BURHAN

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/rotation-d-un-solide-autour-d-un-axe-fixe/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	Niveau examen	5

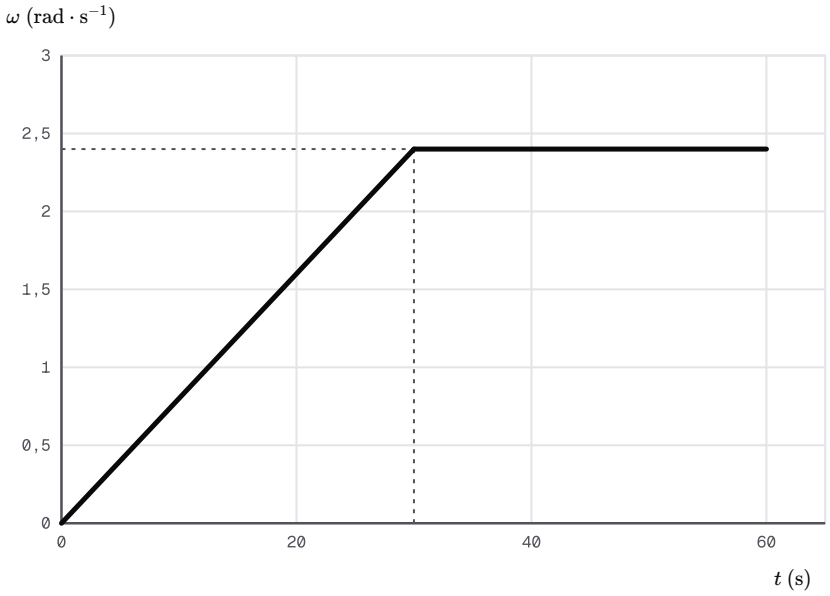
Exercice 1 6 pts

Éolienne : démarrage et couple du vent

Une éolienne démarre lorsque le vent devient suffisant. Son rotor, formé du moyeu et des pales, tourne autour d'un axe fixe horizontal Δ.

Un système de mesure embarqué enregistre la vitesse angulaire ω du rotor depuis l'instant $t = 0$, où le rotor est au repos. On oriente la rotation dans le sens du mouvement.

Document. Courbe de la vitesse angulaire du rotor en fonction du temps.



Vitesse angulaire du rotor de l'éolienne

A.1. 0,5 pts

Partie A : mouvement du rotor.

Décrire la nature de la rotation du rotor sur chaque phase du document.

INDICE

Outil : sur chaque phase, observer la forme de la courbe $\omega(t)$: que dit-elle de l'accélération angulaire ?

CORRIGÉ

De 0 à $30\,\text{s}$, la courbe est une droite oblique qui part de l'origine : ω croît proportionnellement au temps, la rotation est uniformément accélérée.

De 30 à $60\,\text{s}$, la courbe est horizontale : $\omega = 2{,}4\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ reste constante, la rotation est uniforme.

Conclusion. Le rotor a une rotation uniformément accélérée pendant la première phase, puis uniforme pendant la seconde.

A.2. 0,5 pts

Déterminer l'accélération angulaire α du rotor pendant la première phase.

INDICE

Outil : coefficient directeur de la droite, $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

CORRIGÉ

Entre les points $(0\,;0)$ et $(30\,;2{,}4)$ de la courbe :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\\ &= \frac{2{,}4}{30}\\ &= 8{,}0\times10^{-2}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la première phase, $\alpha = 8{,}0\times10^{-2}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

A.3. 1 pts

Montrer que, pendant la première phase, l'abscisse angulaire du rotor s'écrit $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha\,t^2$, avec $\theta(0) = 0$, puis calculer le nombre de tours effectués pendant cette phase.

INDICE

Début : $\omega(t) = \alpha\,t$ est la dérivée de $\theta(t)$; chercher la primitive de $\alpha\,t$ qui vérifie la condition initiale.

CORRIGÉ

Pendant la première phase, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(t) = \alpha\,t$, car $\omega(0) = 0$. Les primitives de $t \mapsto \alpha\,t$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}\alpha\,t^2 + k$, k constante. La condition $\theta(0) = 0$ impose $k = 0$:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \tfrac{1}{2}\alpha\,t^2\\ \theta(30) &= \tfrac{1}{2}\alpha\times30^2\\ &= 0{,}040\times900\\ &= 36\,\text{rad}\\ n &= \frac{36}{2\pi}\approx5{,}7\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la première phase, $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha\,t^2$; le rotor tourne de $36\,\text{rad}$, soit environ $5{,}7$ tours.

A.4. 1 pts

L'extrémité d'une pale est à la distance $R = 45\,\mathrm{m}$ de l'axe. Calculer sa vitesse et les coordonnées a_T et a_N de son accélération pendant la seconde phase.

INDICE

Outil : $v = R\,\omega$, $a_T = R\,\alpha$ et $a_N = R\,\omega^2$, avec $\alpha = 0$ en rotation uniforme.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} v &= R\,\omega \\ &= 45 \times 2{,}4 \\ &\approx 1{,}1 \times 10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

La rotation est uniforme, donc $a_T = R\,\alpha = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_N &= R\,\omega^2 \\ &= 45 \times 2{,}4^2 \\ &\approx 2{,}6 \times 10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la seconde phase, l'extrémité de la pale va à $v \approx 1{,}1 \times 10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; son accélération, normale, vaut $a_N \approx 2{,}6 \times 10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, avec $a_T = 0$.

B.1. 0,5 pts

Partie B : couples exercés sur le rotor. On admet que, pendant la première phase, l'accélération angulaire du rotor vaut $\alpha = 8{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ et que, pendant la seconde, sa vitesse angulaire est constante.

Le rotor a pour moment d'inertie $J_\Delta = 4{,}5 \times 10^{6}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Le vent exerce sur les pales un couple de moment $\mathcal{M}_v$; les frottements et l'alternateur exercent un couple résistant de moment constant $\mathcal{M}_r = -6{,}0 \times 10^{4}\,\mathrm{N\cdot m}$.

Faire le bilan des actions extérieures exercées sur le rotor et justifier que son poids et la réaction de l'axe ont un moment nul par rapport à Δ.

INDICE

Outil : une force dont la droite d'action rencontre l'axe a un moment nul par rapport à cet axe.

CORRIGÉ

Le rotor subit son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{Q}$ de l'axe, le couple du vent, de moment $\mathcal{M}_v$, et le couple résistant, de moment $\mathcal{M}_r$.

Le rotor est équilibré : son centre de masse est sur l'axe, donc la droite d'action de $\vec{P}$ rencontre Δ. La réaction $\vec{Q}$ s'applique sur l'axe et sa droite d'action le rencontre aussi.

Conclusion. Le poids et la réaction de l'axe ont un moment nul ; seuls le couple du vent et le couple résistant interviennent dans la somme des moments.

B.2. 0,75 pts

Pendant la première phase, que donne la relation fondamentale de la dynamique en rotation pour le rotor ? En déduire $\mathcal{M}_v$.

INDICE

Outil : dans un référentiel galiléen, $\mathcal{M}_v + \mathcal{M}_r = J_\Delta\,\alpha$.

CORRIGÉ

Système : le rotor ; référentiel terrestre, supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique en rotation s'écrit $\mathcal{M}_v + \mathcal{M}_r = J_\Delta\,\alpha$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_v &= J_\Delta\,\alpha - \mathcal{M}_r \\ &= 3{,}6 \times 10^{5} \\ &\quad + 6{,}0 \times 10^{4} \\ &= 4{,}2 \times 10^{5}\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant le démarrage, le couple du vent a pour moment $\mathcal{M}_v = 4{,}2 \times 10^{5}\ \mathrm{N\cdot m}$.

B.3. 0,5 pts

Calculer $\mathcal{M}_v$ pendant la seconde phase.

INDICE

Outil : en rotation uniforme, $\alpha = 0$.

CORRIGÉ

En rotation uniforme, $\alpha = 0$ et la relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}_v + \mathcal{M}_r = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_v &= -\mathcal{M}_r \\ &= 6{,}0 \times 10^{4}\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la seconde phase, le couple du vent compense exactement le couple résistant : $\mathcal{M}_v = 6{,}0 \times 10^{4}\ \mathrm{N\cdot m}$.

B.4. 0,75 pts

Proposer une méthode pour vérifier depuis le sol, avec un simple chronomètre, que la vitesse angulaire du rotor est constante pendant la seconde phase, et pour en mesurer la valeur.

INDICE

Début : quel événement, visible depuis le sol, se reproduit à chaque tour du rotor ? Comment limiter l'effet du temps de réaction sur la mesure d'une durée ?

CORRIGÉ

On déclenche le chronomètre quand une pale passe par la verticale, puis on mesure la durée Δt_k de plusieurs séries successives de 5 tours de cette pale. Des durées égales, aux erreurs de lecture près, montrent que la rotation est uniforme.

La vitesse angulaire est alors $\omega = \dfrac{5 \times 2\pi}{\Delta t_k}$; mesurer plusieurs tours réduit l'effet du temps de réaction sur chaque durée.

Conclusion. Des durées égales pour des séries de cinq tours vérifient la rotation uniforme, et $\omega = \dfrac{10\pi}{\Delta t_k}$ en donne la valeur.

B.5. 0,5 pts

Le vent tombe brusquement pendant la seconde phase, alors que $\omega = 2{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$: $\mathcal{M}_v$ devient nul. En supposant $\mathcal{M}_r$ inchangé, calculer la durée de l'arrêt du rotor.

INDICE

Ensuite : la relation fondamentale donne la nouvelle accélération angulaire, constante ; $\omega(t) = \alpha' \, t + \omega_0$ s'annule à l'arrêt.

CORRIGÉ

On prend l'origine des temps quand le vent tombe, avec $\omega_0 = 2{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}_r = J_\Delta \, \alpha'$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\mathcal{M}_r}{J_\Delta} \\ &\approx -1{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}} \\ t_a &= -\frac{\omega_0 \, J_\Delta}{\mathcal{M}_r} \\ &= \frac{2{,}4 \times 4{,}5 \times 10^{6}}{6{,}0 \times 10^{4}} \\ &= 1{,}8 \times 10^{2}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. Sans vent, le rotor s'arrête en $t_a = 1{,}8 \times 10^{2}\,\mathrm{s}$, soit trois minutes.

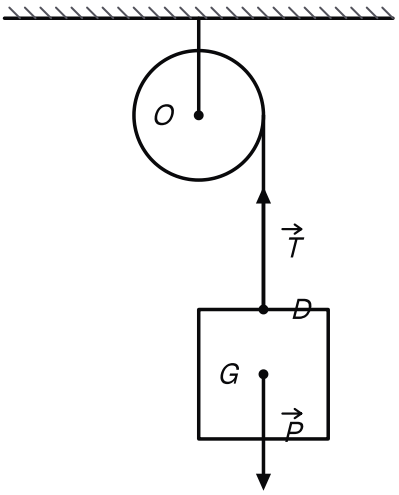
Exercice 2 6 pts

Monte-charge : modèle et mesures de montée

Un monte-charge élève des matériaux sur un chantier. Sa cabine est accrochée à un câble inextensible, de masse négligeable, qui s'enroule sans glisser sur un tambour de rayon r, entraîné par un moteur autour d'un axe fixe horizontal Δ.

Les frottements sont négligés et le référentiel terrestre est supposé galiléen ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document. Schéma du tambour, du câble et de la cabine, avec les forces exercées sur la cabine.



Tambour du monte-charge et cabine suspendue

A.1. 0,5 pts

Partie A : accélération prévue par le modèle. La cabine chargée a pour masse $m = 160\,\mathrm{kg}$. Le tambour a pour rayon $r = 0{,}250\,\mathrm{m}$ et pour moment d'inertie $J_\Delta = 2{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}$; le moteur exerce sur lui un couple de moment constant $\mathcal{M}_m = 420\,\mathrm{N\cdot m}$. La cabine part du repos.

Appliquer la deuxième loi de Newton à la cabine, sur un axe vertical orienté vers le haut.

INDICE

Outil : la cabine subit son poids et la tension du câble ; projeter $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$.

CORRIGÉ

Système : la cabine ; référentiel terrestre, supposé galiléen. Elle subit son poids $\vec{P}$, vers le bas, et la tension $\vec{T}$ du câble, vers le haut. Sur l'axe vertical orienté vers le haut :

$$T - m\,g = m\,a$$

Conclusion. La deuxième loi de Newton appliquée à la cabine donne $T - m\,g = m\,a$.

A.2. 0,5 pts

Le tambour étant le système étudié, traduire la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

INDICE

Point délicat : le câble de masse négligeable exerce sur le tambour une force d'intensité T, dont le moment s'oppose à celui du moteur.

CORRIGÉ

Système : le tambour ; même référentiel ; sens positif, celui où la cabine monte. Son poids et la réaction de l'axe ont un moment nul. Le moteur exerce un couple de moment $\mathcal{M}_m$; le câble, une force d'intensité T tangente au tambour, de moment $-T\,r$:

$$\mathcal{M}_m - T\,r = J_\Delta\,\alpha$$

Conclusion. Le tambour vérifie $\mathcal{M}_m - T\,r = J_\Delta\,\alpha$.

A.3. 1,25 pts

Montrer, grâce à la relation de liaison entre a et α, que l'accélération de la cabine vaut :

$$a = \frac{(\mathcal{M}_m - m\,g\,r)\,r}{m\,r^2 + J_\Delta}$$

INDICE

Ensuite : le câble ne glisse pas, $a = r\,\alpha$; remplacer T par $m\,(g + a)$ dans la relation du tambour, puis multiplier par r.

CORRIGÉ

Le câble est inextensible et ne glisse pas sur le tambour : $a = r\,\alpha$. La relation de la cabine donne $T = m\,(g + a)$. La relation du tambour devient :

$$\mathcal{M}_m - m\,(g + a)\,r = J_\Delta\,\frac{a}{r}$$

En multipliant par r : $\mathcal{M}_m\,r - m\,g\,r^2 = (m\,r^2 + J_\Delta)\,a$, d'où :

$$a = \frac{(\mathcal{M}_m - m\,g\,r)\,r}{m\,r^2 + J_\Delta}$$

Conclusion. L'accélération de la cabine s'écrit bien $a = \dfrac{(\mathcal{M}_m - m\,g\,r)\,r}{m\,r^2 + J_\Delta}$: elle est constante.

A.4. 0,75 pts

Calculer a.

INDICE

Outil : calculer séparément $m\,g\,r$ et $m\,r^2 + J_\Delta$.

CORRIGÉ

On a $m\,g\,r = 160 \times 9{,}80 \times 0{,}250 = 392\,\mathrm{N\cdot m}$, d'où $\mathcal{M}_m - m\,g\,r = 28\,\mathrm{N\cdot m}$: cette différence n'a que deux chiffres significatifs.

De plus, $m\,r^2 + J_\Delta = 10{,}0 + 2{,}50 = 12{,}5\,\mathrm{kg\cdot m^2}$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{28 \times 0{,}250}{12{,}5} \\ &\approx 0{,}56\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Le résultat garde deux chiffres significatifs, comme la différence $\mathcal{M}_m - m\,g\,r$.

Conclusion. La cabine monte avec l'accélération $a \approx 0{,}56\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

A.5. 0,5 pts

Calculer la tension T du câble et la comparer au poids de la cabine.

INDICE

Outil : $T = m\,(g + a)$ d'après la question A.1.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} T &= m\,(g + a) \\ &= 160 \times 10{,}36 \\ &\approx 1{,}7 \times 10^3\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Le poids de la cabine vaut $m\,g = 160 \times 9{,}80 \approx 1{,}57 \times 10^3\,\mathrm{N}$; l'écart $T - m\,g = m\,a \approx 90\,\mathrm{N}$ est positif.

Conclusion. La tension du câble, $T \approx 1{,}7 \times 10^3\,\mathrm{N}$, est supérieure au poids de la cabine, car la cabine accélère vers le haut.

B.1. `0,5 pts`

Partie B : exploitation de mesures. Lors d'un autre essai, avec une autre charge, on filme la montée de la cabine à côté d'une règle verticale graduée et on relève son altitude z au cours du temps, depuis le départ au repos à $t = 0$:

t (s)	z (m)
0	0
$0{,}50$	$0{,}075$
$1{,}00$	$0{,}300$
$1{,}50$	$0{,}675$
$2{,}00$	$1{,}200$

Indiquer comment obtenir ces mesures à partir de la vidéo, et pourquoi la règle doit être placée dans le plan du mouvement.

INDICE

Début : un logiciel de pointage repère la position d'un point de la cabine image par image ; la règle fixe l'échelle.

CORRIGÉ

On ouvre la vidéo dans un logiciel de pointage : on étalonne l'échelle des longueurs avec la règle, on choisit l'origine des altitudes et des temps, puis on pointe, image par image, un même point de la cabine. Les dates se déduisent de la cadence des images.

La règle doit être dans le plan du mouvement, à la même distance de la caméra que la cabine : sinon l'échelle mesurée sur la règle ne serait pas celle des déplacements de la cabine.

Conclusion. Le pointage image par image, étalonné par une règle placée dans le plan du mouvement, donne les altitudes z aux dates t.

B.2. 0,75 pts

Montrer que ces mesures sont compatibles avec un mouvement rectiligne uniformément accéléré partant du repos, d'équation $z = \frac{1}{2} a\, t^2$, et en déduire a.

INDICE

Outil : si $z = \frac{1}{2} a\, t^2$, le quotient $\dfrac{z}{t^2}$ est le même pour toutes les mesures.

CORRIGÉ

Pour chaque mesure, $t \neq 0$: $\dfrac{0{,}075}{0{,}50^2} = \dfrac{0{,}300}{1{,}00^2} = \dfrac{0{,}675}{1{,}50^2} = \dfrac{1{,}200}{2{,}00^2} = 0{,}300\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Ce quotient constant vaut $\frac{1}{2} a$:

$$\begin{aligned} a &= 2 \times 0{,}300 \\ &= 0{,}600\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Conclusion. Les mesures vérifient $z = \frac{1}{2} a\, t^2$, avec $a = 0{,}600\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

B.3. 0,5 pts

Le tambour a pour rayon $r = 0{,}250\,\mathrm{m}$. Calculer son accélération angulaire, puis le nombre de tours qu'il effectue pendant la montée de $1{,}20\,\mathrm{m}$.

INDICE

Outil : le câble ne glisse pas : $a = r\,\alpha$, et la longueur de câble enroulée vaut $z = r\,\theta$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{r} \\ &= \frac{0{,}600}{0{,}250} \\ &= 2{,}40\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{z}{r} = \frac{1{,}20}{0{,}250} \\ &= 4{,}80\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

$$n = \frac{4{,}80}{2\pi} \approx 0{,}764$$

Conclusion. Le tambour a une accélération angulaire $\alpha = 2{,}40\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ et fait environ $0{,}764$ tour pendant la montée de $1{,}20\,\mathrm{m}$.

B.4. `0,75 pts`

Calculer la vitesse angulaire du tambour à l'instant $t = 2{,}00\,\text{s}$.

INDICE

Outil : le tambour part du repos avec une accélération angulaire constante : $\omega = \alpha\, t$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha\, t \\ &= 2{,}40 \times 2{,}00 \\ &= 4{,}80\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Conclusion. À $t = 2{,}00\,\text{s}$, le tambour tourne à $\omega = 4{,}80\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

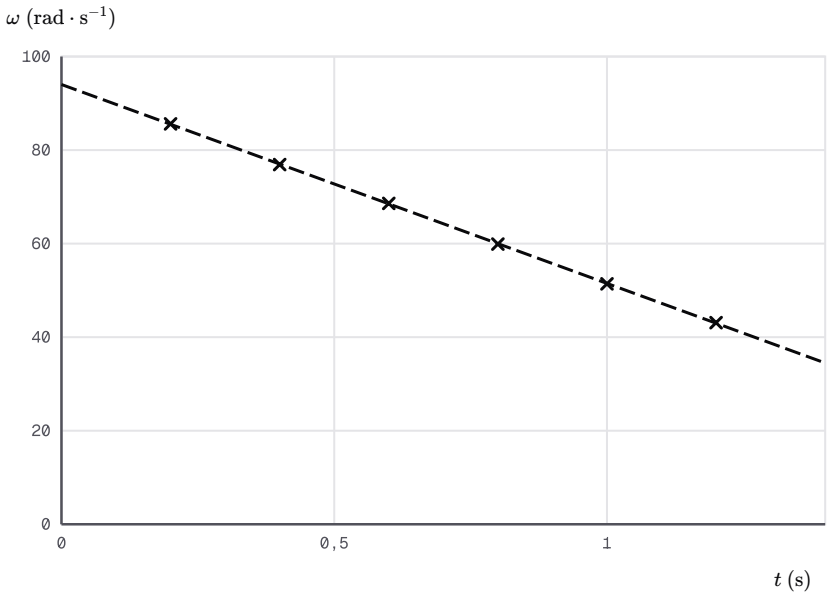
Exercice 3 6 pts

Disque de frein sur banc : couple et arrêt

Un fabricant teste un disque de frein sur un banc. L'ensemble formé par le disque et l'arbre du banc tourne autour d'un axe fixe Δ ; son moment d'inertie vaut $J_\Delta = 0{,}32\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

À $t = 0$, les plaquettes serrent le disque ; le moteur du banc est découplé et les autres frottements sont négligés. Un ordinateur enregistre l'abscisse angulaire de l'arbre.

Document. Vitesses angulaires calculées par l'ordinateur et droite de modélisation, d'équation $\omega \approx -42{,}5\,t + 94{,}0$ (t en secondes, ω en radians par seconde).



Vitesse angulaire du disque pendant le freinage

A.1. 0,75 pts

Partie A : couple de freinage. L'abscisse angulaire θ_i de l'arbre doit être enregistrée à des instants t_i régulièrement espacés de $\tau = 20\,\text{ms}$.

Décrire le montage et les réglages de l'acquisition qui permettent cet enregistrement, puis expliquer comment l'ordinateur en déduit la vitesse angulaire ω_i à l'instant t_i.

INDICE

Début : quel capteur, solidaire de l'arbre, repère sa position angulaire, et comment chaque mesure est-elle datée ?

CORRIGÉ

Montage : un codeur angulaire est fixé sur l'arbre du banc et relié par une interface d'acquisition à l'ordinateur. On règle l'intervalle entre deux mesures à $\tau = 20\,\text{ms}$ et une durée d'enregistrement plus longue que le freinage, puis on déclenche l'acquisition au serrage des plaquettes.

L'ordinateur divise ensuite l'angle balayé entre t_{i-1} et t_{i+1} par la durée 2τ :

$$\omega_i \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$$

Cette vitesse angulaire moyenne n'est proche de la vitesse angulaire à t_i que si ω varie peu pendant 2τ : il faut une durée τ petite devant la durée du freinage.

Conclusion. Un codeur fixé sur l'arbre et relié par une interface à l'ordinateur fournit les θ_i ; ω_i est la vitesse angulaire moyenne entre t_{i-1} et t_{i+1}, proche de $\omega(t_i)$ pour τ petit.

A.2. 0,5 pts

Justifier, à partir du document, que la rotation du disque est uniformément ralentie.

INDICE

Outil : une droite $\omega(t)$ indique une accélération angulaire constante ; comparer le signe de ω et celui de α.

CORRIGÉ

Les points de mesure sont alignés sur une droite décroissante : ω est une fonction affine du temps, l'accélération angulaire est constante et négative, alors que ω est positive. Donc $\omega\,\alpha < 0$.

Conclusion. La rotation du disque est uniformément ralentie.

A.3. 0,5 pts

Déterminer l'accélération angulaire α du disque.

INDICE

Outil : l'accélération angulaire est le coefficient directeur de la droite de modélisation.

CORRIGÉ

Le coefficient directeur de la droite de modélisation donne :

$$\alpha \approx -42{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

Conclusion. L'accélération angulaire du disque vaut $\alpha \approx -42{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

A.4. 0,75 pts

Calculer le moment $\mathcal{M}_F$ du couple de freinage en appliquant à l'ensemble en rotation la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

INDICE

Outil : seuls les frottements des plaquettes ont un moment non nul ; $\mathcal{M}_F = J_\Delta\,\alpha$.

CORRIGÉ

Système : le disque et l'arbre ; référentiel terrestre, supposé galiléen. Le poids et la réaction de l'axe ont un moment nul ; les autres frottements sont négligés. La relation fondamentale de la dynamique en rotation s'écrit $\mathcal{M}_F = J_\Delta\,\alpha$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_F &= 0{,}32 \times (-42{,}5)\\ &\approx -14\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. Le couple de freinage a pour moment $\mathcal{M}_F \approx -14\,\mathrm{N\cdot m}$.

A.5. 0,5 pts

Le moment du couple de freinage s'écrit $\mathcal{M}_F = -F\,d$, où F est l'intensité totale des forces tangentielles exercées par les plaquettes et $d = 0{,}12\,\mathrm{m}$ la distance de leur point d'application à l'axe. Calculer F.

INDICE

Outil : $F = -\dfrac{\mathcal{M}_F}{d}$, avec la valeur de $\mathcal{M}_F$ non arrondie.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}F &= -\frac{\mathcal{M}_F}{d}\\ &= \frac{13{,}6}{0{,}12}\\ &\approx 1{,}1\times 10^{2}\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Conclusion. Les plaquettes exercent sur le disque des forces tangentielles d'intensité totale $F \approx 1{,}1\times 10^{2}\,\mathrm{N}$.

B.1. 0,75 pts

Partie B : arrêt du disque. On admet que, depuis $t = 0$, la rotation du disque est uniformément ralentie, avec $\omega_0 = 94{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\alpha = -42{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

Montrer que la durée de l'arrêt s'écrit $t_a = -\dfrac{\omega_0}{\alpha}$, puis la calculer.

INDICE

Début : écrire l'équation horaire $\omega(t)$ de la rotation uniformément variée et chercher l'instant où elle s'annule.

CORRIGÉ

En rotation uniformément variée, $\omega(t) = \alpha\,t + \omega_0$. À l'arrêt, $\omega(t_a) = 0$, donc $\alpha\,t_a + \omega_0 = 0$:

$$\begin{aligned} t_a &= -\frac{\omega_0}{\alpha} \\ &= \frac{94{,}0}{42{,}5} \\ &\approx 2{,}21\,\text{s} \end{aligned}$$

Conclusion. La durée de l'arrêt s'écrit $t_a = -\dfrac{\omega_0}{\alpha}$ et vaut environ $2{,}21\,\text{s}$.

B.2. 0,75 pts

Calculer le nombre de tours effectués par le disque pendant le freinage.

INDICE

Outil : $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$, avec $\omega = 0$ à l'arrêt.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= -\frac{\omega_0^2}{2\alpha} \\ &= \frac{94{,}0^2}{85{,}0} \\ &\approx 104\,\text{rad} \end{aligned}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \approx 16{,}5$$

Conclusion. Pendant le freinage, le disque fait environ $16{,}5$ tours.

B.3. 1 pts

Un point M de la périphérie du disque est à la distance $R = 0{,}16\,\mathrm{m}$ de l'axe. Calculer les coordonnées a_T et a_N de son accélération à $t = 0$, puis la valeur a de cette accélération.

INDICE

Outil : $a_T = R\,\alpha$, $a_N = R\,\omega^2$ et $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} a_T &= R\,\alpha \\ &= 0{,}16 \times (-42{,}5) \\ &\approx -6{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= R\,\omega_0^2 \\ &= 0{,}16 \times 94{,}0^2 \\ &\approx 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \\ &\approx 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

La composante tangentielle est négative : elle s'oppose au mouvement. Elle est très petite devant la composante normale.

Conclusion. À $t = 0$, $a_T \approx -6{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_N \approx 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $a \approx 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: l'accélération du point est presque normale.

B.4. 0,5 pts

En serrant plus fort les plaquettes, on double le moment du couple de freinage, ω_0 restant le même. Un technicien affirme que le disque tourne alors d'un angle deux fois plus petit avant de s'arrêter. Vérifier cette affirmation.

INDICE

Ensuite : à moment d'inertie fixé, doubler le moment double l'accélération angulaire ; reprendre l'expression de $\Delta\theta$.

CORRIGÉ

D'après la relation fondamentale de la dynamique en rotation, $\alpha = \dfrac{\mathcal{M}_F}{J_\Delta}$: doubler $\mathcal{M}_F$ double α.

L'angle d'arrêt $\Delta\theta = -\dfrac{\omega_0^2}{2\alpha}$ est inversement proportionnel à α : il est divisé par deux, environ $52\,\mathrm{rad}$.

Conclusion. L'affirmation est vraie : avec un moment de freinage double, l'angle parcouru avant l'arrêt est deux fois plus petit, comme la durée de l'arrêt.

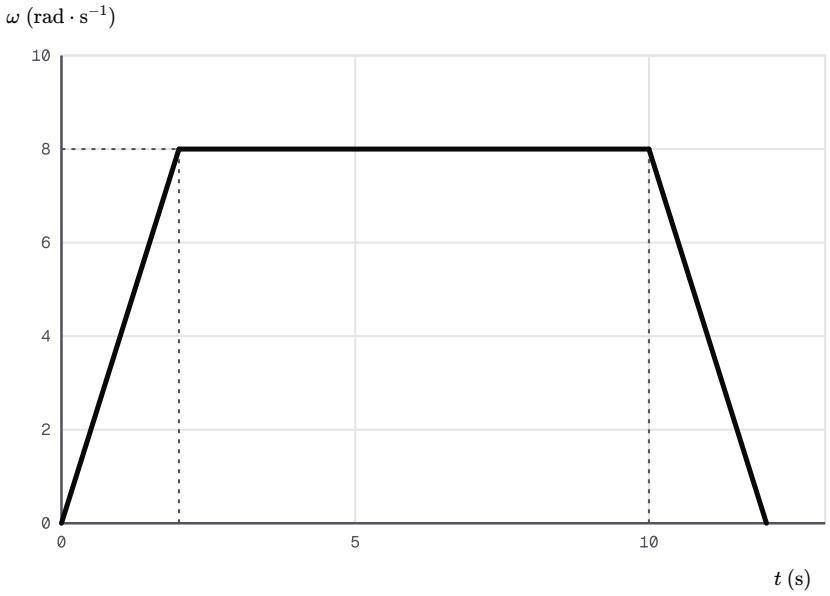
Exercice 4 — 6 pts

Treuil de chantier : levage en trois phases

Un treuil de chantier soulève une palette de parpaings. Le tambour du treuil, qui tourne autour d'un axe fixe horizontal Δ, enroule sans glissement un câble inextensible de masse négligeable.

Pendant une montée complète de la palette, depuis le repos jusqu'à l'arrêt, un capteur relié au moteur enregistre la vitesse angulaire ω du tambour.

Document. Courbe de la vitesse angulaire du tambour en fonction du temps.



Vitesse angulaire du tambour pendant une montée complète

A.1. — 0,5 pts

Partie A : étude cinématique.

Décrire la nature de la rotation du tambour pendant chacune des trois phases du document.

INDICE

Outil : examiner la forme de chaque morceau de la courbe et le signe de $\omega\,\alpha$.

CORRIGÉ

De 0 à $2\,\text{s}$: droite qui monte, rotation uniformément accélérée. De 2 à $10\,\text{s}$: droite horizontale, rotation uniforme à $8{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. De 10 à $12\,\text{s}$: droite qui descend jusqu'à zéro, avec $\omega > 0$ et $\alpha < 0$, rotation uniformément ralentie.

Conclusion. La rotation du tambour est uniformément accélérée, puis uniforme, puis uniformément ralentie jusqu'à l'arrêt.

A.2. 0,75 pts

Déterminer l'accélération angulaire du tambour pendant la première phase, puis pendant la troisième.

INDICE

Outil : $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ sur chaque phase.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{8{,}0 - 0}{2{,}0} \\ &= 4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{0 - 8{,}0}{12 - 10} \\ &= -4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Conclusion. L'accélération angulaire vaut $\alpha_1 = 4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ pendant la première phase et $\alpha_3 = -4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ pendant la troisième.

A.3. 0,75 pts

Montrer que l'angle total dont tourne le tambour pendant la montée vaut $80\,\mathrm{rad}$. Le tambour a pour rayon $r = 0{,}200\,\mathrm{m}$: en déduire la hauteur dont monte la palette.

INDICE

Ensuite : calculer l'angle de chaque phase avec l'équation horaire qui lui convient ; la longueur de câble enroulée vaut $r\,\theta$.

CORRIGÉ

Première phase, départ au repos : $\Delta\theta_1 = \tfrac{1}{2}\alpha_1\,t_1^2 = 0{,}5 \times 4{,}0 \times 2{,}0^2 = 8{,}0\,\mathrm{rad}$.

Deuxième phase, rotation uniforme : $\Delta\theta_2 = \omega\,\Delta t = 8{,}0 \times 8{,}0 = 64\,\mathrm{rad}$.

Troisième phase, origine des temps à $10\,\mathrm{s}$: $\Delta\theta_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_3\,t_3^2 + \omega\,t_3 = -8{,}0 + 16 = 8{,}0\,\mathrm{rad}$.

Au total, $\Delta\theta = 8{,}0 + 64 + 8{,}0 = 80\,\mathrm{rad}$. Le câble ne glisse pas : la palette monte de la longueur de câble enroulée.

$$\begin{aligned} h &= r\,\Delta\theta \\ &= 0{,}200 \times 80 \\ &= 16\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Conclusion. Le tambour tourne de $80\,\mathrm{rad}$ et la palette monte de $h = 16\,\mathrm{m}$.

A.4. 0,5 pts

Proposer un montage simple permettant d'enregistrer la vitesse angulaire du tambour au cours du temps.

INDICE

Début : quel capteur peut détecter, à intervalles d'angle réguliers, le passage d'un repère solidaire de l'axe ? À quoi faut-il le relier pour dater chaque passage ?

CORRIGÉ

On fixe sur l'axe du tambour un disque portant n fentes régulièrement réparties, qui défile devant une fourche optique (une diode et un capteur de lumière). La fourche, reliée à une interface d'acquisition et à un ordinateur, date chaque passage de fente.

Entre deux passages, le tambour tourne de $\dfrac{2\pi}{n}$: la durée Δt qui les sépare donne $\omega \approx \dfrac{2\pi}{n\,\Delta t}$, que l'ordinateur trace en fonction du temps.

Conclusion. Un disque à fentes sur l'axe, une fourche optique et une interface d'acquisition enregistrent $\omega(t)$.

B.1. 1 pts

Partie B : couple moteur. La palette a pour masse $m = 8{,}00 \times 10^{2}\,\mathrm{kg}$. Le tambour, de rayon $r = 0{,}200\,\mathrm{m}$, a pour moment d'inertie $J_\Delta = 1{,}20\,\mathrm{kg\cdot m^{2}}$; le moteur exerce sur lui un couple de moment $\mathcal{M}_m$. Les frottements sont négligés. Référentiel terrestre, supposé galiléen ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On admet aussi que l'accélération angulaire du tambour vaut $\alpha_1 = 4{,}00\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ au cours de la première phase. En étudiant la palette, puis le tambour, montrer que, pendant cette phase :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m &= J_\Delta\,\alpha_1 \\ &\quad + m\,r\,(g + r\,\alpha_1)\end{aligned}$$

INDICE

Ensuite : deuxième loi de Newton pour la palette sur un axe vertical vers le haut, relation fondamentale pour le tambour, relation de liaison $a = r\,\alpha_1$.

CORRIGÉ

Système : la palette ; axe vertical vers le haut. Elle subit son poids et la tension T du câble : $T - m\,g = m\,a$, avec $a = r\,\alpha_1$, car le câble est inextensible et ne glisse pas. Donc $T = m\,(g + r\,\alpha_1)$.

Système : le tambour. Son poids et la réaction de l'axe ont un moment nul ; le câble, de masse négligeable, exerce une force d'intensité T de moment $-T\,r$. La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}_m - T\,r = J_\Delta\,\alpha_1$, d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m &= J_\Delta\,\alpha_1 + T\,r \\ &= J_\Delta\,\alpha_1 \\ &\quad + m\,r\,(g + r\,\alpha_1)\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la première phase, $\mathcal{M}_m = J_\Delta\,\alpha_1 + m\,r\,(g + r\,\alpha_1)$.

B.2. 0,75 pts

Calculer $\mathcal{M}_m$ pendant la première phase.

INDICE

Outil : calculer d'abord $r\,\alpha_1$, puis chacun des deux termes.

CORRIGÉ

On a $r\,\alpha_1 = 0{,}800\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $J_\Delta\,\alpha_1 = 4{,}80\,\mathrm{N\cdot m}$ et $m\,r\,(g + r\,\alpha_1) = 160 \times 10{,}6 = 1\,696\,\mathrm{N\cdot m}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m &= 4{,}80 + 1\,696\\ &\approx 1{,}70 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la première phase, le moteur exerce un couple de moment $\mathcal{M}_m \approx 1{,}70 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$.

B.3. 1 pts

Calculer le moment du couple moteur pendant la deuxième phase et le comparer à celui de la première phase.

INDICE

Outil : pendant la deuxième phase, la rotation est uniforme : $\alpha = 0$ et la palette monte à vitesse constante.

CORRIGÉ

Pendant la deuxième phase, $\alpha = 0$ et $a = 0$: la tension vaut $m\,g$ et la relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}'_m = m\,g\,r$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'_m &= m\,g\,r\\ &= 7{,}84 \times 10^{3} \times 0{,}200\\ &\approx 1{,}57 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Pendant la première phase, le moteur doit en plus accélérer la palette et le tambour : son moment est plus grand d'environ $1{,}3 \times 10^{2}\,\mathrm{N\cdot m}$, dont $4{,}80\,\mathrm{N\cdot m}$ seulement pour la rotation du tambour.

Conclusion. Pendant la deuxième phase, $\mathcal{M}'_m \approx 1{,}57 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$, moins que les $1{,}70 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$ du démarrage.

B.4. `0,75 pts`

Le moteur ne peut pas exercer un couple de moment supérieur à $\mathcal{M}_{\max} = 2{,}00 \times 10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$. Calculer la masse maximale de la palette que le treuil peut soulever avec la même première phase.

INDICE

Ensuite : isoler m dans la relation de la question B.1 écrite avec $\mathcal{M}_{m} = \mathcal{M}_{\max}$.

CORRIGÉ

D'après B.1, avec $\mathcal{M}_{m} = \mathcal{M}_{\max}$, on isole la masse : $m_{\max} = \dfrac{\mathcal{M}_{\max} - J_{\Delta}\,\alpha_1}{r\,(g + r\,\alpha_1)}$.

Le numérateur vaut $2\,000 - 4{,}80 \approx 1\,995\,\mathrm{N\cdot m}$ et le dénominateur $0{,}200 \times 10{,}6 = 2{,}12\,\mathrm{m^{2}\cdot s^{-2}}$:

$$\begin{aligned} m_{\max} &= \frac{1\,995}{2{,}12} \\ &\approx 941\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Conclusion. Avec la même première phase, le treuil peut soulever une palette de masse au plus $941\,\mathrm{kg}$ environ.

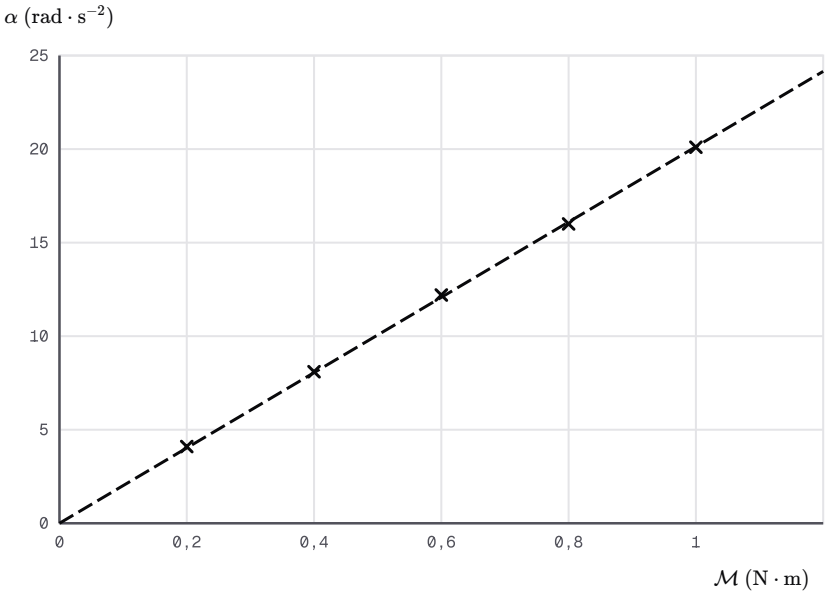
Exercice 5 — 6 pts

Toupie industrielle : moment d'inertie et freinage

Dans un atelier de menuiserie, l'arbre porte-outil d'une toupie industrielle, muni de son outil, tourne autour d'un axe fixe vertical Δ.

Pour mesurer son moment d'inertie, un technicien le monte sur un banc où un moteur lui applique un couple de moment $\mathcal{M}$ réglable, mesuré par un couplemètre ; les frottements sont négligés. Pour chaque valeur de $\mathcal{M}$, il mesure l'accélération angulaire α de l'arbre.

Document. Accélération angulaire mesurée en fonction du moment du couple appliqué et droite de modélisation passant par l'origine, d'équation $\alpha \approx 20{,}1\,\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ en newtons mètres, α en radians par seconde au carré).



Accélération angulaire de l'arbre selon le moment appliqué

A.1. 0,75 pts

Partie A : moment d'inertie de l'arbre.

Proposer un protocole pour mesurer l'accélération angulaire α de l'arbre pour une valeur donnée de $\mathcal{M}$.

INDICE

Début : quelle grandeur un capteur angulaire mesure-t-il directement, et quelle courbe faut-il tracer pour faire apparaître α ?

CORRIGÉ

On règle le couple à la valeur $\mathcal{M}$ et on lance l'arbre depuis le repos. Un capteur angulaire relié à une interface enregistre θ_i toutes les τ ; on calcule $\omega_i \approx \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$.

On trace ω en fonction du temps : si les points sont alignés, la rotation est uniformément variée et le coefficient directeur de la droite de modélisation est α. On recommence pour chaque valeur de $\mathcal{M}$.

Conclusion. α est le coefficient directeur de la droite $\omega(t)$, obtenue à partir de l'enregistrement de l'abscisse angulaire de l'arbre.

A.2. 0,5 pts

Montrer que, d'après la relation fondamentale de la dynamique en rotation appliquée à l'arbre, la théorie prévoit $\alpha = \dfrac{\mathcal{M}}{J_\Delta}$.

INDICE

Point délicat : l'axe est vertical ; le poids, parallèle à l'axe, a un moment nul par rapport à lui.

CORRIGÉ

Système : l'arbre et son outil ; référentiel terrestre, supposé galiléen. Le poids, vertical, est parallèle à l'axe : son moment est nul. La réaction de l'axe le rencontre : moment nul. Les frottements sont négligés. Il reste le couple moteur :

$$\mathcal{M} = J_\Delta \, \alpha$$

Conclusion. La relation fondamentale de la dynamique en rotation prévoit $\alpha = \dfrac{\mathcal{M}}{J_\Delta}$: l'accélération angulaire est proportionnelle au moment appliqué.

A.3. 0,5 pts

Le document valide-t-il cette prévision ? Justifier.

INDICE

Outil : une proportionnalité se traduit par des points alignés sur une droite qui passe par l'origine.

CORRIGÉ

Les points de mesure sont alignés, aux erreurs de mesure près, sur une droite qui passe par l'origine : α est proportionnelle à $\mathcal{M}$, comme le prévoit la relation fondamentale.

Conclusion. Oui : les mesures sont en accord avec la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

A.4. 0,75 pts

En déduire le moment d'inertie J_Δ de l'arbre muni de son outil.

INDICE

Outil : identifier le coefficient de la droite de modélisation à $\dfrac{1}{J_\Delta}$.

CORRIGÉ

Par identification, $\dfrac{1}{J_\Delta} \approx 20{,}1\,\mathrm{kg^{-1}\cdot m^{-2}}$:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \frac{1}{20{,}1} \\ &\approx 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \end{aligned}$$

Conclusion. L'arbre muni de son outil a pour moment d'inertie $J_\Delta \approx 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

A.5. 0,5 pts

L'arbre et son outil sont assimilés à un cylindre homogène de masse $m = 6{,}4\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 12{,}5\,\mathrm{cm}$, de moment d'inertie $\frac{1}{2} m\,R^2$. Comparer à la valeur mesurée.

INDICE

Point délicat : le rayon s'exprime en mètres.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \tfrac{1}{2} m\,R^2 \\ &= 0{,}5 \times 6{,}4 \times 0{,}125^2 \\ &= 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \end{aligned}$$

Conclusion. Le modèle du cylindre homogène donne $5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, égal à la valeur mesurée avec deux chiffres significatifs.

B.1. 0,5 pts

Partie B : démarrage et freinage en service. On admet que l'arbre muni de son outil a pour moment d'inertie $J_\Delta = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ et que les frottements sont négligeables. En service, il tourne à raison de $6{,}0 \times 10^{3}\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$.

Calculer sa vitesse angulaire ω.

INDICE

Outil : exprimer d'abord la fréquence de rotation N en tours par seconde, puis $\omega = 2\pi N$.

CORRIGÉ

En tours par seconde, la fréquence de rotation vaut $N = \dfrac{6{,}0 \times 10^{3}}{60} = 1{,}0 \times 10^{2}\,\mathrm{tr \cdot s^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi N \\ &= 2\pi \times 1{,}0 \times 10^{2} \\ &\approx 6{,}3 \times 10^{2}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. En service, l'arbre tourne à $\omega \approx 6{,}3 \times 10^{2}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, soit $628\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ avant arrondi.

B.2. 0,75 pts

Le tranchant de l'outil est à $6{,}0\,\mathrm{cm}$ de l'axe. Calculer sa vitesse.

INDICE

Outil : $v = R\,\omega$, avec la distance à l'axe en mètres.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} v &= 0{,}060 \times 628 \\ &\approx 38\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. Le tranchant de l'outil se déplace à $v \approx 38\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

B.3. 1 pts

Au démarrage, depuis le repos, le moteur exerce un couple de moment constant $\mathcal{M}_d = 2{,}5\,\mathrm{N \cdot m}$. Montrer que la durée du démarrage jusqu'à la vitesse angulaire ω de service s'écrit $t_d = \dfrac{J_\Delta\,\omega}{\mathcal{M}_d}$, puis la calculer.

INDICE

Début : la relation fondamentale donne une accélération angulaire constante ; l'équation horaire $\omega(t)$ part de zéro.

CORRIGÉ

La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}_d = J_\Delta\,\alpha_d$: $\alpha_d = \dfrac{\mathcal{M}_d}{J_\Delta}$ est constante. Depuis le repos, $\omega(t) = \alpha_d\,t$; la vitesse ω de service est atteinte à $t_d = \dfrac{\omega}{\alpha_d} = \dfrac{J_\Delta\,\omega}{\mathcal{M}_d}$.

$$\begin{aligned} t_d &= \frac{5{,}0 \times 10^{-2} \times 628}{2{,}5} \\ &\approx 13\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. La durée du démarrage s'écrit $t_d = \dfrac{J_\Delta\,\omega}{\mathcal{M}_d}$ et vaut environ $13\,\mathrm{s}$.

B.4. 0,75 pts

Pour la sécurité de l'opérateur, l'arbre doit s'arrêter en moins de $10\,\mathrm{s}$ après la coupure du moteur. Calculer la valeur minimale du moment du couple de freinage, supposé constant.

INDICE

Ensuite : la même démarche qu'en B.3, appliquée au freinage, relie la durée de l'arrêt à la valeur absolue du moment de freinage.

CORRIGÉ

Avec un couple de freinage de moment constant $\mathcal{M}_f < 0$, la durée de l'arrêt vaut $t_a = \dfrac{J_\Delta\,\omega}{|\mathcal{M}_f|}$. La condition $t_a \leq 10\,\mathrm{s}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_f| &\geq \frac{J_\Delta\,\omega}{t_a} \\ &= \frac{5{,}0\times10^{-2}\times 628}{10} \\ &\approx 3{,}1\,\mathrm{N\cdot m} \end{aligned}$$

Conclusion. Le couple de freinage doit avoir un moment d'au moins $3{,}1\,\mathrm{N\cdot m}$ en valeur absolue.