BURHAN

Résumé : Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/rotation-d-un-solide-autour-d-un-axe-fixe/resume

Chapitre	Semestre
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	Semestre 2

Angle orienté et arc parcouru par un point

À retenir : Un même angle pour tous les points du solide

Pendant une rotation autour d'un axe fixe, chaque point du solide garde sa distance à l'axe et parcourt un cercle centré sur lui. Un seul nombre, l'angle tourné θ, décrit donc le mouvement entier ; la distance R d'un point à l'axe sert seulement à passer de l'angle à l'arc.

Définition : Abscisse angulaire et abscisse curviligne

Un solide indéformable tourne autour d'un axe fixe Δ. Chaque point M du solide, à la distance R de l'axe, décrit un cercle de centre O situé sur Δ et de rayon R.

On oriente ce cercle et on choisit une origine M_0. L'**abscisse angulaire** de M à l'instant t est l'angle orienté

$$\theta(t) = \left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}\right),$$

exprimé en radians (rad). L'**abscisse curviligne** de M est la longueur orientée de l'arc M_0M :

$$s(t) = R\,\theta(t),$$

en mètres, avec θ en radians. Tous les points du solide ont, à chaque instant, la même abscisse angulaire mesurée depuis leurs origines respectives.

Exemple

Un point du plateau d'un tour de potier, situé à $R = 0{,}35\ \mathrm{m}$ de l'axe, effectue $3{,}5$ tours dans le sens d'orientation choisi. Angle tourné, en radians : $\theta = 3{,}5 \times 2\pi\ \mathrm{rad} = 7\pi\ \mathrm{rad} \approx 22\ \mathrm{rad}$. Arc correspondant : $s = R\,\theta = 0{,}35 \times 7\pi \approx 7{,}7\ \mathrm{m}$, avec deux chiffres significatifs, comme la donnée R.

Vitesse angulaire, fréquence de rotation et vitesse linéaire

Définition : Vitesse angulaire et vitesse d'un point

La **vitesse angulaire** du solide à l'instant t est la dérivée de son abscisse angulaire par rapport au temps :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Elle est la même pour tous les points du solide. La vitesse d'un point M situé à la distance R de l'axe vaut

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\,\omega,$$

et le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ est tangent au cercle décrit par M. Une fréquence de rotation N en tours par seconde correspond à $\omega = 2\pi N$.

Exemple

Le plateau tourne à $96\ \mathrm{tr}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Fréquence en tours par seconde : $N = \dfrac{96}{60}\ \mathrm{tr}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}6\ \mathrm{tr}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Vitesse angulaire : $\omega = 2\pi N = 2\pi \times 1{,}6 \approx 10\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Le point étudié, à $0{,}35\ \mathrm{m}$ de l'axe, avance à $v = R\,\omega = 0{,}35 \times 10{,}05 \approx 3{,}5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, la valeur intermédiaire de ω étant gardée sans arrondi.

Méthode : Enchaîner conversion, angle, arc et vitesse

Ramener d'abord chaque donnée à l'unité des formules : un nombre de tours se multiplie par 2π, un angle en degrés par $\dfrac{\pi}{180}$, une fréquence en tours par minute se divise par 60. Calculer ensuite θ puis $s = R\,\theta$, ou bien $\omega = 2\pi N$ puis $v = R\,\omega$. Chaque résultat porte son unité ; il ne garde pas plus de chiffres significatifs que la donnée qui en compte le moins, et les valeurs intermédiaires restent sans arrondi.

Attention : Un angle en degrés dans la formule de l'arc

Les relations $s = R\,\theta$ et $v = R\,\omega$ supposent le radian. Un angle de 45 degrés vaut $\dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}79\ \mathrm{rad}$: sur un rayon de $0{,}35\ \mathrm{m}$, l'arc mesure $s = 0{,}35 \times \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}27\ \mathrm{m}$, et non $0{,}35 \times 45 \approx 16\ \mathrm{m}$.

Accélération angulaire et accélération d'un point du solide

Propriété : Composantes tangentielle et normale de l'accélération d'un point

L'**accélération angulaire** du solide est $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$, en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Dans la base de Frenet $(M, \vec{u}, \vec{n})$, l'accélération d'un point M à la distance R de l'axe a pour coordonnées

$$a_T = R\,\alpha \qquad a_N = R\,\omega^2.$$

La composante normale est dirigée vers l'axe ; elle vaut aussi $\dfrac{v^2}{R}$.

Exemple

Au démarrage, le plateau prend une accélération angulaire $\alpha = 3{,}2\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. À l'instant où $\omega = 6{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, le point situé à $R = 0{,}35\ \mathrm{m}$ a pour composantes $a_T = R\,\alpha = 0{,}35 \times 3{,}2 \approx 1{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $a_N = R\,\omega^2 = 0{,}35 \times 6{,}5^2 \approx 15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. La composante tournée vers l'axe l'emporte ici de loin.

Attention : Composante normale non nulle à vitesse angulaire constante

Une vitesse angulaire constante annule α, donc a_T, mais pas $a_N = R\,\omega^2$: tout point hors de l'axe garde une accélération tournée vers l'axe. À vitesse angulaire égale, un point deux fois plus loin de l'axe a des composantes deux fois plus grandes ; un point de l'axe n'a aucune accélération.

Équations horaires et courbe de la vitesse angulaire

Propriété : Équation horaire de la rotation uniforme

Un solide est en **rotation uniforme** autour d'un axe fixe lorsque sa vitesse angulaire ω est constante. Son abscisse angulaire est alors

$$\theta(t) = \omega\, t + \theta_0,$$

où θ_0 est l'abscisse angulaire à $t = 0$. Le mouvement est périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Exemple

Un rotor tourne à la vitesse angulaire constante $\omega = 55\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{55} \approx 0{,}11\ \mathrm{s}$. Angle tourné en $3{,}3\ \mathrm{s}$: $\theta - \theta_0 = \omega\, t = 55 \times 3{,}3 \approx 1{,}8 \times 10^2\ \mathrm{rad}$.

Propriété : Équations horaires de la rotation uniformément variée

Un solide est en **rotation uniformément variée** lorsque son accélération angulaire α est constante et non nulle. Avec ω_0 et θ_0 les valeurs à $t = 0$:

$$\omega(t) = \alpha\, t + \omega_0$$

$$\theta(t) = \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0\, t + \theta_0$$

et, entre deux instants quelconques,

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,(\theta - \theta_0)\,.$$

La courbe $\omega(t)$ est une droite de coefficient directeur α.

Exemple

Le plateau du tour de potier part du repos, avec $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ et $\alpha = 3{,}2\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$. Au bout de $t = 3{,}8\ \mathrm{s}$: $\omega = \alpha\, t = 3{,}2 \times 3{,}8 \approx 12\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\theta = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = 1{,}6 \times 3{,}8^2 \approx 23\ \mathrm{rad}$. Contrôle sans la date : ω^2 et $2\alpha\,\theta$ valent tous deux $\approx 1{,}5 \times 10^2\ \mathrm{rad^2 \cdot s^{-2}}$.

Méthode : Tirer la vitesse initiale et la pente d'une droite ω(t)

Repérer d'abord la forme de la courbe : horizontale pour une rotation uniforme, droite inclinée pour une rotation uniformément variée. Lire ω_0 sur l'axe des ordonnées, à $t = 0$. Choisir deux points éloignés de la droite et calculer $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ avec son signe. Si ω et α sont de même signe, la rotation s'accélère ; de signes contraires, elle ralentit.

Exemple

Sur une courbe $\omega(t)$ rectiligne, on lit $\omega = 21\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ à $t = 0$ et $\omega = 0$ à $t = 7{,}5\ \mathrm{s}$. Pente : $\alpha = \dfrac{0 - 21}{7{,}5} = -2{,}8\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$; le produit $\omega\,\alpha$ est négatif, la rotation ralentit. Angle tourné jusqu'à l'arrêt, sans passer par la date : $\theta - \theta_0 = \dfrac{0 - 21^2}{2 \times (-2{,}8)} \approx 79\ \mathrm{rad}$.

Moment d'une force et répartition de la masse autour de l'axe

Remarque : Moment d'une force perpendiculaire à l'axe

Rappel : une force perpendiculaire à l'axe Δ, dont la droite d'action passe à la distance d de l'axe, a pour moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F\, d$, en $\mathrm{N \cdot m}$, positif si elle tend à faire tourner le solide dans le sens d'orientation. Une force de $26\ \mathrm{N}$ tangente au bord d'un disque de rayon $0{,}22\ \mathrm{m}$ a ainsi pour moment $\mathcal{M}_\Delta = F\, d = 26 \times 0{,}22 \approx 5{,}7\ \mathrm{N \cdot m}$.

Définition : Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Le **moment d'inertie** J_Δ d'un solide par rapport à un axe Δ mesure la répartition de sa masse autour de cet axe. Pour un solide formé de points matériels de masses m_i situés aux distances r_i de l'axe :

$$J_\Delta = \sum_i m_i\, r_i^2,$$

en $\mathrm{kg \cdot m^2}$. Expressions usuelles, données et admises, pour un solide homogène de masse m :

- cerceau ou anneau mince de rayon R, axe de révolution : $J_\Delta = m\, R^2$;
- cylindre plein ou disque de rayon R, axe de révolution : $J_\Delta = \frac{1}{2} m\, R^2$;
- tige mince de longueur ℓ, axe perpendiculaire en son milieu : $J_\Delta = \frac{1}{12} m\, \ell^2$.

Le moment d'inertie dépend de l'axe choisi, pas seulement de la masse.

Exemple

Disque plein homogène de masse $m = 4{,}4\ \mathrm{kg}$ et de rayon $R = 0{,}22\ \mathrm{m}$, autour de son axe de révolution : $J_\Delta = \frac{1}{2} m\, R^2 = 0{,}5 \times 4{,}4 \times 0{,}22^2 \approx 0{,}11\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Anneau mince de même masse et de même rayon : $J_\Delta = m\, R^2 = 4{,}4 \times 0{,}22^2 \approx 0{,}21\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, le double, car toute sa masse se trouve au bord.

Attention : Distance de la droite d'action, pas du point d'application

Le moment se calcule avec la distance entre l'axe et la droite d'action de la force. Une force dont la droite d'action coupe l'axe, comme le poids d'un disque homogène ou la réaction de l'axe, a un moment nul quelle que soit sa valeur ; il en va de même d'une force parallèle à l'axe.

Attention : Un moment d'inertie sans axe précisé n'a pas de sens

Deux solides de même masse n'ont pas forcément le même moment d'inertie : l'anneau et le disque ci-dessus diffèrent d'un facteur deux. Un même solide change aussi de moment d'inertie quand on change d'axe ; chaque valeur de J_Δ s'écrit donc avec l'axe auquel elle se rapporte.

Loi de la dynamique en rotation et sa vérification au laboratoire

Propriété : Relation fondamentale de la dynamique en rotation

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments, par rapport à un axe fixe Δ, des forces extérieures appliquées à un solide en rotation autour de cet axe est égale au produit de son moment d'inertie par son accélération angulaire :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right) = J_\Delta\, \alpha.$$

Les moments sont comptés positivement dans le sens d'orientation choisi pour θ. Le moment d'une force de droite d'action à la distance d de l'axe, perpendiculaire à l'axe, vaut $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F\, d$; il est nul si la droite d'action rencontre l'axe ou lui est parallèle.

Domaine de validité : référentiel galiléen, solide indéformable, axe fixe dans ce référentiel.

Méthode : Bilan des moments et calcul de l'accélération angulaire

Désigner le solide étudié et le référentiel, supposé galiléen, puis choisir le sens positif de rotation. Lister les forces extérieures et écrire le moment de chacune avec son signe : nul pour une force dont la droite d'action coupe l'axe, négatif pour un frottement qui s'oppose à la rotation. Additionner, égaler la somme à $J_\Delta\, \alpha$ et isoler l'inconnue, qu'il s'agisse de α, d'un moment ou de J_Δ.

Exemple

Système : le disque plein précédent, $J_\Delta = 0{,}11\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Un moteur exerce un moment de $0{,}66\ \mathrm{N\cdot m}$ et les frottements un moment de $-0{,}22\ \mathrm{N\cdot m}$; les moments du poids et de la réaction de l'axe sont nuls, leurs droites d'action coupant l'axe. La loi de la dynamique en rotation donne $\alpha = \dfrac{0{,}66 - 0{,}22}{0{,}11} = 4{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. Moteur coupé, seul le frottement agit : $\alpha = \dfrac{-0{,}22}{0{,}11} = -2{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, et la rotation ralentit.

Méthode : Protocole avec un disque entraîné par une masse suspendue

Enrouler un fil sur le tambour d'un disque de moment d'inertie connu et le tendre par une masse suspendue. Repérer l'angle du disque à des dates séparées d'une même durée τ, puis calculer $\omega_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$ aux dates intermédiaires. Tracer $\omega(t)$, contrôler l'alignement des points et mesurer la pente. La comparer à $\dfrac{\sum \mathcal{M}_\Delta}{J_\Delta}$, puis recommencer avec une autre masse ou un autre tambour pour éprouver la loi.

Exemple

Sur la droite de modélisation, on lit $\omega = 1{,}44\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ à $t = 0{,}45\ \mathrm{s}$ et $\omega = 4{,}23\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ à $t = 1{,}35\ \mathrm{s}$, d'où la pente $\alpha = \dfrac{4{,}23 - 1{,}44}{1{,}35 - 0{,}45} = 3{,}1\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. Le fil, de tension $T = 0{,}62\ \mathrm{N}$ relevée par un capteur de force, agit à $r = 0{,}030\ \mathrm{m}$ de l'axe d'un disque de moment d'inertie $J_\Delta = 6{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, frottements négligés : $\dfrac{T\,r}{J_\Delta} = \dfrac{0{,}62 \times 0{,}030}{6{,}0 \times 10^{-3}} = 3{,}1\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. Les deux valeurs concordent.

À retenir : Portée d'une série de mesures alignées

Des points alignés sur la droite $\omega(t)$ indiquent que α reste constante tant que le moment appliqué ne change pas. L'accord entre la pente et $\dfrac{\sum \mathcal{M}_\Delta}{J_\Delta}$, retrouvé pour plusieurs masses, appuie la loi sans la démontrer : elle reste admise.

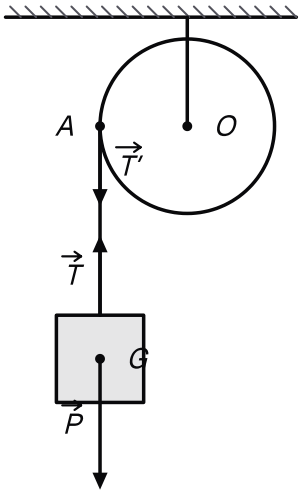
Poulie entraînée par une charge : deux systèmes et une liaison

Propriété : Accélération d'une charge suspendue à une poulie

Un fil inextensible, de masse négligeable, est enroulé sur une poulie de rayon r et de moment d'inertie J_Δ qui tourne sans frottement autour de son axe fixe horizontal ; il porte à son extrémité un solide (S) de masse m. Si le fil ne glisse pas sur la poulie, (S) descend avec une accélération constante

$$a = \frac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}},$$

et la tension du fil vaut $T = m\,(g - a)$, inférieure au poids de (S). La relation de liaison s'écrit $a = r\,\alpha$.



Poulie d'axe fixe O sous un support hachuré, fil vertical à gauche et charge suspendue : tension T et poids P sur la charge, tension T' du fil sur la poulie.

Méthode : Séparer la charge et la poulie, puis les relier

Traiter la charge comme un solide en translation, par la deuxième loi de Newton sur un axe vertical, et la poulie comme un solide en rotation, par la loi de la dynamique en rotation. Écrire la liaison : fil inextensible qui ne glisse pas, donc $a = r\,\alpha$; fil de masse négligeable, donc même tension T sur la charge et sur la poulie. Éliminer T entre les deux équations, puis contrôler l'unité du résultat et le cas $J_\Delta = 0$, qui redonne $a = g$.

Exemple

Systèmes : une charge de masse $m = 0{,}85\ \mathrm{kg}$ et une poulie de rayon $r = 0{,}045\ \mathrm{m}$ et de moment d'inertie $J_\Delta = 2{,}7 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; le fil est inextensible, de masse négligeable, et ne glisse pas. Valeur intermédiaire : $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = \dfrac{2{,}7 \times 10^{-3}}{0{,}045^2} \approx 1{,}33\ \mathrm{kg}$.

$$a = \frac{m\,g}{m + J_\Delta / r^2}$$
$$a = \frac{0{,}85 \times 9{,}80}{0{,}85 + 1{,}33}$$
$$a \approx 3{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Tension du fil : $T = m\,(g - a) = 0{,}85 \times (9{,}80 - 3{,}82) \approx 5{,}1\ \mathrm{N}$, moins que le poids $m\,g \approx 8{,}3\ \mathrm{N}$. Accélération angulaire de la poulie : $\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{3{,}82}{0{,}045} \approx 85\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$.

Attention : Tension du fil et poids d'une charge qui accélère

Remplacer T par $m\,g$ revient à oublier que la charge accélère : la deuxième loi de Newton donne $T = m\,(g - a)$, plus petite que le poids dès que $a > 0$. L'égalité $T = m\,g$ ne vaut que pour une charge immobile ou animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Choisir une relation et rédiger une solution complète

Méthode : Quelle relation pour quelle question ?

- **Angle, arc, nombre de tours** : θ en radians, puis $s = R\,\theta$.
- **Vitesse d'un point** : $\omega = 2\pi N$, puis $v = R\,\omega$.
- **Accélération d'un point** : $a_T = R\,\alpha$ et $a_N = R\,\omega^2$.
- **Date, angle ou vitesse angulaire** : équations horaires ; sans la date, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$.
- **Courbe de la vitesse angulaire** : pente α, ordonnée à l'origine ω_0.
- **Cause d'une variation de** ω : bilan des moments et $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta\,\alpha$.
- **Charge reliée à une poulie** : deux lois, liaison $a = r\,\alpha$, élimination de T.

Abscisse curviligne

$$s = R\,\theta$$

Vitesse angulaire

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2\pi N$$

Vitesse d'un point

$$v = R\,\omega$$

Accélération angulaire

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

Base de Frenet

$$a_T = R\,\alpha \qquad a_N = R\,\omega^2$$

Rotation uniforme

$$\theta = \omega\,t + \theta_0$$

Rotation uniformément variée

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha\,t^2 + \omega_0\,t + \theta_0$$

Sans la date

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Moment d'une force

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F\,d$$

Moment d'inertie

$$J_\Delta = \sum_i m_i\,r_i^2$$

Loi de la rotation

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_\Delta\,\alpha$$

Liaison fil et poulie

$$a = r\,\alpha$$

À retenir : Une copie qui annonce systèmes, référentiel et loi

Chaque résolution commence par nommer le solide étudié, le référentiel supposé galiléen et la loi employée ; dans un système composé, chaque solide est traité à part et la relation de liaison est écrite avant tout calcul. Une application numérique suit l'ordre formule littérale, valeurs avec unités, résultat

> arrondi avec son unité.