65\,\text{kg}$ chacun sont assis à $1{,}0\,\text{m}$ l'un de l'autre. On les assimile, grossièrement, à des corps à répartition sphérique de masse :

$$\begin{aligned} F &= G\,\frac{m^2}{d^2} \\ &= 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{65^2}{1{,}0^2} \\ &= 2{,}8 \times 10^{-7}\,\text{N} \end{aligned}$$

C'est à peu près le poids d'un minuscule grain de sable. L'attraction ne devient sensible que si l'une des masses est celle d'un astre.

Attention : Altitude ou distance au centre de la Terre

✗ « Pour la station spatiale à $400\,\text{km}$ d'altitude, je prends $d = 4{,}00 \times 10^{5}\,\text{m}$. »

✓ La distance se mesure entre les **centres** : $d = R_T + h = 6{,}77 \times 10^{6}\,\text{m}$. Pour la station, de masse $4{,}2 \times 10^{5}\,\text{kg}$, on trouve $F = 3{,}6 \times 10^{6}\,\text{N}$. Avec l'altitude seule, on trouverait $F = 1{,}0 \times 10^{9}\,\text{N}$: environ 286 fois trop.

À toi : L'attraction de la Terre sur un satellite de 852 kg

Un satellite de masse $m = 852\,\text{kg}$ est à l'altitude $h = 630\,\text{km}$. Calcule la valeur de la force exercée par la Terre sur lui. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La Terre est un corps à répartition sphérique de masse : la loi de gravitation s'applique avec la distance des centres.
Indice 2

Calcule d'abord $d = R_T + h$ en mètres ; le produit $G\,M_T$ vaut $3{,}98199 \times 10^{14}$ en unités SI.

Indice 3

Point délicat : $630\,\text{km} = 6{,}30 \times 10^{5}\,\text{m}$, à ajouter à $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\,\text{m}$.

Réponse

Distance des centres : $d = 7{,}00 \times 10^{6}\,\text{m}$.

$$\begin{aligned} F &= \frac{G\,M_T\,m}{d^2} \\ &= \frac{3{,}98199 \times 10^{14}}{(7{,}00 \times 10^{6})^2} \\ &\quad \times 852 \\ &= 6{,}92 \times 10^{3}\,\text{N} \end{aligned}$$

La Terre attire ce satellite avec une force d'environ $6{,}92 \times 10^{3}\,\text{N}$.

Et le poids ? Au sol, le poids de ce satellite vaudrait $P = m\,g = 852 \times 9{,}80 \approx 8{,}35 \times 10^{3}\,\text{N}$. En orbite, l'attraction de la Terre est plus faible, mais loin d'être nulle. La section suivante relie ces deux forces.

Intensité de la pesanteur en altitude

Le poids à bord de la station spatiale

Rappel. Le poids d'un corps de masse m s'écrit $\vec{P} = m\,\vec{g}$. Au sol, sa valeur est pratiquement celle de l'attraction exercée par la Terre. À bord de la station spatiale, à $400\,\text{km}$ d'altitude, les astronautes flottent pourtant dans leur cabine.

Devine : La pesanteur à 400 km d'altitude

À $400\,\text{km}$ d'altitude, l'intensité de la pesanteur vaut, par rapport à sa valeur au sol :

A. presque zéro, puisque les astronautes flottent ;

Faux.

Faux. Les astronautes flottent parce que la station et eux tombent ensemble autour de la Terre, pas parce que la pesanteur disparaît.

B. encore près de 90 % de sa valeur au sol ;

Juste.

Oui. $400\,\text{km}$ est petit devant le rayon de la Terre : la distance au centre n'augmente que de 6 %.

C. environ la moitié de sa valeur au sol.

Faux.

Faux. Pour diviser g par deux, il faut multiplier la distance au centre par $1{,}4$ environ, bien au-delà de $400\,\text{km}$.

Correction

À $400\,\mathrm{km}$, $g = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} \approx 8{,}69\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit 89 % de sa valeur au sol. Les astronautes flottent car tout, dans la station, tombe avec la même accélération.

L'intensité de la pesanteur à l'altitude h

D'où vient l'expression de $g(h)$? Sous une hypothèse que la preuve précise, le poids d'un corps et l'attraction de la Terre sont une seule et même force. Il suffit donc d'écrire cette attraction avec la distance des centres $R_T + h$, puis d'identifier les deux expressions.

Propriété : Intensité de la pesanteur en fonction de l'altitude

On assimile la Terre à un corps à répartition sphérique de masse M_T et de rayon R_T, et l'on néglige les effets de sa rotation. À l'altitude h, l'intensité de la pesanteur vaut

$$g(h) = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}.$$

Au sol, $g_0 = \dfrac{G\,M_T}{R_T^2}$, d'où

$$g(h) = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}.$$

L'intensité de la pesanteur diminue quand l'altitude augmente.

Démonstration

Étape 1. Système et référentiel : le système est un corps de masse m, de centre d'inertie situé à l'altitude h ; il est étudié dans le référentiel géocentrique.

Étape 2. Poids et force de gravitation : les effets de la rotation de la Terre étant négligés, le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ du corps est la force de gravitation que la Terre exerce sur lui.

Étape 3. Valeur de la force : la Terre est à répartition sphérique de masse : la loi de gravitation universelle s'applique avec la distance des centres $d = R_T + h$, soit $F = \dfrac{G\,M_T\,m}{(R_T+h)^2}$.

Étape 4. Identification : de $m\,g(h) = \dfrac{G\,M_T\,m}{(R_T+h)^2}$, on tire $g(h) = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$; pour $h = 0$, on obtient $g_0 = \dfrac{G\,M_T}{R_T^2}$.

Étape 5. Conclusion : en divisant membre à membre, $g(h) = g_0\,\dfrac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$, qui décroît quand h augmente.

À retenir : Ce qui permet d'identifier poids et attraction

Toute la preuve tient en une égalité : la même force s'écrit $m\,g(h)$ et $\dfrac{G\,M_T\,m}{(R_T+h)^2}$. La masse m du corps se simplifie : $g(h)$ ne dépend que de la Terre et de l'altitude.

Vérifie : L'hypothèse qui rend le poids égal à l'attraction

Dans la preuve, quelle hypothèse permet d'écrire que le poids est la force de gravitation exercée par la Terre ?

A. La Terre est à répartition sphérique de masse.

Faux.

Faux. Cette hypothèse sert à l'étape 3 : elle donne la distance des centres R_T+h, pas l'égalité du poids et de l'attraction.

B. L'altitude h est petite devant R_T.

Faux.

Faux. La relation vaut à toute altitude : la preuve ne fait aucune hypothèse sur la taille de h.

C. On néglige les effets de la rotation de la Terre.

Juste.

Oui. C'est l'étape 2 de la preuve. Avec la rotation, le poids diffère un peu de l'attraction, surtout à l'équateur.

Correction

L'étape 2 identifie le poids $\vec{P}=m\,\vec{g}$ à la force de gravitation, parce que la rotation de la Terre est négligée. L'étape 3 emploie la répartition sphérique de masse, pour prendre la distance des centres.

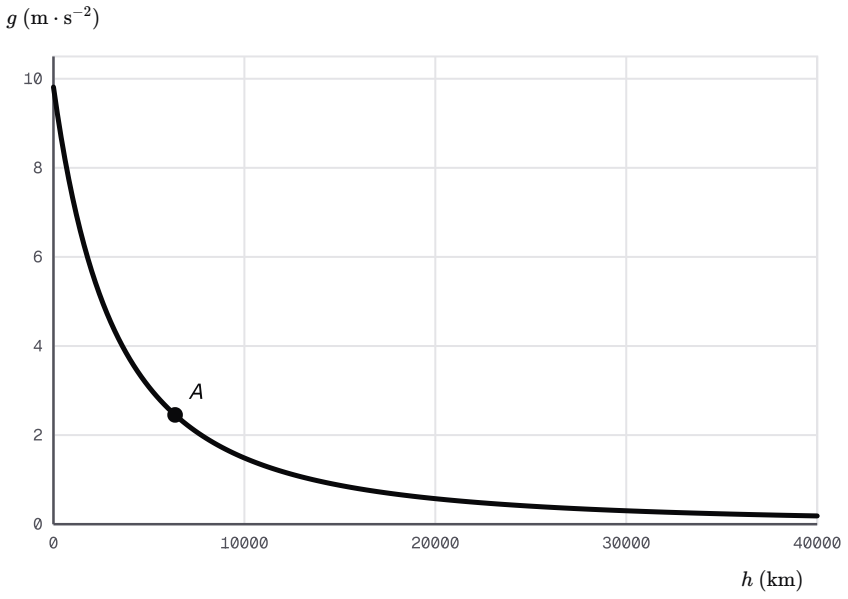
Exemple : La pesanteur au sol tirée de la loi

Avec les constantes de la Terre :

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{G\,M_T}{R_T^2} \\ &= \frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}{(6{,}37\times10^{6})^2} \\ &= 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

La valeur retenue, $g=9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, est très proche : l'écart vient de la précision des données et, en partie, de la rotation de la Terre, négligée ici. On retient aussi $G\,M_T=g_0\,R_T^2$. Le produit $G\,M_T$ vaut exactement $3{,}98199\times10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$ avec ces données : on le garde ainsi, sans l'arrondir.

La décroissance de g avec l'altitude



Intensité de la pesanteur g en fonction de l'altitude h, calculée par la loi avec les constantes de la Terre.

Exemple : À une altitude égale au rayon terrestre

Pour $h = R_T$, la distance au centre double : $R_T + h = 2\,R_T$.

$$g(R_T) = g_0\,\frac{R_T^2}{(2\,R_T)^2} = \frac{g_0}{4}$$

Numériquement, $g(R_T) = 2{,}45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$: c'est le point A de la courbe. Doubler la distance au centre divise g par quatre.

À toi : La pesanteur à 1 000 km d'altitude

Calcule l'intensité de la pesanteur à l'altitude $h = 1\,000\ \mathrm{km}$, puis compare-la à g_0. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise l'expression de $g(h)$ avec G et M_T.
Indice 2
La distance au centre vaut $R_T + h$, en mètres.
Indice 3
Point délicat : $1\,000\ \mathrm{km} = 1{,}00 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$; garde toutes les décimales jusqu'au résultat.

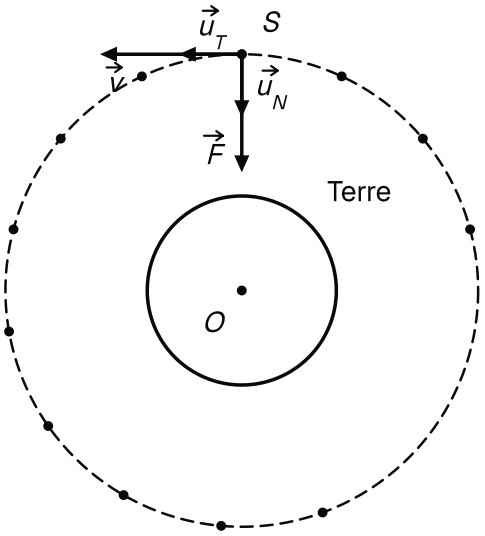
Réponse
Ici $R_T + h = 7{,}37 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$.

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2} \\
&= \frac{3{,}98199 \times 10^{14}}{(7{,}37 \times 10^{6})^2} \\
&= 7{,}33\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}
\end{aligned}
$$

C'est 75 % de g_0 : à $1\,000\,\mathrm{km}$ d'altitude, g a perdu un quart de sa valeur au sol.

Force centripète et mouvement circulaire uniforme d'un satellite

Positions d'un satellite à intervalles égaux



Satellite S en orbite circulaire, positions à intervalles de temps égaux ; base de Frenet, vitesse v et force F au point S. Échelle non respectée.

Devine : Ce que montrent des arcs égaux

Sur la figure, les positions du satellite sont relevées à intervalles de temps égaux. Que peux-tu dire de la valeur de la vitesse ?

A. Elle reste la même tout au long de l'orbite.

Juste.

Oui. Des distances égales parcourues pendant des durées égales : la valeur de la vitesse ne change pas. Le mouvement est circulaire uniforme.

B. Elle augmente, car la Terre attire le satellite.

Faux.

Faux. Sur un cercle, l'attraction reste perpendiculaire au mouvement : elle tourne le vecteur vitesse, mais sa valeur ne bouge pas.

C. Elle est nulle en moyenne, car le satellite revient au départ.

Faux.
Faux. C'est le déplacement sur un tour qui est nul, pas la vitesse : le satellite parcourt sans cesse son orbite.

Correction
Des arcs égaux en des durées égales traduisent une vitesse de valeur constante. L'attraction de la Terre change seulement la direction du vecteur vitesse.

Force centripète. Sur la figure, la force $\vec{F}$ exercée par la Terre est dirigée du satellite vers le centre de la Terre, qui est aussi le centre de l'orbite. Une force toujours dirigée vers le centre d'une trajectoire circulaire est dite **centripète**.

Nature du mouvement par la deuxième loi de Newton

Pourquoi le mouvement est-il uniforme ? Rappel du chapitre Lois de Newton : dans la base de Frenet $(S;\vec{u}_T,\vec{u}_N)$, sur un cercle de rayon r, l'accélération a pour coordonnées $a_T=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $a_N=\dfrac{v^2}{r}$. La deuxième loi de Newton relie cette accélération à la seule force qui agit.

Propriété : Mouvement circulaire uniforme d'un satellite ou d'une planète

Un satellite de masse m décrit, dans le référentiel géocentrique, une orbite **circulaire** de centre O, centre de la Terre, et de rayon $r=R_T+h$. La Terre, de masse M_T, est à répartition sphérique de masse. Il n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre.

Alors cette force est **centripète**, le mouvement du satellite est **circulaire uniforme** et sa vitesse vaut

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}.$$

Cette vitesse ne dépend pas de la masse du satellite. Le même résultat vaut pour une planète en orbite circulaire autour du Soleil, de masse M_S, dans le référentiel héliocentrique.

Démonstration

Étape 1. Système et référentiel : le système est le satellite, de centre d'inertie S ; le référentiel géocentrique est supposé galiléen.

Étape 2. Bilan des forces : le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la Terre. Elle est dirigée de S vers le centre O de la Terre et vaut $F=\dfrac{G\,M_T\,m}{r^2}$. La trajectoire étant un cercle de centre O, le vecteur unitaire normal $\vec{u}_N$ de la base de Frenet pointe vers O : $\vec{F}=\dfrac{G\,M_T\,m}{r^2}\,\vec{u}_N$. La force est centripète.

Étape 3. Deuxième loi de Newton : dans le référentiel galiléen, $m\,\vec{a}=\vec{F}$, donc $\vec{a}=\dfrac{G\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_N$: l'accélération est centripète, elle aussi.

Étape 4. Projection sur la tangente : dans la base de Frenet, $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Ici $a_T = 0$: la vitesse est constante et le mouvement circulaire est uniforme.

Étape 5. Projection sur la normale : $a_N = \dfrac{v^2}{r}$. Ici $a_N = \dfrac{G\,M_T}{r^2}$, d'où $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{r}$.

Étape 6. Conclusion : $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$: la masse m du satellite s'est simplifiée.

À retenir : Les deux projections qui donnent le mouvement

Tout vient de la direction de la force : elle est portée par $\vec{u}_N$. Sa composante normale fixe la vitesse : $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}$. La masse m du satellite se simplifie dès l'étape 3, dans $m\,\vec{a} = \vec{F}$.

Vérifie : L'étape qui rend le mouvement uniforme

Dans la preuve, quelle étape montre que le mouvement est uniforme ?

A. La projection sur $\vec{u}_N$, qui donne $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{r}$.

Faux.

Faux. L'étape 5 donne la valeur de la vitesse ; c'est l'étape 4 qui montre qu'elle ne varie pas.

B. La projection sur $\vec{u}_T$, qui donne $a_T = 0$.

Juste.

Oui. C'est l'étape 4 : $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc v ne varie pas.

C. Le bilan des forces, qui ne compte qu'une force.

Faux.

Faux. Le bilan ne suffit pas : il faut la deuxième loi, puis la projection sur la tangente.

Correction

À l'étape 4, la force étant portée par $\vec{u}_N$, l'accélération n'a pas de coordonnée tangentielle : $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. La valeur de la vitesse est constante : le mouvement circulaire est uniforme.

Exemple : Vitesse d'un satellite à 800 km d'altitude

Un satellite décrit une orbite circulaire à l'altitude $h = 800\,\mathrm{km}$. Le rayon de son orbite vaut $r = R_T + h = 7{,}17 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{3{,}98199 \times 10^{14}}{7{,}17 \times 10^{6}}} \\ &= 7{,}45 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Le satellite parcourt environ $7{,}5\,\mathrm{km}$ par seconde.

Rédiger l'étude du mouvement

Méthode : Les quatre temps de l'étude d'un satellite

1. **Système et référentiel** : le satellite, de centre d'inertie S, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.
2. **Bilan des forces** : la seule force est l'attraction de l'astre central, dirigée vers son centre.
3. **Deuxième loi de Newton** : écris $m\,\vec{a} = \vec{F}$, puis projette dans la base de Frenet.
4. **Conclusion** : $a_T = 0$ donne un mouvement uniforme ; $a_N = \dfrac{v^2}{r}$ donne la vitesse.

Le cas d'une planète. Le raisonnement est le même pour une planète en orbite circulaire autour du Soleil. On change seulement de référentiel, héliocentrique, et d'astre central, de masse M_S.

Exemple : Vitesse de la Terre sur son orbite

Système : la Terre, de centre d'inertie O. **Référentiel** : héliocentrique, supposé galiléen. **Force** : l'attraction du Soleil, centripète. On modélise l'orbite par un cercle de rayon $r = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. La masse du Soleil vaut $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, d'où $G\,M_S = 1{,}32733 \times 10^{20}$ en unités SI. La deuxième loi donne, comme pour un satellite :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{1{,}32733 \times 10^{20}}{1{,}496 \times 10^{11}}} \\ &= 2{,}98 \times 10^{4}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Vitesse et masse du satellite

Trouve l'erreur : Deux satellites sur la même orbite

Deux satellites, de $500\,\mathrm{kg}$ et de $5\,000\,\mathrm{kg}$, sont sur la même orbite circulaire. Un élève affirme : « Le plus lourd va moins vite. » Que vaut son raisonnement ?

A. Il est juste : plus de masse, plus d'inertie.

Faux.
Faux. Plus de masse, c'est plus d'inertie, mais aussi une attraction plus forte, dans la même proportion : les deux effets se compensent.

B. Il est faux : le plus lourd va plus vite.

Faux.

Faux. L'attraction est plus forte sur le plus lourd, mais son inertie aussi : sa vitesse est la même.

C. Il est faux : les deux ont la même vitesse.

Juste.

Oui. Dans $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$, seule la masse de la Terre intervient ; celle du satellite s'est simplifiée.

Correction

La deuxième loi s'écrit $m\,\vec{a} = \vec{F}$, et F est proportionnelle à m : l'accélération, donc la vitesse, ne dépend pas de m. Les deux satellites ont la même vitesse et la même période.

Attention : La masse qui compte dans la vitesse orbitale

✗ « Dans $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$, M_T est la masse du satellite. »

✓ M_T est la masse de la Terre, l'astre central. Autour du Soleil, on la remplace par M_S. La masse du satellite n'apparaît pas : elle s'est simplifiée dans la deuxième loi.

À toi : Vitesse d'un satellite à 2 500 km

Un satellite est en orbite circulaire à l'altitude $h = 2\,500\,\text{km}$. Établis l'expression de sa vitesse par la deuxième loi de Newton, puis calcule-la. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Suis les quatre temps : système et référentiel, bilan des forces, deuxième loi, conclusion.

Indice 2

Projette la deuxième loi sur $\vec{u}_N$, avec $a_N = \dfrac{v^2}{r}$.

Indice 3

Point délicat : le rayon de l'orbite est $r = R_T + h$, et non h.

Réponse

Système : le satellite. Référentiel : géocentrique, supposé galiléen. Seule force : l'attraction de la Terre, centripète. Projetée sur $\vec{u}_N$, la deuxième loi donne $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}$, d'où $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$. Avec $r = 8{,}87 \times 10^6\,\text{m}$:

$$v = \sqrt{\frac{3{,}98199 \times 10^{14}}{8{,}87 \times 10^6}} = 6{,}70 \times 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Période de révolution et troisième loi de Kepler

Périodes de satellites artificiels

Voici l'altitude h, le rayon d'orbite r et la période T de cinq satellites artificiels de la Terre, en orbite circulaire :

h (km)	r (10^6 m)	T (10^3 s)
650	$7{,}02$	$5{,}86$
$1\,400$	$7{,}77$	$6{,}82$
$5\,000$	$11{,}4$	$12{,}1$
$9\,000$	$15{,}4$	$19{,}0$
$14\,000$	$20{,}4$	$29{,}0$

Vérifie : Comment la période grandit avec le rayon

Du premier au dernier satellite du tableau, le rayon de l'orbite est multiplié par 3 environ. Par combien la période est-elle multipliée ?

A. Par 3 environ, comme le rayon.

Faux.

Faux. Le tableau donne $\dfrac{29{,}0}{5{,}86} \approx 5$: la période grandit plus vite que le rayon.

B. Par 5 environ : plus vite que le rayon.

Juste.

Oui. Le satellite lointain a un plus long chemin à parcourir, et il va moins vite : sa période grandit plus que son rayon.

C. Par moins de 3, car il est moins attiré.

Faux.

Faux. Moins attiré, il va moins vite, sur un chemin plus long : sa période augmente plus que son rayon.

Correction

Le rapport des périodes vaut $\dfrac{29{,}0}{5{,}86} \approx 4{,}9$, pour un rapport des rayons $\dfrac{20{,}4}{7{,}02} \approx 2{,}9$. La période augmente plus vite que le rayon : la troisième loi de Kepler dit comment.

La troisième loi établie pour une orbite circulaire

D'où vient la loi des périodes ? En une période, le satellite fait un tour : il parcourt la circonférence $2\pi r$ à vitesse constante. On connaît déjà sa vitesse, $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$. Il reste à combiner ces deux résultats.

Propriété : Période de révolution et troisième loi de Kepler en trajectoire circulaire

Un satellite en mouvement circulaire uniforme de rayon r autour de la Terre, de masse M_T, a pour période de révolution, durée d'un tour complet :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_T}}.$$

Le rapport

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$$

ne dépend que de la masse de l'astre central : c'est la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le graphe de T^2 en fonction de r^3 est une droite qui passe par l'origine, de coefficient directeur $\frac{4\pi^2}{G\,M_T}$. Pour les planètes, on remplace M_T par la masse M_S du Soleil.

Démonstration

Étape 1. Durée d'un tour : le mouvement est circulaire uniforme : en une période T, le satellite parcourt la circonférence $2\pi r$ à la vitesse constante v, donc $T = \frac{2\pi r}{v}$.

Étape 2. Vitesse du satellite : d'après le mouvement circulaire uniforme d'un satellite, $v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$.

Étape 3. Expression de la période : en reportant, $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{G\,M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_T}}$.

Étape 4. Troisième loi : en élevant au carré, $T^2 = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,M_T}$, donc $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$, rapport indépendant du satellite.

À retenir : Le calcul qui conduit à la troisième loi

Deux ingrédients suffisent : la durée d'un tour à vitesse constante, $T = \frac{2\pi r}{v}$, et la vitesse du satellite. En les combinant, on obtient une relation entre T et r. Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ ne contient plus que la masse de l'astre central.

Vérifie : Pourquoi le rayon apparaît au cube

Dans la preuve, d'où vient la puissance 3 de r dans $T^2 = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,M_T}$?

A. De $(2\pi r)^2$, qui apporte r^2, et de $\frac{1}{v^2} = \frac{r}{G\,M_T}$.

Juste.

Oui. Aux étapes 3 et 4 : $(2\pi r)^2$ apporte r^2, et $\frac{1}{v^2}$ apporte un facteur r de plus.

B. D'une observation : Kepler l'a lue dans des tables.

Faux.

Faux. Kepler l'a constaté pour les planètes, mais ici on l'établit : la puissance 3 sort du calcul de T à partir de v.

C. Du volume de la Terre, proportionnel au cube de son rayon.

Faux.

Faux. r est le rayon de l'orbite, pas celui de la Terre ; le volume de la Terre n'intervient pas.

Correction

Étape 1 : $T = \dfrac{2\pi r}{v}$, donc $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{v^2}$. Étape 2 : $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{r}$. En reportant, $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,M_T}$: un r^2 et un r donnent r^3.

Exemple : Période du satellite à 800 km

Reprends le satellite à l'altitude $h = 800\,\text{km}$, de rayon d'orbite $r = 7{,}17 \times 10^6\,\text{m}$.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_T}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}17\times10^6)^3}{3{,}98199\times10^{14}}} \\ &= 6{,}05\times10^3\,\text{s} \end{aligned}$$

Soit environ $1\,\text{h}\ 41\,\text{min}$: le satellite fait un peu plus de 14 tours de la Terre par jour.

Calculer une période

Méthode : Vitesse puis période d'un satellite, étape par étape

1. **Rayon** : calcule $r = R_T + h$, en mètres.
2. **Vitesse** : calcule $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
3. **Période** : calcule $T = \dfrac{2\pi r}{v}$, en secondes ; convertis en heures si on te le demande.
4. **Contrôle** : un satellite de la Terre va à quelques kilomètres par seconde et fait un tour en une heure et demie environ, ou plus.

À toi : Période d'un satellite à 3 000 km

Un satellite est en orbite circulaire à l'altitude $h = 3\,000\,\text{km}$. Calcule sa période en secondes, puis en heures et minutes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise l'expression de la période en fonction du rayon de l'orbite.

Indice 2

Commence par $r = R_T + h$, en mètres.

Indice 3

Point délicat : r est au cube sous la racine ; garde la valeur complète de T avant de convertir.

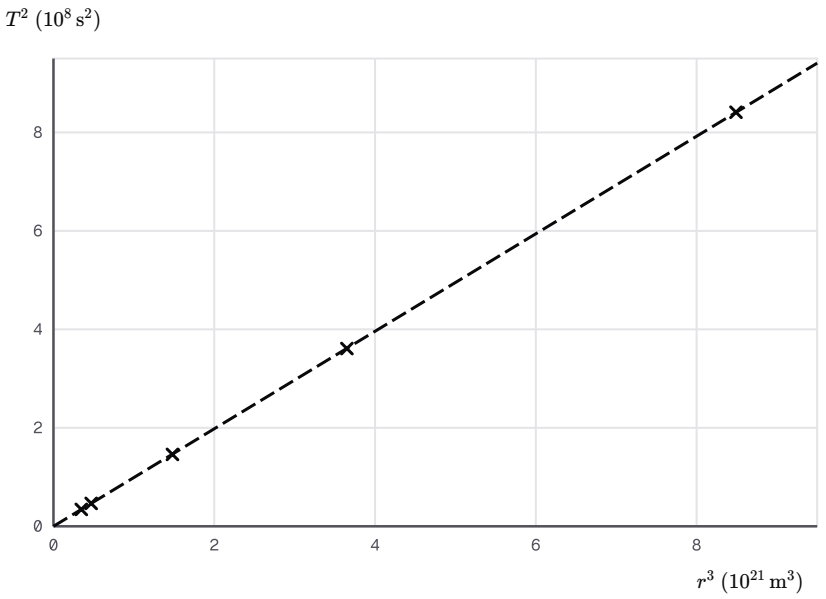
Réponse

Rayon : $r = 9{,}37 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_T}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(9{,}37\times10^{6})^3}{3{,}98199\times10^{14}}} \\ &= 9{,}03\times10^{3}\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Avec $1\ \mathrm{h} = 3\,600\ \mathrm{s}$, on obtient $T \approx 2{,}51\ \mathrm{h}$, soit environ $2\ \mathrm{h}\ 31\ \mathrm{min}$.

Le graphe de T² en fonction de r³



Satellites artificiels du tableau : T² en fonction de r³, et droite de modélisation passant par l'origine.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 5 points : y = a x, avec a ≈ 0,9902.

Méthode : Exploiter une droite de T² en fonction de r³

1. **Vérifie** l'alignement des points avec l'origine : T^2 est alors proportionnel à r^3.
2. **Lis** le coefficient directeur k entre l'origine et un point éloigné de la droite, en unités SI : $\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$.
3. **Identifie** $k = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$ et déduis la masse de l'astre central : $M = \dfrac{4\pi^2}{G\,k}$.

4. **Contrôle** l'ordre de grandeur de la masse obtenue.

Exemple : La masse de la Terre tirée du graphe

La droite passe par l'origine et par le point d'abscisse $8{,}00 \times 10^{21}\ \mathrm{m^3}$, d'ordonnée $7{,}92 \times 10^{8}\ \mathrm{s^2}$. Son coefficient directeur vaut

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{7{,}92 \times 10^{8}}{8{,}00 \times 10^{21}} \\ &= 9{,}90 \times 10^{-14}\ \mathrm{s^2 \cdot m^{-3}} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{4\pi^2}{G\,k} \\ &= \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 9{,}90 \times 10^{-14}} \\ &= 5{,}98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg} \end{aligned}$$

On retrouve la masse de la Terre, $5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$, à moins de 0,2 % près.

Attention : Une constante propre à chaque astre central

✗ « Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ de la Lune est égal à celui de Mars. »

✓ La Lune tourne autour de la Terre, Mars autour du Soleil. Le rapport vaut $\frac{4\pi^2}{G\,M}$: il change avec la masse M de l'astre central. On ne compare que des corps qui tournent autour du même astre.

Trouve l'erreur : Un rapport calculé dans de mauvaises unités

Pour le satellite à $650\ \mathrm{km}$, un élève calcule $\frac{T^2}{r^3}$ avec T en heures et r en kilomètres. Il compare son résultat à $\frac{4\pi^2}{G\,M_T}$ et conclut que la loi est fausse. Où est l'erreur ?

A. La loi ne s'applique pas à un satellite aussi proche.

Faux.

Faux. La loi vaut pour tout satellite en orbite circulaire autour de la Terre, à toute altitude.

B. Il aurait dû prendre l'altitude à la place du rayon.

Faux.

Faux. La loi porte sur le rayon de l'orbite $r = R_T + h$; l'altitude seule donnerait un rapport faux.

C. Dans les unités : $\frac{4\pi^2}{G\,M_T}$ est calculé en secondes et en mètres.

Juste.

Oui. Avec des heures et des kilomètres, le rapport n'a pas la même valeur numérique. Il faut convertir avant de comparer.

Correction

En unités SI, $T = 5{,}86 \times 10^{3}\,\mathrm{s}$ et $r = 7{,}02 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ donnent $\dfrac{T^2}{r^3} \approx 9{,}93 \times 10^{-14}\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$. C'est proche de la valeur $9{,}91 \times 10^{-14}\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$ de $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$: la loi est vérifiée.

Satellite géostationnaire

Une antenne qui ne bouge pas

Sur les toits, les antennes paraboliques de télévision restent fixes, orientées vers un même point du ciel. Elles reçoivent pourtant sans interruption le signal d'un satellite. Vu du sol, ce satellite semble donc immobile.

Devine : Un satellite immobile vu du sol

Pour qu'un satellite paraisse immobile depuis le sol, que doit valoir sa période de révolution dans le référentiel géocentrique ?

A. La période de rotation de la Terre sur elle-même.

Juste.

Oui. Le satellite doit suivre le sol dans sa rotation : il fait un tour pendant que la Terre en fait un.

B. Une période infinie : le satellite ne tourne pas.

Faux.

Faux. Un satellite qui ne tournerait pas autour de la Terre tomberait vers elle : son mouvement le maintient en orbite.

C. Un an, la période de révolution de la Terre.

Faux.

Faux. En un an, le sol fait plus de 365 tours : le satellite ne resterait pas au-dessus du même lieu.

Correction

Le satellite et le sol doivent tourner ensemble, avec la même période et dans le même sens. La période de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique vaut $86\,164\,\mathrm{s}$, un peu moins de 24 heures.

Conditions et altitude du satellite géostationnaire

Pourquoi une seule altitude ? Pour rester au-dessus d'un point de l'équateur, le satellite doit tourner avec lui, à la même période. La troisième loi de Kepler relie la période au rayon : une période imposée donne un seul rayon.

Propriété : Satellite géostationnaire : conditions et altitude

Un satellite est **géostationnaire** s'il reste à la verticale d'un même point de l'équateur. On admet que son orbite est circulaire. Elle est alors contenue dans le plan de l'équateur et parcourue dans le sens de rotation de la Terre. Sa période de révolution vaut la durée d'un tour de la Terre sur elle-même, mesurée dans le référentiel géocentrique : $T = 86\,164\,\mathrm{s}$, soit environ $23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}$.

Son rayon d'orbite vaut

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}21 \times 10^7\,\mathrm{m},$$

soit une altitude $h = r - R_T \approx 3{,}58 \times 10^7\,\mathrm{m}$.

Démonstration

Étape 1. Plan de l'orbite : l'orbite est admise circulaire ; la force de gravitation, dirigée vers le centre de la Terre, est centripète : le cercle est centré sur ce point. Pour rester au-dessus de l'équateur, le satellite doit parcourir un cercle contenu dans le plan de l'équateur.

Étape 2. Sens et période : le point de l'équateur survolé tourne avec la Terre ; le satellite doit tourner dans le même sens, avec la même période $T = 86\,164\,\mathrm{s}$.

Étape 3. Rayon de l'orbite : d'après la troisième loi de Kepler en trajectoire circulaire, $r^3 = \dfrac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}$, donc $r = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}}$.

Étape 4. Application numérique : avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $T = 86\,164\,\mathrm{s}$:

$$r \approx 4{,}21 \times 10^7\,\mathrm{m}.$$

Avec $R_T = 6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m}$:

$$h = r - R_T \approx 3{,}58 \times 10^7\,\mathrm{m}.$$

À retenir : De la période de rotation de la Terre au rayon de l'orbite

La période est imposée : celle de la rotation de la Terre. La troisième loi en trajectoire circulaire se retourne en $r^3 = \dfrac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}$. Un seul rayon convient : tous les satellites géostationnaires sont sur le même cercle, à $3{,}58 \times 10^7\,\mathrm{m}$ d'altitude.

Vérifie : Une orbite dans le plan de l'équateur

Dans la preuve, pourquoi l'orbite d'un satellite géostationnaire est-elle contenue dans le plan de l'équateur ?

A. Le sol va plus vite à l'équateur qu'ailleurs.

Faux.

Faux. La vitesse du sol ne fixe pas le plan de l'orbite ; ce sont la direction de la force et la condition de rester au-dessus de l'équateur.

B. L'attraction de la Terre est plus forte au-dessus de l'équateur.

Faux.

Faux. Pour un corps à répartition sphérique de masse, l'attraction dépend seulement de la distance au centre.

C. Elle est centrée sur la Terre et reste au-dessus de l'équateur.

Juste.

Oui. C'est l'étape 1 : un cercle centré sur le centre de la Terre, toujours au-dessus de l'équateur, est dans le plan de l'équateur.

Correction

À l'étape 1, la force pointe vers le centre de la Terre : l'orbite est un cercle centré sur ce point. Un tel cercle qui reste au-dessus de l'équateur est contenu dans le plan de l'équateur. Une orbite inclinée passerait tour à tour au nord et au sud.

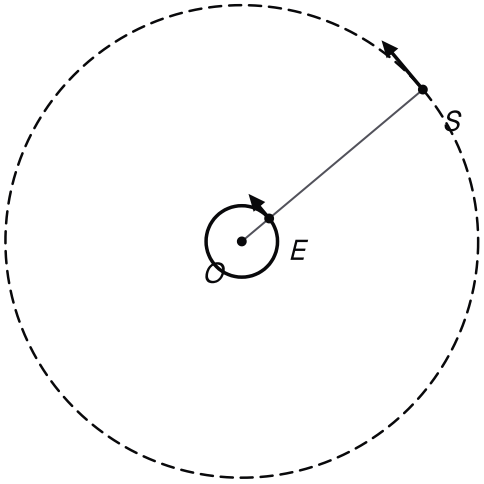
Exemple **: Vitesse d'un satellite géostationnaire**

Le satellite parcourt la circonférence de son orbite en une période :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ &= \frac{2\pi \times 4{,}21 \times 10^{7}}{86\,164} \\ &= 3{,}07 \times 10^{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Il va environ 2,4 fois moins vite que le satellite à $800\ \mathrm{km}$, sur une orbite beaucoup plus longue.

Les trois conditions vérifiées une à une



Terre vue du pôle Nord et orbite géostationnaire à l'échelle : rayon 6,62 fois celui de la Terre. Le satellite S et le point E de l'équateur tournent dans le même sens.

Méthode : Trois vérifications pour un satellite géostationnaire

1. **Orbite** : vérifie qu'elle est circulaire et contenue dans le plan de l'équateur.
2. **Sens** : vérifie qu'elle est parcourue dans le sens de rotation de la Terre, d'ouest en est.
3. **Période** : compare-la à la période de rotation de la Terre, $86\,164\,\mathrm{s}$.
4. **Conclusion** : les trois conditions sont nécessaires ; s'il en manque une, le satellite n'est pas géostationnaire.

Attention : Le bon rayon ne suffit pas

✗ « Ce satellite est à $3{,}58 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$ d'altitude, sur une orbite circulaire : il est géostationnaire. »

✓ Il faut aussi que l'orbite soit dans le plan de l'équateur et parcourue dans le sens de rotation de la Terre. Sur une orbite inclinée de même rayon, le satellite oscille au nord et au sud de l'équateur, vu du sol. En sens inverse, il ferait deux tours du ciel par jour.

À toi : Trois satellites à trier

Trois satellites ont une orbite circulaire de rayon $4{,}21 \times 10^{7}\,\mathrm{m}$. Le premier est dans le plan de l'équateur et tourne d'ouest en est. Le deuxième a une orbite inclinée de $30°$ sur l'équateur. Le troisième est dans le plan de l'équateur, mais tourne d'est en ouest. Lequel est géostationnaire ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reprends une à une les conditions de la méthode.

Indice 2

Pour la période, demande-toi ce que fixe le rayon de l'orbite.

Indice 3

Point délicat : examine chaque condition pour chaque satellite, sans t'arrêter à la première remplie.

Réponse

Les trois ont la bonne période, puisque leur rayon est celui de l'orbite géostationnaire. Le deuxième n'est pas dans le plan de l'équateur ; le troisième tourne en sens inverse de la Terre. Seul le premier est géostationnaire.

À quoi servent-ils ? Un satellite géostationnaire voit toujours la même région de la Terre. Il sert aux télécommunications et à la télévision. Il sert aussi à la météorologie : il photographie la même région à intervalles réguliers.

Planètes et lunes : masse de l'astre central

Les planètes de Mercure à Jupiter

Voici le rayon moyen d'orbite r et la période de révolution T de cinq planètes, dans le référentiel héliocentrique. On assimile leurs orbites à des cercles.

Planète	r ($10^{11}\,\mathrm{m}$)	T (jours)
Mercure	$0{,}5791$	$87{,}97$
Vénus	$1{,}082$	$224{,}7$
Terre	$1{,}496$	$365{,}3$
Mars	$2{,}279$	$687{,}0$
Jupiter	$7{,}785$	$4\,333$

Une durée en jours se convertit en secondes : $1\,\mathrm{j} = 86\,400\,\mathrm{s}$.

Devine : Un même rapport pour toutes les planètes ?

D'après la troisième loi de Kepler, que doit-on trouver en calculant $\dfrac{T^2}{r^3}$ pour chaque planète du tableau ?

A. Une valeur plus grande pour les planètes lointaines.

Faux.

Faux. T et r augmentent tous deux, et le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ reste le même.

B. La même valeur pour les cinq planètes.

Juste.

Oui. Les cinq planètes tournent autour du même astre, le Soleil : le rapport vaut $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$ pour toutes.

C. Une valeur qui dépend de la masse de chaque planète.

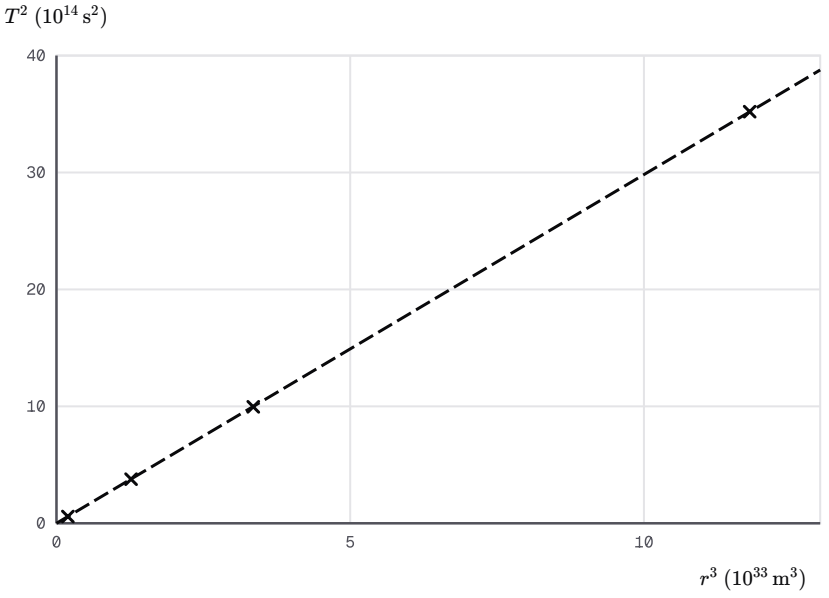
Faux.

Faux. La masse de la planète s'est simplifiée dans la deuxième loi : seule compte la masse du Soleil.

Correction

Le rapport ne dépend que de l'astre central. Pour toutes les planètes, $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$: on doit trouver la même valeur, aux erreurs de mesure près.

Vérifier la troisième loi sur les planètes



Planètes de Mercure à Mars : T² en fonction de r³, et droite de modélisation. Jupiter, hors du cadre, est traitée par le calcul.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 4 points : y = a x, avec a ≈ 2,982.

Exemple : Le rapport pour Mercure et pour la Terre

Pour la Terre, $T = 365{,}3 \times 86\,400 = 3{,}156192 \times 10^7$ s et $r = 1{,}496 \times 10^{11}$ m :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(3{,}156192 \times 10^7)^2}{(1{,}496 \times 10^{11})^3} = 2{,}975 \times 10^{-19}\ \mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$$

Pour Mercure, avec $T = 87{,}97 \times 86\,400 = 7{,}600608 \times 10^{6}\,\mathrm{s}$, le même calcul donne aussi $2{,}975 \times 10^{-19}\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$. Sur le graphe, les quatre premières planètes sont alignées avec l'origine.

À toi : Jupiter suit-elle la même loi ?

Jupiter est hors du cadre du graphe. Calcule son rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ à partir du tableau, puis compare-le à celui de la Terre. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Convertis d'abord la période de Jupiter en secondes.
Indice 2
Élève la période au carré et le rayon au cube, en gérant les puissances de dix.
Indice 3
Point délicat : $T = 4\,333 \times 86\,400\,\mathrm{s}$; garde la valeur complète avant de l'élever au carré.

Réponse
Période : $T = 3{,}743712 \times 10^{8}\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{r^3} &= \frac{(3{,}743712 \times 10^{8})^2}{(7{,}785 \times 10^{11})^3} \\ &= 2{,}970 \times 10^{-19}\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}\end{aligned}$$

L'écart avec la Terre est de 0,2 % : Jupiter suit la même loi que les autres planètes.

La masse du Soleil déduite du graphe

De la pente à la masse. La droite du graphe a pour coefficient directeur $k = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$. On en déduit la masse de l'astre central, ici le Soleil : $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G\,k}$. C'est l'exploitation du graphe vue pour les satellites de la Terre, avec un autre astre central.

Exemple : La masse du Soleil

La droite passe par l'origine et par le point d'abscisse $1{,}00 \times 10^{34}\,\mathrm{m^3}$, d'ordonnée $2{,}98 \times 10^{15}\,\mathrm{s^2}$:

$$\begin{aligned}k &\approx \frac{2{,}98 \times 10^{15}}{1{,}00 \times 10^{34}} \\ &= 2{,}98 \times 10^{-19}\,\mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}\end{aligned}$$

puis

$$
\begin{aligned}
M_S &= \frac{4\pi^2}{G\,k} \\
&= \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 2{,}98 \times 10^{-19}} \\
&= 1{,}99 \times 10^{30}\,\text{kg}
\end{aligned}
$$

C'est la masse du Soleil employée dans ce chapitre.

Vérifie : La masse que révèle l'orbite de la Terre

La période et le rayon de l'orbite de la Terre autour du Soleil permettent de calculer une masse. Laquelle ?

A. La masse du Soleil, l'astre central.

Juste.

Oui. Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ d'un corps en orbite ne dépend que de l'astre autour duquel il tourne.

B. La masse de la Terre, le corps qui tourne.

Faux.

Faux. La masse du corps en orbite se simplifie : son mouvement ne la révèle pas.

C. La masse de la Lune, qui accompagne la Terre.

Faux.

Faux. La Lune tourne autour de la Terre ; elle n'intervient pas dans le mouvement de la Terre autour du Soleil.

Correction

Pour la Terre, $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S}$: seule la masse du Soleil apparaît. Pour mesurer la masse de la Terre, il faut un corps qui tourne autour d'elle, la Lune ou un satellite artificiel.

Une démarche pour peser une planète

Méthode : Peser une planète à partir des positions d'une lune

Démarche. On mesure la période T et le rayon r de l'orbite d'une lune, supposée circulaire, puis on calcule la masse de la planète.

Protocole. Chaque nuit claire, au télescope, on relève la position de la lune par rapport au centre de la planète. Si l'orbite est vue presque par la tranche, comme pour les lunes de Jupiter, la lune semble osciller de part et d'autre de la planète.

Exploitation.

1. **Période** : durée d'un tour complet, entre deux retours de la lune à la même position.

2. **Rayon** : écart maximal mesuré sur le ciel, converti en mètres grâce à la distance entre la Terre et la planète.
3. **Masse** : $M = \dfrac{4\pi^2\, r^3}{G\, T^2}$, avec T en secondes et r en mètres.

Vérifie : Lire une période dans des relevés

Les relevés montrent la lune à son écart maximal à l'est de la planète le 3 mars, à l'ouest le 8 mars, puis de nouveau à l'est le 13 mars. Que vaut sa période de révolution ?

A. 5 jours : entre deux écarts maximaux successifs.
Faux.
Faux. De l'est à l'ouest, la lune ne fait qu'un demi-tour.

B. 20 jours : il faut deux allers et retours.
Faux.
Faux. Un aller et retour, de l'est à l'ouest puis de nouveau à l'est, est déjà un tour complet.

C. 10 jours : entre deux écarts maximaux du même côté.
Juste.
Oui. Du 3 au 13 mars, la lune fait un tour complet et revient à la même position.

Correction
Le 3 et le 13 mars, la lune occupe la même position, à l'est de la planète. Entre ces deux dates, elle fait un tour complet : sa période vaut 10 jours.

Les gestes du chapitre.

- choisir le référentiel héliocentrique ou géocentrique ;
- énoncer les trois lois de Kepler, puis les appliquer à une orbite circulaire ;
- écrire et représenter la force de gravitation, calculer $g(h)$;
- établir le mouvement circulaire uniforme, la vitesse et la période d'un satellite ;
- exploiter le graphe de T^2 en fonction de r^3 pour trouver la masse de l'astre central.

Un dernier mot. Une seule loi, la gravitation, explique la chute d'une pomme, l'orbite de la Lune et celle des satellites. Pour chaque astre, tu suis les mêmes temps : système, référentiel, bilan, deuxième loi, projection.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Satellites artificiels et planètes » (2bac · pc · physique-chimie)