BURHAN

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/rotation-d-un-solide-autour-d-un-axe-fixe/cours

Chapitre	Semestre
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	Semestre 2

Repérer un point du solide par son abscisse angulaire

Une valve qui tourne avec la roue

Un vélo est retourné sur sa selle et son guidon. On lance sa roue avant à la main. L'axe de la roue reste fixe : la roue est un **solide en rotation autour d'un axe fixe** Δ.

La valve est à $R = 0{,}33\ \text{m}$ de l'axe. Un catadioptre est fixé sur un rayon, à $0{,}15\ \text{m}$ de l'axe. Chacun décrit un cercle centré sur l'axe.

Devine : Un quart de tour pour la valve et le catadioptre

La roue fait un quart de tour. Que peux-tu dire de l'angle balayé et de l'arc parcouru par la valve et par le catadioptre ?

A. Même angle, mais un arc plus long pour la valve.

Juste.

Oui. Les deux points tournent ensemble ; la valve, plus loin de l'axe, parcourt un plus grand arc.

B. Même arc, mais un angle plus grand pour le catadioptre.

Faux.

Faux. Les deux points sont liés au même solide : ils balaient le même angle.

C. Même angle et même arc pour les deux points.

Faux.

Faux. L'angle est commun, mais l'arc grandit avec la distance à l'axe.

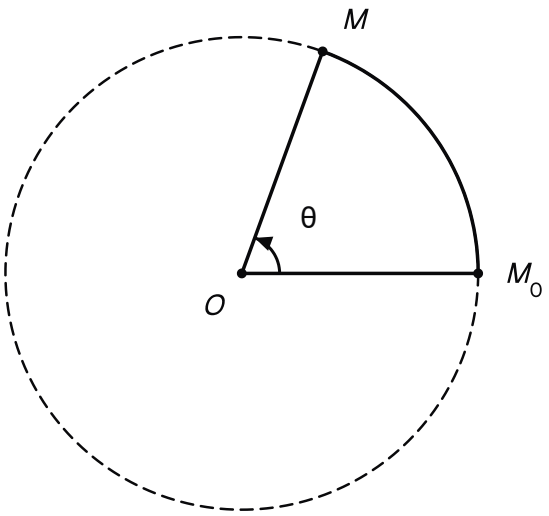
D. Un angle plus grand pour la valve, à la jante.

Faux.

Faux. Un solide indéformable tourne d'un seul bloc : un seul angle pour tous ses points.

Correction

Les deux points balaient le même angle, un quart de tour. L'arc parcouru vaut l'angle multiplié par la distance à l'axe : il est plus long pour la valve, à $0{,}33\ \text{m}$, que pour le catadioptre, à $0{,}15\ \text{m}$.



Roue vue de face : l'axe passe par O, la position M est repérée depuis l'origine M_0 par l'angle orienté θ et par l'arc M_0M.

Mesurer un arc en radians

Rappel. Sur un cercle de rayon R, un angle mesuré en radians est le rapport de l'arc intercepté au rayon. Un tour complet vaut 2π rad, et 180° valent π rad. C'est cette mesure qui relie l'angle d'un solide à la longueur parcourue par chacun de ses points.

Définition : Abscisse angulaire et abscisse curviligne

Un solide indéformable tourne autour d'un axe fixe Δ. Chaque point M du solide, à la distance R de l'axe, décrit un cercle de centre O situé sur Δ et de rayon R.

On oriente ce cercle et on choisit une origine M_0. L'**abscisse angulaire** de M à l'instant t est l'angle orienté

$$\theta(t) = \left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}\right),$$

exprimé en radians (rad). L'**abscisse curviligne** de M est la longueur orientée de l'arc M_0M :

$$s(t) = R\,\theta(t),$$

en mètres, avec θ en radians. Tous les points du solide ont, à chaque instant, la même abscisse angulaire mesurée depuis leurs origines respectives.

Exemple : Arc parcouru par la valve en deux tours et demi

La roue fait $2{,}5$ tours. On convertit d'abord l'angle en radians :

$$\theta = 2{,}5 \times 2\pi = 5\pi \text{ rad}$$

La valve est à $R = 0{,}33\ \text{m}$ de l'axe. Son abscisse curviligne vaut alors :

$$\begin{aligned} s &= R\,\theta \\ &= 0{,}33 \times 5\pi \\ &= 5{,}2\ \text{m} \end{aligned}$$

Le résultat garde deux chiffres significatifs, comme les données.

Origine, sens et signe de l'abscisse

L'origine M_0 et le sens positif se choisissent avant tout calcul, et se disent. Une rotation dans le sens choisi fait croître θ. Dans le sens contraire, θ diminue et peut devenir négative.

L'abscisse curviligne s suit le même signe que θ. Elle mesure la longueur parcourue tant que le sens de rotation ne change pas.

Vérifie : Un sixième de tour pour le catadioptre

Le catadioptre, à $0{,}15\ \text{m}$ de l'axe, tourne de $60°$. Quelle est la longueur de l'arc parcouru ?

A. $s = 0{,}16\ \text{m}$

Juste.
Oui. $60°$ valent $\frac{\pi}{3}\ \text{rad}$, et $0{,}15 \times \frac{\pi}{3} \approx 0{,}16\ \text{m}$.

B. $s = 9{,}0\ \text{m}$

Faux.
Faux. C'est $0{,}15 \times 60$: l'angle est resté en degrés, et la relation $s = R\,\theta$ exige des radians.

C. $s = 0{,}025\ \text{m}$

Faux.
Faux. C'est $\frac{60}{360} \times 0{,}15$: un sixième du rayon, et non un sixième du tour du cercle.

D. $s = 0{,}94\ \text{m}$

Faux.
Faux. C'est la longueur d'un tour entier, $2\pi \times 0{,}15$.

Correction
On convertit : $60° = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$. Puis :

$$\begin{aligned} s &= R\,\theta \\ &= 0{,}15 \times \frac{\pi}{3} \\ &= 0{,}16\ \text{m} \end{aligned}$$

Remarque : La valve et le catadioptre : même angle, arcs différents

L'abscisse angulaire décrit la roue entière : elle est la même pour la valve et pour le catadioptre. L'abscisse curviligne décrit un point : elle dépend de sa distance à l'axe. Un point situé sur l'axe a une abscisse curviligne toujours nulle.

Compter des tours à partir d'un arc

Le chemin inverse sert aussi. Connaissant l'arc parcouru s et la distance R à l'axe, on obtient $\theta = \dfrac{s}{R}$ en radians. Le nombre de tours vaut alors $\dfrac{\theta}{2\pi}$.

À toi : Douze mètres parcourus par la valve

La valve, à $R = 0{,}33\ \text{m}$ de l'axe, a parcouru un arc de $12\ \text{m}$ depuis le lancer, toujours dans le même sens. Calcule l'angle balayé en radians, puis le nombre de tours. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pars de l'abscisse curviligne : $s = R\,\theta$.
Indice 2
$\theta = \dfrac{12}{0{,}33}$, en radians.
Indice 3
Point délicat : un tour vaut $2\pi\ \text{rad}$. On divise par 2π, pas par 360.

Réponse
L'angle balayé vaut :

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{s}{R}\\ &= \frac{12}{0{,}33}\\ &= 36\ \text{rad}\end{aligned}$$

Le nombre de tours est $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{36{,}4}{2\pi}$, soit environ $5{,}8$ tours. On garde deux chiffres significatifs.

Mesurer la rotation : vitesse angulaire, vitesse d'un point

Deux pièces posées sur une platine

Une platine de tourne-disque tourne régulièrement à 45 tours par minute. On pose deux pièces sur son plateau : la pièce A à $5{,}0\ \text{cm}$ de l'axe, la pièce B à $15\ \text{cm}$. Elles ne glissent pas.

Devine : La pièce la plus rapide sur le plateau

Les deux pièces font chacune un tour en même temps. Laquelle va le plus vite ?

A. La pièce A, la plus proche de l'axe.
Faux.

Faux. Près de l'axe, le cercle parcouru en un tour est plus petit.

B. La pièce B, trois fois plus vite que A.

Juste.

Oui. En un tour, B parcourt un cercle de rayon triple, dans le même temps.

C. Aucune : elles tournent ensemble.

Faux.

Faux. Elles tournent du même angle, mais parcourent des longueurs différentes.

D. La pièce B, neuf fois plus vite que A.

Faux.

Faux. La longueur d'un tour est proportionnelle au rayon, pas à son carré.

Correction

En un tour, A parcourt $2\pi \times 5{,}0\ \mathrm{cm}$ et B parcourt $2\pi \times 15\ \mathrm{cm}$, dans la même durée. La vitesse de B est donc trois fois celle de A, alors que les deux pièces balaient le même angle chaque seconde.

Du tour par minute au radian par seconde

Définition : Vitesse angulaire et vitesse d'un point

La **vitesse angulaire** du solide à l'instant t est la dérivée de son abscisse angulaire par rapport au temps :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Elle est la même pour tous les points du solide. La vitesse d'un point M situé à la distance R de l'axe vaut

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\,\omega,$$

et le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ est tangent au cercle décrit par M. Une fréquence de rotation N en tours par seconde correspond à $\omega = 2\pi N$.

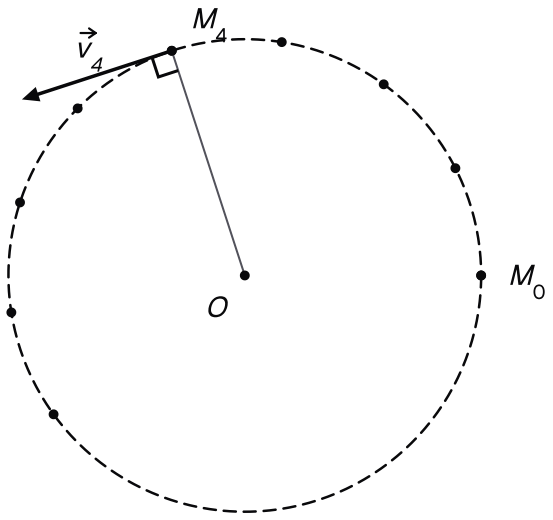
Exemple : Vitesse angulaire du plateau et vitesse de la pièce extérieure

La platine tourne à $N = 45\ \mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, soit $N = \dfrac{45}{60} = 0{,}75\ \mathrm{tr \cdot s^{-1}}$. Sa vitesse angulaire vaut :

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi N \\ &= 2\pi \times 0{,}75 \\ &= 4{,}7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

La pièce B est à $R = 0{,}15\ \mathrm{m}$ de l'axe :

$$
\begin{aligned}
v &= R\,\omega \\
&= 0{,}15 \times 4{,}71 \\
&= 0{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}
\end{aligned}
$$



Positions successives de la pièce B sur la platine, toutes les 0,10 s, et son vecteur vitesse tangent au cercle en M_4.

Lire une chronophotographie de rotation

Les positions sont prises à intervalles égaux, $\tau = 0{,}10\ \mathrm{s}$. Elles sont également espacées sur le cercle : l'angle balayé pendant chaque intervalle est le même, et la vitesse angulaire est constante. En chaque position, le vecteur vitesse est perpendiculaire au rayon.

Vérifie : Angle entre deux positions successives

La platine tourne à $\omega = 4{,}7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Quel angle sépare deux positions successives de la chrono-photographie, prises à $\tau = 0{,}10\ \mathrm{s}$ d'intervalle ?

A. $0{,}047\ \mathrm{rad}$

Faux.

Faux. C'est ω divisée par 100 : l'intervalle vaut un dixième de seconde, pas un centième.

B. $4{,}7\ \mathrm{rad}$

Faux.

Faux. C'est l'angle balayé en une seconde entière.

C. $0{,}47\ \mathrm{rad}$

Juste.

Oui. $\omega\,\tau = 4{,}7 \times 0{,}10 = 0{,}47\ \mathrm{rad}$, environ $27°$.

D. $47\ \mathrm{rad}$

Faux.
Faux. C'est ω multipliée par 10 au lieu de $0{,}10$.

Correction
Pendant τ, l'angle balayé vaut $\omega\,\tau = 4{,}7 \times 0{,}10 = 0{,}47\ \mathrm{rad}$. Sur la figure, deux positions successives sont séparées d'environ $27°$.

Chiffres significatifs d'une vitesse calculée

À retenir : La donnée la moins précise fixe la précision

Un résultat s'écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée la moins précise. Dans l'exemple de la platine, $0{,}15\ \mathrm{m}$ et $0{,}75\ \mathrm{tr \cdot s^{-1}}$ ont deux chiffres : la vitesse s'écrit $0{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Les valeurs intermédiaires gardent un chiffre de plus, pour ne pas cumuler les arrondis.

Vérifie : Écrire la vitesse de la pièce intérieure

La pièce A est à $0{,}050\ \mathrm{m}$ de l'axe. Le calcul $0{,}050 \times 4{,}71$ affiche $0{,}2355$. Quelle écriture du résultat est correcte ?

A. $v = 0{,}2355\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Faux.
Faux. Quatre chiffres : plus de précision que les données n'en donnent.

B. $v = 0{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Juste.
Oui. $0{,}050$ a deux chiffres significatifs, comme $0{,}75$: le résultat en garde deux.

C. $v = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Faux.
Faux. Un seul chiffre : de la précision est perdue.

D. $v = 0{,}236\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Faux.
Faux. Trois chiffres, alors que les données en ont deux.

Correction
Les zéros placés avant le 5 ne comptent pas : $0{,}050$ a deux chiffres significatifs. Le résultat s'écrit $v = 0{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Convertir avant de calculer

Méthode : Des tours par minute à la vitesse d'un point

1. **Repérer les unités.** Relever l'unité de chaque donnée : tours, degrés, minutes, centimètres.
2. **Convertir.** Exprimer les angles en radians, les durées en secondes, les distances en mètres.
3. **Calculer la vitesse angulaire.** Utiliser $\omega = 2\pi N$, avec N en tours par seconde.
4. **Calculer la vitesse du point.** Multiplier par la distance à l'axe : $v = R\,\omega$.
5. **Écrire le résultat.** Donner l'unité et le bon nombre de chiffres significatifs.

Attention : Les tours par minute ne sont pas des radians par seconde

Une meule tourne à $3{,}0 \times 10^{3}\ \text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

✗ « $\omega = 3{,}0 \times 10^{3}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ».

✓ On divise par 60 : $N = 50\ \text{tr} \cdot \text{s}^{-1}$. Puis $\omega = 2\pi \times 50$, soit $\omega \approx 3{,}1 \times 10^{2}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les relations $s = R\,\theta$ et $v = R\,\omega$ n'acceptent que des radians.

À toi : Vitesse angulaire de la roue lancée

Sur le vélo retourné, un point de la jante, à $R = 0{,}33\ \text{m}$ de l'axe, a une vitesse $v = 6{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcule la vitesse angulaire de la roue, puis sa fréquence de rotation en tours par seconde. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

La vitesse d'un point et la vitesse angulaire sont liées par $v = R\,\omega$.

Indice 2

$\omega = \dfrac{6{,}0}{0{,}33}$, puis $N = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Indice 3

Point délicat : on divise ω par 2π pour obtenir des tours ; on ne multiplie pas.

Réponse

La vitesse angulaire vaut :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v}{R} \\ &= \frac{6{,}0}{0{,}33} \\ &= 18\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

La fréquence de rotation vaut :

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{18{,}2}{2\pi} \\ &= 2{,}9\ \text{tr} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Accélération angulaire et composantes a_T et a_N

Une meule qui démarre puis tourne en régime

Une meule d'atelier a un rayon de $0{,}10\ \mathrm{m}$. À la mise en marche, sa vitesse angulaire augmente pendant quelques secondes. Ensuite, elle tourne en régime : sa vitesse angulaire reste constante.

Devine : Un grain de la meule en régime

La meule tourne en régime, à vitesse angulaire constante. Un grain de sa périphérie a-t-il une accélération ?

A. Non : sa vitesse angulaire ne change pas.

Faux.

Faux. La valeur de sa vitesse est constante, mais sa direction tourne sans cesse.

B. Oui, une accélération tangente au cercle.

Faux.

Faux. Une composante tangente ferait changer la valeur de la vitesse.

C. Oui, une accélération dirigée vers l'axe.

Juste.

Oui. La direction de la vitesse change : l'accélération est dirigée vers l'axe.

D. Seulement pendant la phase de démarrage.

Faux.

Faux. Au démarrage s'ajoute une composante tangente ; en régime, l'accélération vers l'axe demeure.

Correction

Même en régime, le vecteur vitesse du grain tourne avec lui. Son accélération n'est donc pas nulle : elle est dirigée vers l'axe. La loi qui suit en donne la valeur.

Projeter l'accélération sur la tangente et vers l'axe

Pourquoi est-ce vrai ? Le chapitre sur les lois de Newton a donné les coordonnées de l'accélération dans la base de Frenet : $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$. Pour un point du solide, le rayon reste constant et la trajectoire est un cercle. Il suffit d'y remplacer v par $R\,\omega$.

Propriété : Composantes tangentielle et normale de l'accélération d'un point

L'**accélération angulaire** du solide est $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$, en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Dans la base de Frenet $(M, \vec{u}, \vec{n})$, l'accélération d'un point M à la distance R de l'axe a pour coordonnées

$$a_T = R\,\alpha \qquad a_N = R\,\omega^2.$$

La composante normale est dirigée vers l'axe ; elle vaut aussi $\dfrac{v^2}{R}$.

Démonstration

Étape 1. Vitesse du point. D'après la définition de la vitesse angulaire, $v = R\,\omega$, car R est constant.

Étape 2. Composante tangentielle. Les coordonnées de l'accélération dans la base de Frenet, vues au chapitre Lois de Newton, donnent $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Comme R est constant :

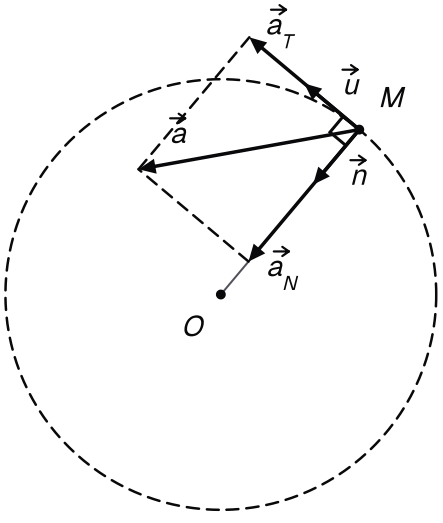
$$a_T = R\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\,\alpha.$$

Étape 3. Composante normale. Le rayon de courbure de la trajectoire circulaire est R, donc $a_N = \dfrac{v^2}{R}$. En remplaçant v par $R\,\omega$:

$$a_N = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\,\omega^2.$$

À retenir : Le geste de la preuve des deux composantes

Le rayon R est constant : il sort de la dérivée, et $\dfrac{\mathrm{d}(R\,\omega)}{\mathrm{d}t} = R\,\alpha$. Le rayon de courbure du cercle vaut $\rho = R$: la composante normale devient $\dfrac{(R\,\omega)^2}{R} = R\,\omega^2$.



Point M de la meule sur sa trajectoire circulaire : base de Frenet, composante tangentielle a_T et composante normale a_N dirigée vers l'axe O.

Exemple : Accélération d'un grain de la meule pendant le démarrage

À un instant du démarrage, $\omega = 120\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\alpha = 25\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$. Un grain de la périphérie est à $R = 0{,}10\ \mathrm{m}$ de l'axe.

$$\begin{aligned} a_T &= R\,\alpha \\ &= 0{,}10 \times 25 \\ &= 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= R\,\omega^2 \\ &= 0{,}10 \times 120^2 \\ &= 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Comparer les points d'un même solide

L'accélération du grain a pour valeur $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$. Ici a_N est près de six cents fois plus grande que a_T : $a \approx 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, presque dirigée vers l'axe.

Vérifie : Un grain à mi-distance de l'axe

Au même instant, un grain est à $0{,}050\ \mathrm{m}$ de l'axe, deux fois plus près. Que vaut sa composante normale a_N ?

A. $1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Faux.

Faux. ω est commune, mais $a_N = R\,\omega^2$ dépend de R.

B. $3{,}6 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Faux.

Faux. C'est diviser par quatre : R intervient au premier degré, pas au carré.

C. $2{,}9 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Faux.

Faux. Plus près de l'axe, a_N diminue.

D. $7{,}2 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Juste.

Oui. $0{,}050 \times 120^2 = 720\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$: la moitié.

Correction

La vitesse angulaire est la même pour tous les points. Donc :

$$\begin{aligned} a_N &= R\,\omega^2 \\ &= 0{,}050 \times 120^2 \\ &= 7{,}2 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Vérifie : L'instant de la mise en marche

À l'instant exact de la mise en marche, $\omega = 0$ et $\alpha = 25\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$. Que dire de l'accélération d'un grain de la périphérie ?

A. Elle est nulle, car la meule est encore immobile.

Faux.

Faux. α n'est pas nulle : $a_T = R\,\alpha$ non plus.

B. Elle est tangente au cercle et vaut $2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Juste.

Oui. $a_N = R\,\omega^2 = 0$ et $a_T = 0{,}10 \times 25 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

C. Elle est dirigée vers l'axe de la meule.

Faux.

Faux. La composante vers l'axe, $R\,\omega^2$, est nulle quand $\omega = 0$.

Correction

Avec $\omega = 0$, la composante normale $R\,\omega^2$ est nulle. Il reste $a_T = R\,\alpha = 0{,}10 \times 25 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$: l'accélération est tangente au cercle.

Attention : Une seule accélération angulaire, une accélération par point

✗ « La meule tourne à vitesse angulaire constante : ses points ne sont pas accélérés. »

✓ α est nulle, mais chaque point hors de l'axe garde $a_N = R\,\omega^2$, dirigée vers l'axe.

✗ « Tous les points de la meule ont la même accélération. »

✓ a_T et a_N sont proportionnelles à R : seul un point de l'axe n'est pas accéléré.

À toi : Une pièce sur la platine qui démarre

Au démarrage de la platine, à un instant donné, $\omega = 3{,}0\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\alpha = 2{,}4\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$. Une pièce est posée à $0{,}12\ \mathrm{m}$ de l'axe. Calcule a_T et a_N. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les deux composantes sont $a_T = R\,\alpha$ et $a_N = R\,\omega^2$.

Indice 2

$a_T = 0{,}12 \times 2{,}4$ et $a_N = 0{,}12 \times 3{,}0^2$.

Indice 3

Point délicat : a_N utilise ω au carré, pas α.

Réponse

$$\begin{aligned} a_T &= R\,\alpha \\ &= 0{,}12 \times 2{,}4 \\ &= 0{,}29\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= R\,\omega^2 \\ &= 0{,}12 \times 3{,}0^2 \\ &= 1{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

La composante normale l'emporte déjà sur la composante tangentielle.

Rotation uniforme et rotation uniformément variée

Enregistrer la vitesse angulaire de la meule

Un capteur relève la vitesse angulaire de la meule depuis sa mise en marche. Partie du repos, elle atteint $150\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ en $6{,}0\ \mathrm{s}$, en gagnant la même vitesse angulaire chaque seconde. Elle tourne ensuite en régime jusqu'à $t = 10\ \mathrm{s}$.

Devine : Allure de la courbe de la vitesse angulaire

À quoi ressemble la courbe $\omega(t)$ de la meule entre 0 et $10\ \mathrm{s}$?

A. Un arc de parabole, puis une droite oblique.

Faux.

Faux. Un gain égal chaque seconde donne une droite, pas une parabole.

B. Une droite horizontale, puis une droite oblique.

Faux.

Faux. C'est l'ordre inverse : la meule accélère d'abord.

C. Une droite oblique, puis une droite horizontale.

Juste.

Oui. Le gain constant donne une droite qui monte ; le régime, une droite horizontale.

D. Une seule droite qui passe par l'origine.

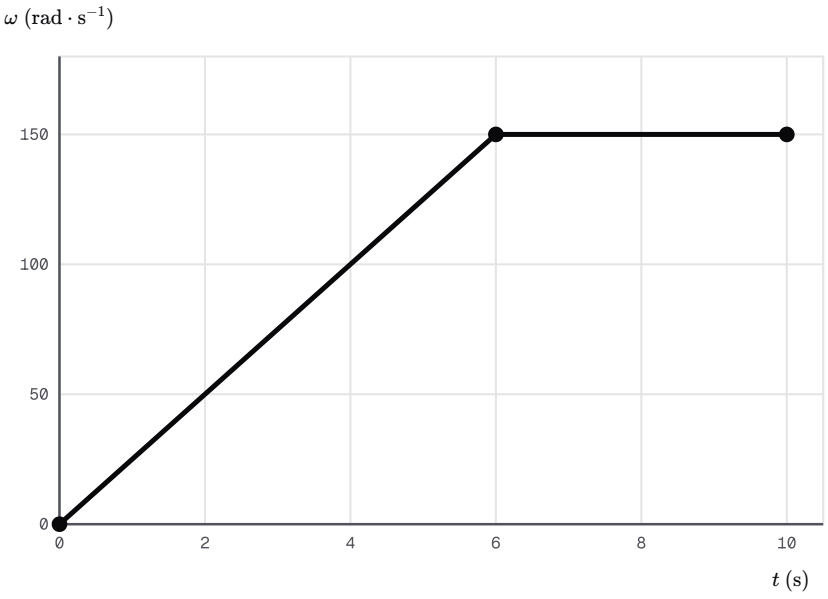
Faux.

Faux. Après six secondes, la vitesse angulaire ne change plus.

Correction

De 0 à $6{,}0\ \mathrm{s}$, ω augmente de la même quantité chaque seconde : la courbe est une droite oblique.

De $6{,}0$ à $10\ \mathrm{s}$, ω reste égale à $150\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: la courbe est une droite horizontale.



Vitesse angulaire de la meule : droite oblique pendant le démarrage, de 0 à 6,0 s, puis droite horizontale pendant le régime.

Vitesse angulaire constante et période

Propriété : Équation horaire de la rotation uniforme

Un solide est en **rotation uniforme** autour d'un axe fixe lorsque sa vitesse angulaire ω est constante. Son abscisse angulaire est alors

$$\theta(t) = \omega\, t + \theta_0,$$

où θ_0 est l'abscisse angulaire à $t = 0$. Le mouvement est périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration

Étape 1. Primitive. On a $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$ avec ω constante. Les primitives de la fonction constante $t \mapsto \omega$ sont les fonctions $t \mapsto \omega\, t + k$, k réel.

Étape 2. Condition initiale. À $t = 0$, $\theta(0) = k = \theta_0$, d'où $\theta(t) = \omega\, t + \theta_0$.

Étape 3. Période. Un tour correspond à un accroissement de 2π de l'abscisse angulaire : $\omega\, T = 2\pi$, d'où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

À retenir : Le geste de la preuve de la rotation uniforme

La dérivée de θ est une constante ω. On en prend une primitive, $\omega\, t + k$, et la condition initiale fixe $k = \theta_0$. La période vient de ce qu'un tour ajoute 2π à l'abscisse angulaire.

Exemple : Angle balayé et période pendant le régime

Entre $6{,}0\ \text{s}$ et $10\ \text{s}$, la meule tourne à $\omega = 150\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \omega\,\Delta t\\ &= 150 \times 4{,}0\\ &= 6{,}0\times 10^{2}\ \text{rad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega}\\ &= \frac{2\pi}{150}\\ &= 4{,}2\times 10^{-2}\ \text{s}\end{aligned}$$

Accélération angulaire constante

Propriété : Équations horaires de la rotation uniformément variée

Un solide est en **rotation uniformément variée** lorsque son accélération angulaire α est constante et non nulle. Avec ω_0 et θ_0 les valeurs à $t = 0$:

$$\omega(t) = \alpha\, t + \omega_0$$

$$\theta(t) = \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0\, t + \theta_0$$

et, entre deux instants quelconques,

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,(\theta - \theta_0)\,.$$

La courbe $\omega(t)$ est une droite de coefficient directeur α.

Démonstration

Étape 1. Vitesse angulaire. $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$, constante : $\omega(t) = \alpha\, t + k_1$, et $\omega(0) = \omega_0$ donne $k_1 = \omega_0$.

Étape 2. Abscisse angulaire. $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \alpha\, t + \omega_0$: une primitive est $\tfrac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0\, t$, donc $\theta(t) = \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0\, t + k_2$, et $\theta(0) = \theta_0$ donne $k_2 = \theta_0$.

Étape 3. Relation indépendante du temps. De l'étape 1, $t = \dfrac{\omega - \omega_0}{\alpha}$. En reportant dans l'étape 2 :

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha} + \frac{\omega_0(\omega-\omega_0)}{\alpha}\\ &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}\end{aligned}$$

d'où $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$.

À retenir : Le geste de la preuve de la rotation variée

Deux primitives successives, et deux conditions initiales : ω_0 fixe la première constante, θ_0 la seconde. La relation sans le temps s'obtient en tirant t de l'équation de ω et en le reportant dans celle de θ.

Exemple : Angle balayé pendant le démarrage de la meule

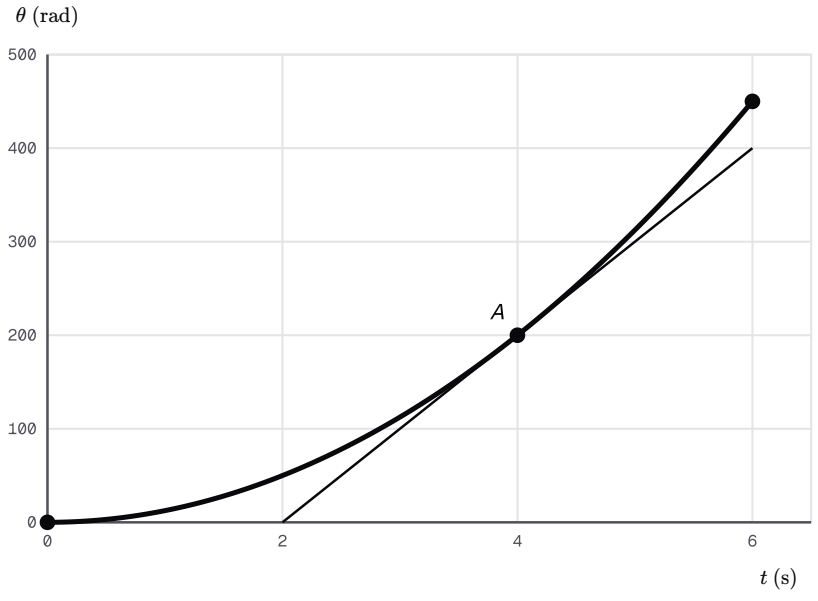
L'accélération angulaire est le coefficient directeur de la droite :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\\ &= \frac{150}{6{,}0}\\ &= 25\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Partie du repos avec $\theta_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\theta &= \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2\\ &= \tfrac{1}{2}\times 25\times 6{,}0^2\\ &= 4{,}5\times 10^2\ \text{rad}\end{aligned}$$

Soit $\dfrac{450}{2\pi}$, environ 72 tours. Contrôle : $\omega^2 = 2\alpha\,\theta$ donne $150^2 = 2\times 25\times 450$.



Abscisse angulaire de la meule pendant le démarrage : arc de parabole et tangente en t = 4,0 s, dont la pente vaut la vitesse angulaire.

Tangente calculée en x = 4 : coefficient directeur ≈ 100.

Lire la courbe de la vitesse angulaire

Méthode : Exploiter une courbe de la vitesse angulaire

1. **Reconnaître la forme.** Droite horizontale : rotation uniforme. Droite oblique : rotation uniformément variée.
2. **Lire l'ordonnée à l'origine.** Elle donne ω_0, la vitesse angulaire à $t = 0$.
3. **Calculer la pente.** Choisir deux points éloignés de la droite et calculer $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.
4. **Conclure sur la nature.** Si ω et α ont le même signe, la rotation est accélérée ; de signes contraires, elle est ralentie.
5. **Écrire les équations horaires.** Reporter ω_0 et α dans les équations de la rotation.

Vérifie : Une droite qui descend

Sur une autre courbe, ω passe de $40\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à $10\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ en $5{,}0\ \text{s}$, en ligne droite. Quelle conclusion est juste ?

A. Accélérée, $\alpha = 6{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

Faux.

Faux. La vitesse angulaire diminue : la pente est négative.

B. Ralentie, $\alpha = -6{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

Juste.

Oui. $\alpha = \dfrac{10 - 40}{5{,}0} = -6{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, de signe contraire à ω.

C. Uniforme, car la courbe est une droite.

Faux.

Faux. Une droite oblique signale une rotation uniformément variée.

D. Ralentie, $\alpha = -2{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

Faux.

Faux. C'est la valeur finale divisée par la durée, pas la variation.

Correction

La courbe est une droite oblique : la rotation est uniformément variée.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \\ &= \frac{10 - 40}{5{,}0} \\ &= -6{,}0\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

ω est positive et α négative : la rotation est ralentie.

Vérifie : Vitesse angulaire après deux cents radians

La meule part du repos avec $\alpha = 25\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$. Quelle est sa vitesse angulaire quand elle a balayé $200\ \mathrm{rad}$?

A. $1{,}0 \times 10^{4}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. C'est ω^2 : il reste à prendre la racine carrée.

B. $71\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. C'est $\sqrt{25 \times 200}$: le facteur 2 de la relation est oublié.

C. $1{,}0 \times 10^{2}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

Juste.

Oui. $\omega^2 = 2 \times 25 \times 200 = 1{,}0 \times 10^{4}$, d'où $\omega = 100\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

D. $5{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. C'est $\alpha\,\theta$: ni le facteur 2, ni la racine.

Correction

Sans la durée, on utilise la relation indépendante du temps, avec $\omega_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= 2\alpha\,\theta \\ &= 2 \times 25 \times 200 \\ &= 1{,}0 \times 10^{4}\end{aligned}$$

D'où $\omega = 1{,}0 \times 10^{2}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

À toi : Arrêt de la meule après coupure du moteur

On coupe le moteur de la meule, qui tourne à $150\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Elle s'arrête en $15\ \mathrm{s}$, d'un mouvement uniformément ralenti. Calcule α, puis l'angle balayé pendant le freinage et le nombre de tours correspondant. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

À l'arrêt, $\omega = 0$: $\alpha = \dfrac{0 - 150}{15}$.

Indice 2

Avec la relation indépendante du temps : $0 - 150^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$.

Indice 3

Point délicat : α est négative, et $\Delta\theta$ doit sortir positive.

Réponse

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{0 - 150}{15} \\ &= -10\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{0-\omega_0^2}{2\alpha}\\ &= \frac{-150^2}{-20}\\ &= 1{,}1\times 10^{3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

Soit $\dfrac{1\,125}{2\pi}$, environ $1{,}8\times 10^{2}$ tours avant l'arrêt.

Moment d'une force et moment d'inertie par rapport à l'axe

Pousser la roue pour la mettre en rotation

La roue du vélo retourné est immobile. On pousse la valve avec une force de $12\ \text{N}$, toujours perpendiculaire à l'axe de la roue. Seule la direction de la poussée change d'un essai à l'autre.

Devine : La poussée qui met la roue en rotation

Quelle poussée met la roue en rotation ?

A. Une poussée dirigée vers l'axe de la roue.

Faux.

Faux. Sa droite d'action passe par l'axe : la roue ne tourne pas.

B. Les deux poussées, puisqu'elles valent toutes deux 12 N.

Faux.

Faux. La valeur ne suffit pas : la position de la droite d'action compte.

C. Une poussée tangente à la jante.

Juste.

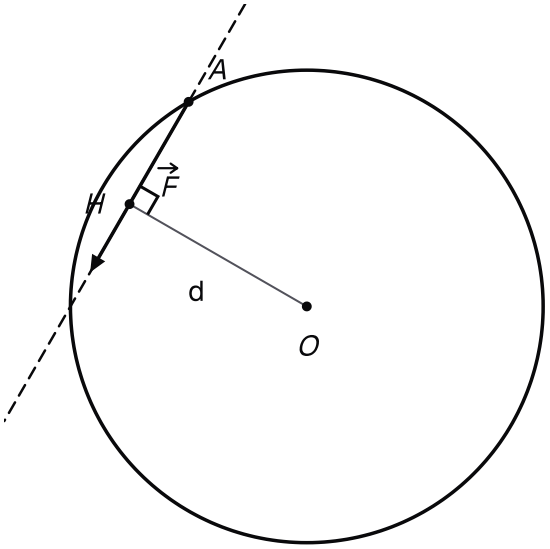
Oui. Sa droite d'action passe le plus loin possible de l'axe.

Correction

Une poussée dirigée vers l'axe a une droite d'action qui rencontre l'axe : elle ne fait pas tourner la roue. Une poussée tangente à la jante a une droite d'action à $0{,}33\ \text{m}$ de l'axe : elle met la roue en rotation.

Le moment d'une force vu en première année

Rappel. Une force $\vec{F}$ perpendiculaire à l'axe Δ a pour moment $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F\,d$, en $\text{N}\cdot\text{m}$. La distance d sépare l'axe de la **droite d'action** de la force. Le signe est positif si la force tend à faire tourner le solide dans le sens choisi pour θ.



Disque vu de face, d'axe passant par O : force F appliquée en A, sa droite d'action en pointillés et la distance d de l'axe à cette droite.

Exemple : Moment de la poussée tangente sur la valve

La poussée est tangente à la jante : sa droite d'action est à $d = R = 0{,}33\ \mathrm{m}$ de l'axe. Elle tend à tourner dans le sens choisi.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) &= F\,d \\ &= 12 \times 0{,}33 \\ &= 4{,}0\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Quand le moment d'une force est nul

Vérifie : La même poussée sur le catadioptre

On pousse maintenant le catadioptre, à $0{,}15\ \mathrm{m}$ de l'axe, avec la même force de $12\ \mathrm{N}$, perpendiculaire au rayon. Que vaut le moment de cette force ?

A. $4{,}0\ \mathrm{N\cdot m}$

Faux.

Faux. C'est le moment d'une poussée sur la valve, plus loin de l'axe.

B. $0\ \mathrm{N\cdot m}$

Faux.

Faux. La droite d'action ne passe pas par l'axe.

C. $1{,}8\ \mathrm{N\cdot m}$

Juste.

Oui. $12 \times 0{,}15 = 1{,}8\ \mathrm{N\cdot m}$.

D. $80\ \mathrm{N \cdot m}$

Faux.

Faux. C'est la force divisée par la distance, au lieu du produit.

Correction

La force est perpendiculaire au rayon : sa droite d'action est à $d = 0{,}15\ \mathrm{m}$ de l'axe.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\Delta} &= F\,d \\ &= 12 \times 0{,}15 \\ &= 1{,}8\ \mathrm{N \cdot m}\end{aligned}$$

Attention : Une force qui rencontre l'axe ne fait pas tourner

✗ « Le poids de la roue est grand, son moment aussi. »

✓ Le centre de gravité d'une roue homogène est sur l'axe : la droite d'action du poids rencontre l'axe, et son moment est nul. Il en va de même pour l'action de l'axe sur la roue.

✗ « La distance d est celle de l'axe au point d'application. »

✓ d est la distance de l'axe à la **droite d'action**. Sur la figure, $d = OH$, plus petit que OA.

Répartir la masse autour de l'axe

Une roue dont la masse est surtout dans la jante est plus difficile à lancer qu'un disque de même masse et de même rayon. La masse ne suffit donc pas à décrire la résistance à la mise en rotation. Ce qui compte est la façon dont elle est répartie autour de l'axe.

Définition : Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Le **moment d'inertie** J_{Δ} d'un solide par rapport à un axe Δ mesure la répartition de sa masse autour de cet axe. Pour un solide formé de points matériels de masses m_i situés aux distances r_i de l'axe :

$$J_{\Delta} = \sum_{i} m_i\, r_i^2,$$

en $\mathrm{kg \cdot m^2}$. Expressions usuelles, données et admises, pour un solide homogène de masse m :

- cerceau ou anneau mince de rayon R, axe de révolution : $J_{\Delta} = m\,R^2$;
- cylindre plein ou disque de rayon R, axe de révolution : $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m\,R^2$;
- tige mince de longueur ℓ, axe perpendiculaire en son milieu : $J_{\Delta} = \frac{1}{12} m\,\ell^2$.

Le moment d'inertie dépend de l'axe choisi, pas seulement de la masse.

Exemple : Moments d'inertie de la roue et du plateau de la platine

La roue est assimilée à un anneau mince de masse $m = 0{,}80\ \text{kg}$ et de rayon $R = 0{,}33\ \text{m}$:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= m\,R^2 \\ &= 0{,}80 \times 0{,}33^2 \\ &= 8{,}7 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Le plateau de la platine est un disque plein de $1{,}6\ \text{kg}$ et de rayon $0{,}15\ \text{m}$:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \tfrac{1}{2} m\,R^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \times 1{,}6 \times 0{,}15^2 \\ &= 1{,}8 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Comparer deux répartitions de masse

Vérifie : Anneau et disque de même masse

Un anneau mince et un disque plein ont la même masse et le même rayon. On les fait tourner autour de leur axe de révolution. Comparer leurs moments d'inertie.

A. Celui de l'anneau est deux fois plus grand.

Juste.

Oui. $m\,R^2$ contre $\frac{1}{2} m\,R^2$: toute la masse de l'anneau est loin de l'axe.

B. Celui du disque est deux fois plus grand.

Faux.

Faux. Le disque a de la masse près de l'axe, qui compte peu.

C. Ils sont égaux : même masse, même rayon.

Faux.

Faux. Le moment d'inertie dépend de la répartition de la masse.

D. Celui de l'anneau est quatre fois plus grand.

Faux.

Faux. Le rapport des deux expressions vaut 2, pas 4.

Correction

Pour l'anneau, $J_\Delta = m\,R^2$; pour le disque, $J_\Delta = \frac{1}{2} m\,R^2$. Le rapport vaut 2 : la masse de l'anneau est tout entière à la distance R de l'axe.

Attention : Même masse ne veut pas dire même moment d'inertie

✗ « Deux solides de même masse ont le même moment d'inertie. »

✓ Le moment d'inertie dépend de la répartition de la masse, et de l'axe choisi. Une même tige n'a pas le même moment d'inertie autour de son milieu et autour d'une extrémité. On écrit toujours J_Δ avec l'axe Δ précisé.

À toi : Moment d'inertie d'une tige

Une tige mince et homogène, de longueur $\ell = 0{,}60\ \text{m}$ et de masse $m = 0{,}50\ \text{kg}$, tourne autour d'un axe perpendiculaire passant par son milieu. Calcule son moment d'inertie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Choisis l'expression usuelle qui correspond à une tige et à cet axe.
Indice 2
$J_\Delta = \frac{1}{12} m\,\ell^2 = \frac{1}{12} \times 0{,}50 \times 0{,}60^2$.
Indice 3
Point délicat : la longueur est élevée au carré avant la division par 12.

Réponse
Pour une tige mince tournant autour d'un axe perpendiculaire en son milieu :

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \tfrac{1}{12} m\,\ell^2 \\ &= \tfrac{1}{12} \times 0{,}50 \times 0{,}60^2 \\ &= 1{,}5 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Appliquer la relation fondamentale à un solide en rotation

Même moment, deux solides différents

On exerce le même moment sur deux solides immobiles : le plateau de la platine, de moment d'inertie $1{,}8 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, et la roue du vélo, de moment d'inertie $8{,}7 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Devine : Le solide qui prend de la vitesse le plus vite

Lequel des deux solides voit sa vitesse angulaire augmenter le plus vite ?

A. La roue, dont le rayon est le plus grand.
Faux.
Faux. Un grand rayon éloigne la masse de l'axe : la roue résiste davantage.

B. Aucun : le moment exercé est le même.
Faux.
Faux. Le même moment produit des effets différents selon le moment d'inertie.

C. La roue, car elle est la plus légère.
Faux.

Faux. La roue est plus légère, mais sa masse est loin de l'axe : son moment d'inertie est le plus grand.

D. Le plateau, dont le moment d'inertie est le plus petit.

Juste.
Oui. À moment égal, l'accélération angulaire est d'autant plus grande que le moment d'inertie est petit.

Correction
À moment égal, le solide de plus petit moment d'inertie acquiert la plus grande accélération angulaire : ici le plateau, près de cinq fois plus vite que la roue. La loi suivante le dit avec précision.

Une loi admise pour la rotation

Une loi admise. La relation suivante joue pour la rotation le rôle de la deuxième loi de Newton pour la translation. Elle est admise, comme les lois de Newton. La section suivante la confronte à l'expérience. On l'applique à un solide nommé, dans un référentiel supposé galiléen.

Propriété : Relation fondamentale de la dynamique en rotation

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments, par rapport à un axe fixe Δ, des forces extérieures appliquées à un solide en rotation autour de cet axe est égale au produit de son moment d'inertie par son accélération angulaire :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right) = J_{\Delta}\,\alpha.$$

Les moments sont comptés positivement dans le sens d'orientation choisi pour θ. Le moment d'une force de droite d'action à la distance d de l'axe, perpendiculaire à l'axe, vaut $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F\,d$; il est nul si la droite d'action rencontre l'axe ou lui est parallèle.

Domaine de validité : référentiel galiléen, solide indéformable, axe fixe dans ce référentiel.

Exemple : Démarrage de la meule sous deux moments

Système : la meule, $J_{\Delta} = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Référentiel terrestre, supposé galiléen ; θ orienté dans le sens de rotation. Le moteur exerce un moment de $0{,}35\ \text{N}\cdot\text{m}$, les frottements un moment de $-0{,}10\ \text{N}\cdot\text{m}$. Le poids et l'action de l'axe ont des moments nuls.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sum \mathcal{M}_{\Delta}}{J_{\Delta}} \\ &= \frac{0{,}35 - 0{,}10}{1{,}0 \times 10^{-2}} \\ &= 25\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Partie du repos, la meule atteint $150\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ au bout de $\dfrac{150}{25} = 6{,}0\ \text{s}$.

Faire le bilan des moments, signes compris

Méthode : Du système nommé à l'accélération angulaire

1. **Nommer le système.** Dire quel solide tourne, et dans quel référentiel supposé galiléen.
2. **Orienter.** Choisir le sens positif de θ et le dire.
3. **Faire le bilan des forces.** Lister toutes les forces extérieures appliquées au solide.
4. **Calculer chaque moment.** Écrire $\pm F\,d$, ou zéro si la droite d'action rencontre l'axe.
5. **Appliquer la loi.** Écrire $\sum \mathcal{M}_{\Delta} = J_{\Delta}\,\alpha$ et en tirer la grandeur cherchée.

Vérifie : Le signe du moment des frottements

La roue tourne dans le sens choisi pour θ et ralentit sous l'effet des frottements de l'axe. Quel est le signe du moment de ces frottements ?

A. Négatif : il s'oppose au sens de rotation.

Juste.
Oui. Il fait diminuer ω, donc $\alpha < 0$, comme $\sum \mathcal{M}_{\Delta}$.

B. Positif : la roue tourne dans le sens positif.

Faux.
Faux. Le signe d'un moment ne dit pas dans quel sens la roue tourne, mais dans quel sens la force tend à la faire tourner.

C. Nul : les frottements s'exercent sur l'axe.

Faux.
Faux. Les frottements de l'axe ont un moment, qui ralentit la roue.

Correction
Les frottements tendent à faire tourner la roue dans le sens négatif : leur moment est négatif. C'est cohérent avec la loi : la roue ralentit, $\alpha < 0$, donc $\sum \mathcal{M}_{\Delta} < 0$.

Exemple : Moment des frottements qui arrêtent la roue

Système : la roue, $J_{\Delta} = 8{,}7 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Lancée à $18\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, elle s'arrête uniformément en $30\ \mathrm{s}$. Seuls les frottements ont un moment non nul.

$$\alpha = \frac{0 - 18}{30}$$
$$= -0{,}60\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f &= J_\Delta\,\alpha \\ &= 8{,}7\times10^{-2}\times(-0{,}60) \\ &= -5{,}2\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

Remonter du mouvement au moment

Trouve l'erreur : Une copie sur le plateau qui démarre

Un élève écrit : « Le plateau de la platine atteint $4{,}7\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Le moment moteur vaut donc $\mathcal{M} = J_\Delta\,\omega$. » Où est l'erreur ?

A. Il n'y a pas d'erreur dans ce raisonnement.

Faux.

Faux. La loi ne relie pas le moment à la vitesse angulaire.

B. Il faut l'accélération angulaire α, pas ω.

Juste.

Oui. La loi s'écrit $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta\,\alpha$.

C. Il faut diviser J_Δ par ω.

Faux.

Faux. Ni ω ni un quotient : la loi fait intervenir α.

Correction

La relation fondamentale relie la somme des moments à l'accélération angulaire : $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta\,\alpha$. Une vitesse angulaire, même grande, peut se maintenir avec un moment total nul.

À toi : Moment moteur du plateau de la platine

Le plateau de la platine, $J_\Delta = 1{,}8\times10^{-2}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, part du repos et atteint $4{,}7\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ en $2{,}5\ \mathrm{s}$, d'un mouvement uniformément accéléré. Les frottements sont négligés. Calcule l'accélération angulaire, puis le moment moteur. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'accélération angulaire est la pente de $\omega(t)$: $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Indice 2

$\alpha = \dfrac{4{,}7}{2{,}5}$, puis $\mathcal{M} = J_\Delta\,\alpha$.

Indice 3

Point délicat : c'est $J_\Delta\,\alpha$, et non $J_\Delta\,\omega$.

Réponse

Système : le plateau, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\\ &= \frac{4{,}7}{2{,}5}\\ &= 1{,}9\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= J_\Delta\,\alpha\\ &= 1{,}8\times10^{-2}\times1{,}88\\ &= 3{,}4\times10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Contrôle d'unité. Un moment divisé par un moment d'inertie donne une accélération angulaire : $\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2} = \text{s}^{-2}$, c'est-à-dire des $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

Vérifier expérimentalement la relation fondamentale en rotation

Une masse qui tombe et fait tourner un disque

Un disque de laboratoire, de moment d'inertie $J_\Delta = 2{,}0\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, porte sur son axe un petit tambour de rayon $r = 2{,}0\ \text{cm}$. Un fil enroulé sur le tambour soutient une masse $m = 50\ \text{g}$. On lâche la masse : elle descend et entraîne le disque.

Devine : Doubler la masse suspendue

Si l'on suspend une masse deux fois plus grande, que devient l'accélération angulaire du disque ?

A. Elle ne change pas : le disque est le même.
Faux.
Faux. Le moment d'inertie ne change pas, mais le moment exercé par le fil, si.

B. Elle est multipliée par quatre.
Faux.
Faux. Le moment exercé est à peu près doublé, pas quadruplé.

C. Elle est divisée par deux.
Faux.
Faux. Une masse plus grande tire plus fort sur le fil.

D. Elle est à peu près multipliée par deux.
Juste.
Oui. Le moment exercé par le fil double presque, pour le même moment d'inertie.

Correction
Le fil exerce sur le tambour un moment voisin de $m\,g\,r$. Doubler m double presque ce moment ; le moment d'inertie ne change pas. D'après la relation fondamentale, l'accélération angulaire double à peu près. L'expérience permet de le vérifier.

Montage, enregistrement et calcul de la vitesse angulaire

Méthode : Montage, protocole, exploitation de la séance de travaux pratiques

Montage. Le disque tourne autour d'un axe horizontal fixe. Le tambour, solidaire du disque, porte le fil enroulé ; la masse m pend au bout du fil. Un capteur angulaire, relié à une interface d'acquisition, enregistre l'abscisse angulaire θ du disque.

Protocole. Lâcher la masse sans vitesse initiale. Enregistrer θ à intervalles réguliers, $\tau = 0{,}25\ \text{s}$. Recommencer avec d'autres masses, sans changer de disque.

Exploitation. Calculer ω aux instants intermédiaires : $\omega_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$. Tracer $\omega(t)$ et la modéliser par une droite. Comparer sa pente à $\dfrac{\sum \mathcal{M}_\Delta}{J_\Delta}$.

Voici l'enregistrement obtenu avec $m = 50\ \text{g}$. La dernière colonne est calculée à partir des deux mesures voisines.

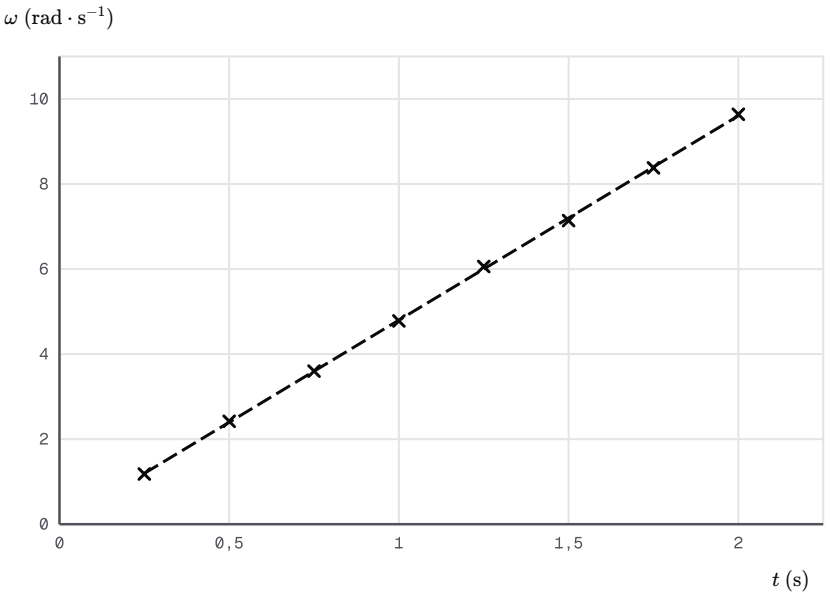
t (s)	θ (rad)	ω (rad/s)
0,00	0,00	
0,25	0,16	1,18
0,50	0,59	2,42
0,75	1,37	3,60
1,00	2,39	4,78
1,25	3,76	6,06
1,50	5,42	7,14
1,75	7,33	8,38
2,00	9,61	9,64
2,25	12,15	

Exemple : Vitesse angulaire à l'instant 1,00 s

On encadre l'instant $t = 1{,}00\ \text{s}$ par les mesures prises à $0{,}75\ \text{s}$ et à $1{,}25\ \text{s}$, séparées de $2\tau = 0{,}50\ \text{s}$:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\theta_5 - \theta_3}{2\tau} \\ &= \frac{3{,}76 - 1{,}37}{0{,}50} \\ &= 4{,}78\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Modéliser les mesures par une droite



Vitesses angulaires calculées aux instants intermédiaires et droite de modélisation obtenue par la méthode des moindres carrés.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 8 points : y = a x + b, avec a ≈ 4,806 et b ≈ −0,006429.

Exemple : Pente de la droite et comparaison avec la loi

Les points sont alignés : la rotation est uniformément accélérée. La pente de la droite donne $\alpha \approx 4{,}81\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$.

Le moment exercé par le fil vaut à peu près $m\,g\,r$; ceux du poids du disque et de l'action de l'axe sont nuls.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\approx m\,g\,r \\ &= 0{,}050 \times 9{,}80 \times 0{,}020 \\ &= 9{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}}{J_\Delta} &= \frac{9{,}8 \times 10^{-3}}{2{,}0 \times 10^{-3}} \\ &= 4{,}9\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

L'écart relatif vaut $\dfrac{4{,}9 - 4{,}81}{4{,}9} \approx 0{,}02$, soit environ $2\ \%$: la loi est vérifiée à la précision de l'expérience.

Ce que suppose la comparaison. On a pris la tension du fil égale au poids de la masse. Ce n'est pas exact : la masse accélère, avec $a = r\,\alpha \approx 0{,}096\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. C'est environ $1\ \%$ de g, donc l'approximation reste acceptable ici. Avec $T = m\,(g - r\,\alpha)$, le modèle prévoit $\alpha = \dfrac{m\,g\,r}{J_\Delta + m\,r^2} \approx 4{,}85\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$ au lieu de $4{,}9$: l'approximation explique déjà la moitié de l'écart. Le reste vient surtout des frottements de l'axe, négligés, qui rendent la pente mesurée un peu plus faible.

Interroger le protocole

Vérifie : Une série d'expériences qui éprouve la loi

Quelle série d'expériences permet d'éprouver la relation fondamentale avec ce montage ?

A. Changer l'intervalle τ entre deux mesures.

Faux.

Faux. L'intervalle règle la précision de l'enregistrement, pas le moment exercé.

B. Changer la masse suspendue, en gardant le disque et le tambour.

Juste.

Oui. Le moment exercé change, le moment d'inertie non : la pente doit suivre le moment.

C. Changer l'origine des angles du capteur.

Faux.

Faux. Décaler l'origine ne change aucune vitesse angulaire.

D. Lancer le disque à la main avant de lâcher la masse.

Faux.

Faux. La vitesse initiale change, mais pas la pente de la droite.

Correction

Pour éprouver $\sum \mathcal{M}_\Delta = J_\Delta\,\alpha$, on fait varier le moment exercé sans changer J_Δ : on change la masse suspendue, ou le rayon du tambour. La pente de la droite doit varier comme le moment.

Vérifie : Le dénominateur du calcul de la vitesse angulaire

Dans $\omega_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$, pourquoi divise-t-on par 2τ ?

A. Pour tenir compte des frottements de l'axe.

Faux.

Faux. Ce calcul ne contient aucune correction : c'est un quotient d'angle par durée.

B. Les deux mesures utilisées sont séparées de deux intervalles.

Juste.

Oui. θ_{i-1} et θ_{i+1} sont prises à 2τ d'intervalle, de part et d'autre de t_i.

C. Pour faire la moyenne de deux vitesses angulaires.

Faux.

Faux. Le numérateur est une différence d'angles, pas une somme de vitesses.

Correction

La vitesse angulaire moyenne entre t_{i-1} et t_{i+1} est l'angle balayé, $\theta_{i+1} - \theta_{i-1}$, divisé par la durée 2τ. Cette durée est centrée sur t_i : elle donne une bonne valeur de ω à l'instant t_i.

Une seconde masse suspendue

À toi : Comparer la pente obtenue avec une masse de 100 g

Avec $m = 100\ \text{g}$, sur le même disque et le même tambour, la droite de modélisation a une pente de $9{,}4\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Calcule la valeur attendue de $\dfrac{\mathcal{M}}{J_\Delta}$, avec $\mathcal{M} \approx m\,g\,r$, puis l'écart relatif. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le moment exercé par le fil vaut à peu près $m\,g\,r$.
Indice 2
$\mathcal{M} \approx 0{,}100 \times 9{,}80 \times 0{,}020$, puis on divise par $2{,}0 \times 10^{-3}$.
Indice 3
Point délicat : la masse en kilogrammes et le rayon en mètres, avant tout calcul.

Réponse
Le moment exercé par le fil vaut à peu près $m\,g\,r$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\approx m\,g\,r \\ &= 0{,}100 \times 9{,}80 \times 0{,}020 \\ &= 1{,}96 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

On garde ici trois chiffres, car la valeur sert au calcul suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{M}}{J_\Delta} &= \frac{1{,}96 \times 10^{-2}}{2{,}0 \times 10^{-3}} \\ &= 9{,}8\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

L'écart relatif vaut $\dfrac{9{,}8 - 9{,}4}{9{,}8} \approx 0{,}04$, soit environ $4\ \%$. La masse a doublé, et la pente aussi, à quelques pour cent près. Ici l'accélération de la masse atteint $2\ \%$ de g : sans l'approximation $T \approx m\,g$, le modèle prévoit $9{,}61\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui explique déjà la moitié de l'écart.

À retenir : Ce que l'enregistrement établit

La droite $\omega(t)$ montre que l'accélération angulaire est constante sous un moment constant. Sa pente suit le moment exercé, pour un même moment d'inertie. L'expérience ne prouve pas la loi : elle la confirme, aux incertitudes de mesure près.

Système poulie et charge suspendue : translation et rotation

Le seau lâché au-dessus du puits

Un seau de masse $m = 8{,}0\ \text{kg}$ pend au bout d'une corde enroulée sur la poulie d'un puits. La poulie est un disque de rayon $r = 0{,}10\ \text{m}$ et de moment d'inertie $J_\Delta = 6{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, qui tourne sans frottement autour de son axe horizontal fixe. On lâche le seau.

Devine : Le seau qui entraîne la poulie

Comparée à l'accélération de la pesanteur g, que vaut l'accélération du seau ?

A. Elle vaut g : le seau tombe librement.

Faux.

Faux. La corde retient le seau : elle met la poulie en rotation.

B. Elle est plus grande que g.

Faux.

Faux. La corde tire le seau vers le haut : rien ne l'accélère plus que son poids.

C. Elle est plus petite que g.

Juste.

Oui. Une partie de l'effet du poids sert à faire tourner la poulie.

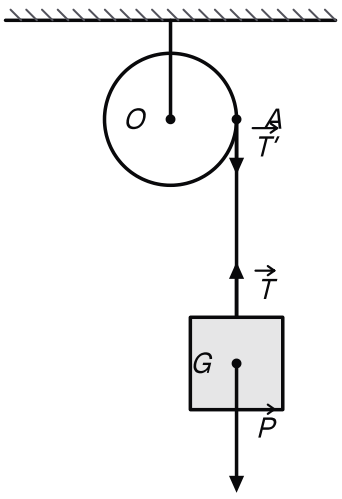
D. Elle est nulle : la corde le retient.

Faux.

Faux. La poulie tourne librement : le seau descend de plus en plus vite.

Correction

La corde tire le seau vers le haut avec une tension T : son accélération est inférieure à g. Cette tension, transmise à la poulie, la met en rotation. Le calcul qui suit donne sa valeur.



Poulie du puits fixée au plafond, corde verticale et seau : tension T sur le seau, poids P du seau et tension T' de la corde sur la poulie.

Deux solides, deux lois, une liaison

On étudie séparément les deux solides, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le seau (S) est en translation verticale : on lui applique la deuxième loi de Newton. La poulie est en rotation autour de son axe fixe : on lui applique la relation fondamentale de la dynamique en rotation.

La corde est inextensible, de masse négligeable, et ne glisse pas sur la poulie. Elle a donc la même tension à ses deux bouts, et $a = r\,\alpha$.

Propriété : Accélération d'une charge suspendue à une poulie

Un fil inextensible, de masse négligeable, est enroulé sur une poulie de rayon r et de moment d'inertie J_Δ qui tourne sans frottement autour de son axe fixe horizontal ; il porte à son extrémité un solide (S) de masse m. Si le fil ne glisse pas sur la poulie, (S) descend avec une accélération constante

$$a = \frac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}},$$

et la tension du fil vaut $T = m\,(g - a)$, inférieure au poids de (S). La relation de liaison s'écrit $a = r\,\alpha$.

Démonstration

Étape 1. Solide en translation. Système (S), référentiel terrestre supposé galiléen, axe vertical orienté vers le bas. Forces : poids $m\,\vec{g}$ et tension $\vec{T}$ du fil. La deuxième loi de Newton projetée donne

$$m\,g - T = m\,a.$$

Étape 2. Solide en rotation. Système : la poulie. Forces : son poids et la réaction de l'axe, de moments nuls car leurs droites d'action rencontrent l'axe ; la tension $\vec{T}'$ du brin, de moment $T'\,r$ dans le sens de rotation. Le fil étant de masse négligeable, $T' = T$. La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne

$$T\,r = J_\Delta\,\alpha.$$

Étape 3. Liaison. Le fil est inextensible et ne glisse pas : la vitesse de (S) est celle d'un point de la périphérie de la poulie, $v = r\,\omega$, donc $a = r\,\alpha$ et $T = \dfrac{J_\Delta\,a}{r^2}$.

Étape 4. Résultat. En reportant dans l'étape 1 :

$$m\,g = \left(m + \frac{J_\Delta}{r^2}\right) a,$$

d'où l'expression de a, constante. Comme $a < g$, $T = m\,(g - a)$ est positive et inférieure à $m\,g$.

À retenir : Le geste de la preuve pour le seau et la poulie

Deux équations contiennent la même inconnue T : celle du seau, $m\,g - T = m\,a$, et celle de la poulie, $T\,r = J_\Delta\,\alpha$. La liaison $a = r\,\alpha$ permet d'éliminer T et α. Il ne reste qu'une équation en a.

Exemple : Accélération du seau et tension de la corde

Avec $m = 8{,}0\ \text{kg}$, $r = 0{,}10\ \text{m}$ et $J_\Delta = 6{,}0 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, on a $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = 6{,}0\ \text{kg}$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}} \\ &= \frac{8{,}0 \times 9{,}80}{8{,}0 + 6{,}0} \\ &= 5{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= m\,(g - a) \\ &= 8{,}0 \times (9{,}80 - 5{,}60) \\ &= 34\ \text{N} \end{aligned}$$

La poulie tourne avec $\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{5{,}60}{0{,}10}$, soit $\alpha \approx 56\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

Contrôler le résultat obtenu

Deux contrôles. Au dénominateur, $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$ s'exprime en kilogrammes, comme m : l'expression est homogène à une accélération. Si la poulie avait un moment d'inertie nul, on aurait $a = g$: le seau tomberait en chute libre. Ici, $T = 34\ \text{N}$ est bien inférieure au poids du seau, $m\,g \approx 78\ \text{N}$.

Vérifie : Un tour de poulie, combien de corde

La poulie fait un tour complet. De quelle hauteur le seau est-il descendu ?

A. $0{,}10\ \text{m}$
Faux.
Faux. C'est le rayon : un tour déroule toute la circonférence.

B. $0{,}31\ \text{m}$
Faux.
Faux. C'est $\pi\,r$, un demi-tour seulement.

C. $6{,}3\ \text{m}$
Faux.
Faux. C'est $2\pi \times 1{,}0$: le rayon est $0{,}10\ \text{m}$.

D. $0{,}63\ \text{m}$
Juste.
Oui. Sans glissement, la corde déroulée vaut $r\,\theta = 0{,}10 \times 2\pi \approx 0{,}63\ \text{m}$.

Correction

La corde ne glisse pas : la longueur déroulée est l'abscisse curviligne d'un point de la jante, $r\,\theta$. Pour un tour, $\theta = 2\pi \text{ rad}$:

$$\begin{aligned} h &= r\,\theta \\ &= 0{,}10 \times 2\pi \\ &= 0{,}63 \text{ m} \end{aligned}$$

Méthode : Étudier une poulie qui entraîne une charge

1. **Nommer chaque solide.** La charge en translation, la poulie en rotation ; un même référentiel supposé galiléen.
2. **Écrire la loi de la charge.** La deuxième loi de Newton, projetée sur un axe orienté dans le sens du mouvement.
3. **Écrire la loi de la poulie.** La relation fondamentale en rotation, avec le moment de la tension.
4. **Écrire la liaison.** Fil inextensible qui ne glisse pas : $a = r\,\alpha$; fil de masse négligeable : tensions égales.
5. **Éliminer et contrôler.** Éliminer la tension, puis vérifier l'homogénéité et le cas d'un moment d'inertie nul.

Changer de poulie, changer de seau

Vérifie : Une poulie de plus grand moment d'inertie

On remplace la poulie par une poulie de même rayon et de moment d'inertie double. Que deviennent l'accélération du seau et la tension de la corde ?

A. a et T diminuent toutes les deux.

Faux.

Faux. $T = m\,(g - a)$ augmente quand a diminue.

B. a diminue et T augmente.

Juste.

Oui. Le dénominateur $m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}$ grandit : a diminue, et $T = m\,(g - a)$ augmente.

C. a augmente et T diminue.

Faux.

Faux. Une poulie plus difficile à faire tourner freine davantage le seau.

D. a ne change pas : g est le même.

Faux.

Faux. a dépend aussi de J_Δ.

Correction

Le dénominateur de $a = \dfrac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$ augmente : l'accélération diminue. La tension $T = m\,(g - a)$ augmente, tout en restant inférieure à $m\,g$.

Attention : La tension de la corde n'est pas le poids du seau

✗ « La corde tient le seau, donc $T = m\,g$. »

✓ Le seau accélère vers le bas : $m\,g - T = m\,a$, donc $T = m\,(g - a)$, plus petite que $m\,g$. L'égalité $T = m\,g$ ne vaut que si le seau est immobile ou descend à vitesse constante.

À toi : Un seau plus léger sur une autre poulie

Un seau de $6{,}0\ \text{kg}$ pend à une poulie de rayon $0{,}10\ \text{m}$ et de moment d'inertie $0{,}040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, sans frottement. Calcule l'accélération du seau, puis la tension de la corde. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par $\dfrac{J_\Delta}{r^2}$, en kilogrammes.

Indice 2

$a = \dfrac{6{,}0 \times 9{,}80}{6{,}0 + 4{,}0}$, puis $T = m\,(g - a)$.

Indice 3

Point délicat : la tension vaut $m\,(g - a)$, pas $m\,g$.

Réponse

On a $\dfrac{J_\Delta}{r^2} = \dfrac{0{,}040}{0{,}10^2} = 4{,}0\ \text{kg}$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{m\,g}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}} \\ &= \frac{6{,}0 \times 9{,}80}{6{,}0 + 4{,}0} \\ &= 5{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= m\,(g - a) \\ &= 6{,}0 \times (9{,}80 - 5{,}88) \\ &= 24\ \text{N} \end{aligned}$$

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe » (2bac · pc · physique-chimie)