BURHAN

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/rotation-d-un-solide-autour-d-un-axe-fixe/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	Entraînement	7

Exercice 1

Arrêt d'une centrifugeuse lu sur un tableau de mesures

À l'instant $t = 0$, on coupe le moteur d'une centrifugeuse de laboratoire et on actionne son frein. Un capteur optique mesure la vitesse angulaire du rotor toutes les deux secondes.

Document. Vitesse angulaire du rotor mesurée pendant le freinage.

t (s)	ω (rad · s^{-1})
0	420
2,00	372
4,00	324
6,00	276
8,00	228

1.

Le capteur repère le passage d'une marque du rotor devant un faisceau lumineux. Expliquer comment il peut en déduire une vitesse angulaire.

INDICE

Début : quelle durée le capteur peut-il mesurer entre deux passages successifs de la marque, et de quel angle le rotor a-t-il tourné pendant cette durée ?

CORRIGÉ

Le capteur mesure la durée T_1 qui sépare deux passages successifs de la marque : pendant T_1, le rotor tourne de 2π radians. Il en déduit $\omega \approx \dfrac{2\pi}{T_1}$.

Cette valeur est une vitesse angulaire moyenne sur un tour ; elle est très proche de la valeur à l'instant considéré, car ω varie peu pendant un tour.

Conclusion. Le capteur déduit la vitesse angulaire de la durée d'un tour, $\omega \approx \dfrac{2\pi}{T_1}$.

2.

Montrer, à partir du tableau, que la rotation du rotor est uniformément ralentie.

INDICE

Outil : calculer la variation de ω sur chaque intervalle de $2{,}00\,\text{s}$ et regarder son signe.

CORRIGÉ

Sur chacun des quatre intervalles de $2{,}00\,\text{s}$, ω diminue de la même quantité : $420 - 372 = 372 - 324 = 324 - 276 = 276 - 228 = 48$.

La vitesse angulaire est donc une fonction affine du temps : l'accélération angulaire est constante. Elle est négative alors que ω est positive, donc $\omega\,\alpha < 0$.

Conclusion. La rotation du rotor est uniformément ralentie.

3.

Déterminer l'accélération angulaire α et la vitesse angulaire initiale ω_0 du rotor.

INDICE

Outil : $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ sur un intervalle quelconque ; ω_0 se lit à $t = 0$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \\ &= \frac{228 - 420}{8{,}00} \\ &= -24{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

À $t = 0$, le tableau donne $\omega_0 = 420\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Conclusion. Le rotor a une accélération angulaire $\alpha = -24{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 420\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.

En supposant que l'accélération angulaire reste constante jusqu'à l'arrêt, calculer la durée totale de l'arrêt.

INDICE

Outil : $\omega(t) = \alpha\,t + \omega_0$ s'annule à l'instant de l'arrêt.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} t_a &= -\frac{\omega_0}{\alpha} \\ &= \frac{420}{24{,}0} \\ &= 17{,}5\,\text{s} \end{aligned}$$

Conclusion. Le rotor s'arrête $t_a = 17{,}5\,\text{s}$ après la coupure du moteur.

5.

Calculer l'angle dont tourne le rotor depuis $t = 0$ jusqu'à l'arrêt, puis le nombre de tours correspondant.

INDICE

Outil : la relation $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$ évite de passer par la durée.

CORRIGÉ

À l'arrêt, $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= -\frac{\omega_0^2}{2\alpha} \\ &= \frac{420^2}{2 \times 24{,}0} \\ &\approx 3{,}68 \times 10^{3}\ \text{rad} \end{aligned}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \approx 585$$

Conclusion. Jusqu'à l'arrêt, le rotor tourne de $\Delta\theta \approx 3{,}68 \times 10^{3}\ \text{rad}$, soit environ 585 tours.

Exercice 2

Programme d'essorage : montée en vitesse puis palier

Un programme d'essorage comporte deux phases successives.

Document. Phases du programme.

Phase	Durée	Vitesse angulaire du tambour
montée	$20{,}0\,\mathrm{s}$	uniformément croissante, de $40{,}0$ à $140\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
palier	$60{,}0\,\mathrm{s}$	constante, égale à $140\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

Un point de la paroi du tambour est à la distance $R = 0{,}240\,\mathrm{m}$ de l'axe.

1.

Calculer l'accélération angulaire α_1 du tambour pendant la montée.

INDICE

Outil : pendant une rotation uniformément variée, $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\\ &= \frac{140 - 40{,}0}{20{,}0}\\ &= 5{,}00\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant la montée, $\alpha_1 = 5{,}00\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

2.

Calculer l'angle $\Delta\theta_1$ dont tourne le tambour pendant la montée, puis le nombre de tours correspondant.

INDICE

Outil : avec l'origine des temps au début de la montée, $\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1\, t^2 + \omega_0\, t$, où ω_0 est la vitesse angulaire au début de la montée.

CORRIGÉ

Avec $\omega_0 = 40{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $t = 20{,}0\,\mathrm{s}$:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha_1\, t^2 + \omega_0\, t\\ &= 1\,000 + 800\\ &= 1{,}80\times 10^{3}\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \approx 286$$

Conclusion. Pendant la montée, le tambour tourne de $\Delta\theta_1 = 1{,}80\times 10^{3}\,\mathrm{rad}$, soit environ 286 tours.

3.

Calculer l'angle $\Delta\theta_2$ dont tourne le tambour pendant le palier.

INDICE

Outil : en rotation uniforme, l'angle balayé est proportionnel à la durée : $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\Delta\theta_2 &= \omega\,\Delta t\\ &= 140 \times 60{,}0\\ &= 8{,}40 \times 10^{3}\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Conclusion. Pendant le palier, le tambour tourne de $\Delta\theta_2 = 8{,}40 \times 10^{3}\,\mathrm{rad}$.

4.

Calculer les coordonnées a_T et a_N de l'accélération du point de la paroi juste avant la fin de la montée.

INDICE

Outil : juste avant la fin de la montée, $\alpha = \alpha_1$ et $\omega = 140\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}a_T &= R\,\alpha_1\\ &= 0{,}240 \times 5{,}00\\ &= 1{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_N &= R\,\omega^2\\ &= 0{,}240 \times 140^2\\ &= 4{,}70 \times 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

Conclusion. Juste avant la fin de la montée, $a_T = 1{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $a_N = 4{,}70 \times 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5.

Un élève affirme que, pendant la montée, l'accélération du point de la paroi est dirigée selon la tangente à sa trajectoire. Discuter cette affirmation.

INDICE

Point délicat : une accélération angulaire non nulle ne rend pas l'accélération tangente ; comparer a_N et a_T.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\frac{a_N}{a_T} &= \frac{4{,}70 \times 10^{3}}{1{,}20}\\ &\approx 3{,}92 \times 10^{3}\end{aligned}$$

Même au début de la montée, $a_N = 0{,}240 \times 40{,}0^2 = 384\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, très supérieure à a_T. La composante tangentielle est négligeable devant la composante normale.

Conclusion. L'affirmation est fausse : pendant la montée, l'accélération du point est presque entièrement normale, dirigée vers l'axe du tambour.

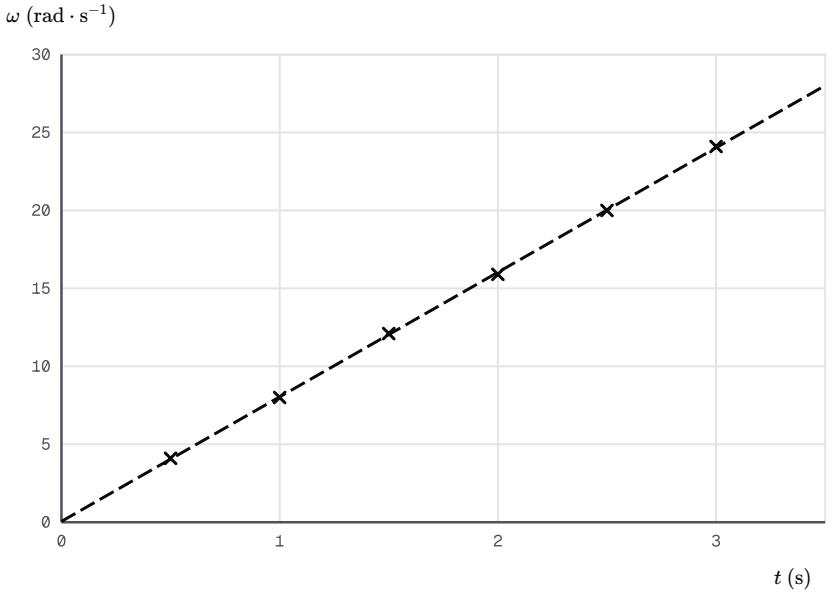
Exercice 3

Moment d'inertie d'un volant mesuré sur banc d'essai

Sur un banc d'essai, un volant tourne autour d'un axe fixe horizontal Δ passant par son centre. Depuis le repos à $t = 0$, un moteur lui applique un couple de moment constant $\mathcal{M}_m = 0{,}36\,\mathrm{N\cdot m}$; les frottements sont négligeables.

Un capteur angulaire relié à une interface enregistre l'abscisse angulaire θ_i du volant aux instants t_i, séparés de $\tau = 50\,\mathrm{ms}$; un tableur en déduit la vitesse angulaire à quelques instants.

Document. Mesures de ω et droite de modélisation calculée, d'équation $\omega \approx 7{,}99\,t + 0{,}05$ (t en secondes, ω en radians par seconde).



Vitesse angulaire du volant sur le banc d'essai

1.

Expliquer comment le tableur calcule la vitesse angulaire ω_i à l'instant t_i à partir des abscisses angulaires enregistrées.

INDICE

Début : sur une durée courte qui encadre t_i, la vitesse angulaire moyenne est proche de la vitesse angulaire à l'instant t_i.

CORRIGÉ

Le tableur prend l'angle balayé entre les instants t_{i-1} et t_{i+1}, qui encadrent t_i, et le divise par la durée 2τ :

$$\omega_i \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$$

Conclusion. La vitesse angulaire à t_i est approchée par la vitesse angulaire moyenne entre t_{i-1} et t_{i+1}.

2.

Justifier, à partir du document, que la rotation du volant est uniformément accélérée.

INDICE

Outil : une rotation est uniformément variée lorsque ω est une fonction affine du temps.

CORRIGÉ

Les points de mesure sont alignés sur une droite croissante : ω est une fonction affine du temps, de coefficient directeur positif. L'accélération angulaire est constante et de même signe que ω.

Conclusion. La rotation du volant est uniformément accélérée.

3.

En déduire l'accélération angulaire α du volant.

INDICE

Outil : l'accélération angulaire est le coefficient directeur de la droite $\omega(t)$.

CORRIGÉ

Le coefficient directeur de la droite de modélisation vaut $7{,}99\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$. Le moment du couple n'est connu qu'avec deux chiffres significatifs ; on retient, et on emploie dans la suite :

$$\alpha \approx 8{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

Conclusion. L'accélération angulaire du volant vaut $\alpha \approx 8{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

4.

Écrire pour le volant la relation fondamentale de la dynamique en rotation, puis en déduire son moment d'inertie J_Δ.

INDICE

Outil : faire le bilan des moments : le poids et la réaction de l'axe passent par l'axe.

CORRIGÉ

Système : le volant ; référentiel terrestre, supposé galiléen. Le poids et la réaction de l'axe ont un moment nul ; les frottements sont négligés. La relation fondamentale de la dynamique en rotation s'écrit $\mathcal{M}_m = J_\Delta\,\alpha$:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \frac{\mathcal{M}_m}{\alpha} \\ &= \frac{0{,}36}{8{,}0} \\ &\approx 4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \end{aligned}$$

Conclusion. Le moment d'inertie mesuré du volant vaut $J_\Delta \approx 4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

5.

Le volant est un disque homogène de masse $m = 4{,}0\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 15\,\mathrm{cm}$, de moment d'inertie $\frac{1}{2}m\,R^2$. Comparer cette valeur à la valeur mesurée.

INDICE

Point délicat : convertir le rayon en mètres avant de l'élever au carré.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \tfrac{1}{2}m\,R^2 \\ &= 0{,}5 \times 4{,}0 \times 0{,}15^2 \\ &= 4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \end{aligned}$$

Les deux valeurs sont égales avec deux chiffres significatifs : l'hypothèse de frottements négligeables est compatible avec les mesures.

Conclusion. Le moment d'inertie calculé, $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, est égal à la valeur mesurée à la précision des données.

Exercice 4

Arrêt du volant d'une presse par un frein à sabot

Le volant d'une presse tourne autour d'un axe fixe horizontal Δ. Pour l'arrêter, on coupe le moteur et on applique un sabot contre sa jante. Le sabot exerce sur la jante une force pressante $\vec{f}_n$, normale à la jante, et une force de frottement $\vec{f}$, tangente à la jante.

Document. Données du volant et du frein ; le sens positif est celui de la rotation.

Grandeur	Valeur
moment d'inertie du volant	$J_\Delta = 84{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$
vitesse angulaire au début du freinage	$\omega_0 = 30{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
force tangentielle du sabot sur la jante	$f = 450\,\mathrm{N}$
rayon de la jante	$R = 0{,}600\,\mathrm{m}$
couple de frottement des paliers, constant	$\mathcal{M}_p = -12{,}0\,\mathrm{N\cdot m}$

1.

Faire le bilan des actions extérieures exercées sur le volant pendant le freinage et calculer le moment de chacune par rapport à Δ.

INDICE

Outil : le moment d'une force tangente à la jante vaut, en valeur absolue, son intensité multipliée par R ; son signe dépend du sens de rotation qu'elle tend à provoquer.

CORRIGÉ

Le volant subit son poids et la réaction de l'axe, dont les droites d'action rencontrent l'axe : leurs moments sont nuls. La force pressante $\vec{f}_n$ du sabot, normale à la jante, est radiale : sa droite d'action rencontre l'axe, donc son moment est nul.

Il subit aussi le couple de frottement des paliers, $\mathcal{M}_p = -12{,}0\,\mathrm{N\cdot m}$, et la force tangentielle $\vec{f}$ du sabot, opposée au sens de rotation :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) &= -f\,R \\ &= -450 \times 0{,}600 \\ &= -270\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. Seuls la force tangentielle du sabot, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = -270\,\mathrm{N\cdot m}$, et les paliers, $\mathcal{M}_p = -12{,}0\,\mathrm{N\cdot m}$, exercent un moment non nul.

2.

Montrer que l'accélération angulaire du volant s'écrit $\alpha = \dfrac{\mathcal{M}_p - f\,R}{J_\Delta}$, puis la calculer.

INDICE

Outil : dans un référentiel galiléen, $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta\,\alpha$.

CORRIGÉ

Système : le volant ; référentiel terrestre, supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $-f\,R + \mathcal{M}_p = J_\Delta\,\alpha$, d'où :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\mathcal{M}_p - f\,R}{J_\Delta}\\ \alpha &= \frac{-12{,}0 - 270}{84{,}0}\\ &\approx -3{,}36\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

Conclusion. L'accélération angulaire du volant pendant le freinage vaut $\alpha \approx -3{,}36\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

3.

Calculer la durée du freinage.

INDICE

Outil : l'accélération angulaire est constante : $\omega(t) = \alpha\,t + \omega_0$ s'annule à l'arrêt.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}t_a &= -\frac{\omega_0}{\alpha}\\ &= \frac{30{,}0}{3{,}357}\\ &\approx 8{,}94\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Conclusion. Le volant s'arrête au bout de $t_a \approx 8{,}94\,\mathrm{s}$.

4.

Calculer le nombre de tours effectués par le volant pendant le freinage.

INDICE

Outil : $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$, avec $\omega = 0$ à l'arrêt.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= -\frac{\omega_0^2}{2\alpha}\\ &= \frac{30{,}0^2}{2\times 3{,}357}\\ &\approx 134\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \approx 21{,}3$$

Conclusion. Pendant le freinage, le volant fait environ $21{,}3$ tours.

5.

Sans le sabot, seuls les paliers ralentiraient le volant. Calculer la durée de l'arrêt dans ce cas et conclure sur le rôle du sabot.

INDICE

Ensuite : reprendre la relation fondamentale avec le seul couple des paliers, puis la durée de l'arrêt.

CORRIGÉ

Avec le seul couple des paliers, $\alpha' = \dfrac{\mathcal{M}_p}{J_\Delta}$ et la durée de l'arrêt devient :

$$\begin{aligned} t'_a &= -\frac{\omega_0\, J_\Delta}{\mathcal{M}_p} \\ &= \frac{30{,}0 \times 84{,}0}{12{,}0} \\ &= 2{,}10 \times 10^{2}\ \text{s} \end{aligned}$$

Conclusion. Sans sabot, l'arrêt durerait environ $2{,}10 \times 10^{2}\ \text{s}$ au lieu de $8{,}94\,\text{s}$: presque tout le freinage est dû au sabot.

Exercice 5

Couple de frottement d'un ventilateur qui ralentit

Le grand ventilateur d'une serre a pour moment d'inertie $J_\Delta = 0{,}48\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ par rapport à son axe fixe Δ.

À $t = 0$, on coupe le moteur. L'hélice ne subit plus alors que son poids, la réaction de l'axe, de moments nuls, et un couple de frottement de moment $\mathcal{M}_f$. On mesure sa vitesse angulaire pendant le ralentissement.

Document. Vitesse angulaire de l'hélice après la coupure du moteur.

t (s)	ω ($\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$)
0	$25{,}0$
$4{,}0$	$19{,}0$
$8{,}0$	$13{,}0$
$12{,}0$	$7{,}0$
$16{,}0$	$1{,}0$

1.

Proposer une méthode simple pour mesurer la vitesse angulaire de l'hélice à un instant donné.

INDICE

Début : quelle durée, liée à la rotation de l'hélice, un capteur peut-il mesurer simplement ?

CORRIGÉ

On colle un adhésif réfléchissant sur une pale. Un capteur optique, relié à un chronomètre électronique, détecte chaque passage de l'adhésif et mesure la durée T_1 d'un tour. On en déduit $\omega \approx \dfrac{2\pi}{T_1}$.

Cette mesure vaut à l'instant considéré si ω varie peu pendant un tour.

Conclusion. La durée d'un tour, mesurée par un capteur optique, donne la vitesse angulaire, $\omega \approx \dfrac{2\pi}{T_1}$.

2.

Montrer que les mesures sont compatibles avec un moment de frottement constant.

INDICE

Ensuite : une accélération angulaire constante, avec un moment d'inertie fixé, impose une somme des moments constante.

CORRIGÉ

Toutes les $4{,}0\,\mathrm{s}$, ω diminue de $6{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$: ω est une fonction affine du temps et l'accélération angulaire α est constante.

Système : l'hélice ; référentiel terrestre, supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique en rotation s'écrit $\mathcal{M}_f = J_\Delta\,\alpha$: J_Δ et α sont constants, donc $\mathcal{M}_f$ l'est aussi.

Conclusion. Les mesures sont compatibles avec un moment de frottement constant.

3.

Calculer l'accélération angulaire de l'hélice, puis le moment $\mathcal{M}_f$ du couple de frottement.

INDICE

Outil : $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ entre deux mesures éloignées, puis $\mathcal{M}_f = J_\Delta\,\alpha$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1{,}0 - 25{,}0}{16{,}0}\\ &= -1{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f &= J_\Delta\,\alpha\\ &= 0{,}48 \times (-1{,}5)\\ &\approx -0{,}72\,\mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Conclusion. L'accélération angulaire vaut $\alpha = -1{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$ et le moment du couple de frottement $\mathcal{M}_f \approx -0{,}72\,\mathrm{N\cdot m}$.

4.

À quel instant l'hélice s'arrête-t-elle ?

INDICE

Outil : $\omega(t) = \alpha\,t + \omega_0$ s'annule à l'arrêt.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned}t_a &= -\frac{\omega_0}{\alpha}\\ &= \frac{25{,}0}{1{,}5}\\ &\approx 17\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Conclusion. L'hélice s'arrête environ $17\,\mathrm{s}$ après la coupure du moteur.

5.

Le moteur remis en marche, l'hélice tourne à vitesse angulaire constante. Calculer le moment du couple moteur, en supposant le couple de frottement inchangé.

INDICE

Outil : en rotation uniforme, $\alpha = 0$: la somme des moments est nulle.

CORRIGÉ

En rotation uniforme, la relation fondamentale de la dynamique en rotation donne $\mathcal{M}_m + \mathcal{M}_f = 0$:

$$\mathcal{M}_m = -\mathcal{M}_f \approx 0{,}72\,\mathrm{N\cdot m}$$

Conclusion. Pour maintenir une vitesse angulaire constante, le moteur exerce un couple de moment $\mathcal{M}_m \approx 0{,}72\,\mathrm{N\cdot m}$.

Exercice 6

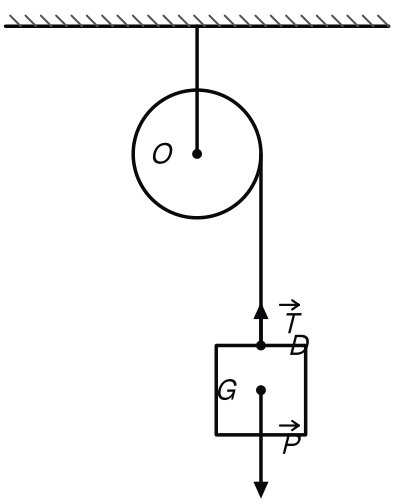
Descente d'une charge suspendue à un treuil

Sur un chantier, une charge (S) de masse $m = 40\,\mathrm{kg}$ est suspendue à un câble inextensible, de masse négligeable, enroulé sans glisser sur le tambour d'un treuil.

Le tambour, de rayon $r = 0{,}15\,\mathrm{m}$ et de moment d'inertie $J_\Delta = 0{,}60\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, tourne sans frottement autour d'un axe fixe horizontal Δ. Frein desserré et moteur débrayé, la charge part du repos et descend.

On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre, supposé galiléen ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document. Schéma du treuil et des forces exercées sur la charge.



Treuil de chantier et charge suspendue

1.

Appliquer la deuxième loi de Newton à la charge (S), sur un axe vertical orienté vers le bas.

INDICE

Outil : la charge subit son poids et la tension du câble ; projeter $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$ sur l'axe vertical.

CORRIGÉ

Système : la charge (S) ; référentiel terrestre, supposé galiléen. Elle subit son poids $\vec{P}$, vers le bas, et la tension $\vec{T}$ du câble, vers le haut. Sur l'axe vertical orienté vers le bas :

$$m\,g - T = m\,a$$

Conclusion. La deuxième loi de Newton appliquée à la charge donne $m\,g - T = m\,a$.

2.

Écrire, pour le tambour, la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

INDICE

Point délicat : le câble de masse négligeable exerce sur le tambour une force de même intensité T que sur la charge ; le poids du tambour et la réaction de l'axe ont un moment nul.

CORRIGÉ

Système : le tambour ; même référentiel. On oriente la rotation dans le sens où la charge descend. Le poids du tambour et la réaction de l'axe ont un moment nul. Le câble, de masse négligeable, exerce une force d'intensité T, tangente au tambour, de moment $+T\,r$:

$$T\,r = J_\Delta\,\alpha$$

Conclusion. La relation fondamentale de la dynamique en rotation appliquée au tambour s'écrit $T\,r = J_\Delta\,\alpha$.

3.

En utilisant la relation de liaison, montrer que l'accélération de la charge s'écrit $a = \dfrac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$.

INDICE

Ensuite : le câble inextensible ne glisse pas : $a = r\,\alpha$. Exprimer T en fonction de a, puis reporter dans la relation de la charge.

CORRIGÉ

Le câble est inextensible et ne glisse pas sur le tambour : $a = r\,\alpha$. La relation du tambour donne alors $T = \dfrac{J_\Delta\,\alpha}{r} = \dfrac{J_\Delta}{r^2}\,a$.

En reportant dans $m\,g - T = m\,a$, on obtient $m\,g = \left(m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}\right) a$:

$$a = \frac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$$

Conclusion. L'accélération de la charge s'écrit $a = \dfrac{m\,g}{m + J_\Delta / r^2}$: elle est constante et inférieure à g.

4.

Calculer l'accélération a de la charge et la tension T du câble.

INDICE

Outil : calculer d'abord $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$, en kilogrammes, puis $T = m\,(g - a)$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \frac{J_\Delta}{r^2} &= \frac{0{,}60}{0{,}15^2} \\ &\approx 26{,}7\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{40 \times 9{,}80}{40 + 26{,}7} \\ &\approx 5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= m\,(g - a) \\ &= 40 \times (9{,}80 - 5{,}88) \\ &\approx 1{,}6 \times 10^{2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Conclusion. La charge descend avec $a \approx 5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; la tension du câble vaut $T \approx 1{,}6 \times 10^{2}\,\mathrm{N}$, inférieure au poids de la charge.

5.

Calculer la vitesse de la charge, puis la vitesse angulaire du tambour, après une descente de $2{,}0\,\mathrm{m}$ depuis le repos.

INDICE

Outil : pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré partant du repos, $v^2 = 2\,a\,h$; puis $v = r\,\omega$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2\,a\,h} \\ &= \sqrt{2 \times 5{,}88 \times 2{,}0} \\ &\approx 4{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v}{r} \\ &= \frac{4{,}85}{0{,}15} \\ &\approx 32\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. Après $2{,}0\,\mathrm{m}$ de descente, la charge va à $v \approx 4{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et le tambour tourne à $\omega \approx 32\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Exercice 7

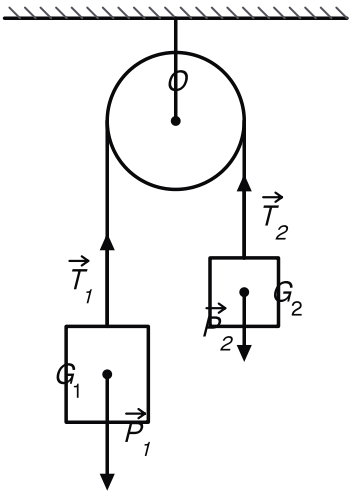
Monte-plats à contrepoids sur une poulie

Dans un restaurant, un monte-plats est formé d'un plateau chargé (S_1), de masse $m_1 = 15{,}0\,\text{kg}$, et d'un contrepoids (S_2), de masse $m_2 = 9{,}00\,\text{kg}$, suspendus aux deux extrémités d'un câble inextensible, de masse négligeable, qui passe sans glisser sur une poulie.

La poulie, de rayon $r = 0{,}100\,\text{m}$ et de moment d'inertie $J_\Delta = 6{,}00 \times 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, tourne sans frottement autour d'un axe fixe horizontal Δ. Libéré sans vitesse, le plateau descend.

Référentiel terrestre, supposé galiléen ; $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On note T_1 et T_2 les tensions du câble du côté du plateau et du côté du contrepoids.

Document. Schéma de la poulie, des deux charges et des forces qu'elles subissent.



Poulie du monte-plats et ses deux charges

1.

Appliquer la deuxième loi de Newton à chacune des deux charges, en orientant chaque axe vertical dans le sens de son mouvement.

INDICE

Outil : le câble est inextensible : les deux charges ont, à chaque instant, des accélérations de même valeur a.

CORRIGÉ

Système (S_1) ; référentiel terrestre, supposé galiléen ; axe vertical vers le bas. Le plateau subit son poids et la tension T_1 :

$$m_1\,g - T_1 = m_1\,a$$

Système (S_2) ; même référentiel ; axe vertical vers le haut. Le contrepoids subit son poids et la tension T_2 :

$$T_2 - m_2\,g = m_2\,a$$

Conclusion. Les deux relations sont $m_1\,g - T_1 = m_1\,a$ et $T_2 - m_2\,g = m_2\,a$, avec la même accélération a.

2.

Écrire la relation fondamentale de la dynamique en rotation pour la poulie, puis la relation de liaison.

INDICE

Point délicat : le câble exerce sur la poulie, de part et d'autre, des forces d'intensités T_1 et T_2 dont les moments sont de signes opposés.

CORRIGÉ

Système : la poulie ; même référentiel ; sens positif, celui où le plateau descend. Son poids et la réaction de l'axe ont un moment nul ; le câble exerce, à la distance r de l'axe, une force d'intensité T_1 de moment $+T_1\,r$ et une force d'intensité T_2 de moment $-T_2\,r$:

$$(T_1 - T_2)\,r = J_\Delta\,\alpha$$

Le câble est inextensible et ne glisse pas sur la poulie : $a = r\,\alpha$.

Conclusion. La poulie vérifie $(T_1 - T_2)\,r = J_\Delta\,\alpha$, avec la relation de liaison $a = r\,\alpha$.

3.

Montrer que $a = \dfrac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$, puis calculer a.

INDICE

Ensuite : additionner les deux relations des charges pour éliminer T_1 et T_2 séparément, puis remplacer $T_1 - T_2$ par son expression tirée de la poulie.

CORRIGÉ

La somme des relations des deux charges donne $(m_1 - m_2)\,g - (T_1 - T_2) = (m_1 + m_2)\,a$. La poulie et la liaison donnent $T_1 - T_2 = \dfrac{J_\Delta\,\alpha}{r} = \dfrac{J_\Delta}{r^2}\,a$. D'où :

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$$

Avec $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = \dfrac{6{,}00 \times 10^{-2}}{0{,}100^2} = 6{,}00\,\mathrm{kg}$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{6{,}00 \times 9{,}80}{30{,}0} \\ &= 1{,}96\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Conclusion. Le plateau descend avec l'accélération constante $a = 1{,}96\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4.

Calculer les tensions T_1 et T_2 et expliquer pourquoi elles diffèrent.

INDICE

Outil : reprendre chacune des relations de la question 1.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1\,(g - a) \\ &= 15{,}0 \times 7{,}84 \\ &\approx 118\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= m_2\,(g + a) \\ &= 9{,}00 \times 11{,}76 \\ &\approx 106\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

La poulie a un moment d'inertie non nul et une accélération angulaire non nulle : la somme des moments $(T_1 - T_2)\,r$ n'est pas nulle, donc $T_1 \neq T_2$.

Conclusion. $T_1 \approx 118\,\mathrm{N}$ et $T_2 \approx 106\,\mathrm{N}$: les tensions diffèrent parce qu'il faut un moment pour accélérer la rotation de la poulie.

5.

Pour contrôler ce résultat, on mesure au chronomètre à main la durée de descente du plateau sur $h = 0{,}800\,\mathrm{m}$ depuis le repos ; on trouve $0{,}92\,\mathrm{s}$. En déduire l'accélération mesurée, la comparer à la valeur calculée et proposer une amélioration de la mesure.

INDICE

Outil : départ au repos et accélération constante : $h = \tfrac{1}{2} a\, t^2$, donc $a = \dfrac{2h}{t^2}$.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{mes}} &= \frac{2h}{t^2} \\ &= \frac{2 \times 0{,}800}{0{,}92^2} \\ &\approx 1{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

L'accélération mesurée est inférieure d'environ 4 pour cent à la valeur calculée. Le déclenchement à la main du chronomètre introduit une erreur de l'ordre du dixième de seconde, et le modèle néglige les frottements.

Pour améliorer la mesure, on repère le passage du plateau par deux cellules photoélectriques reliées à un chronomètre électronique, ou on filme la descente, et on répète la mesure pour en faire la moyenne.

Conclusion. L'accélération mesurée, $a_{\mathrm{mes}} \approx 1{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, est voisine de la valeur calculée ; une mesure automatique et répétée de la durée réduirait l'écart.