BURHAN

Résumé : Oscillations libres dans un circuit RLC série

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/oscillations-libres-circuit-rlc-serie/resume

Chapitre	Semestre
Oscillations libres dans un circuit RLC série	Semestre 2

Reconnaître les trois régimes d'oscillations libres

> **À retenir : Un condensateur chargé qui se vide dans une bobine**
>
> Charge d'abord le condensateur, puis relie-le à la bobine et au résistor. Sans générateur, le circuit évolue seul. L'énergie du départ passe du condensateur à la bobine, puis revient, en s'épuisant peu à peu.

Définition : Oscillations libres d'un circuit RLC série

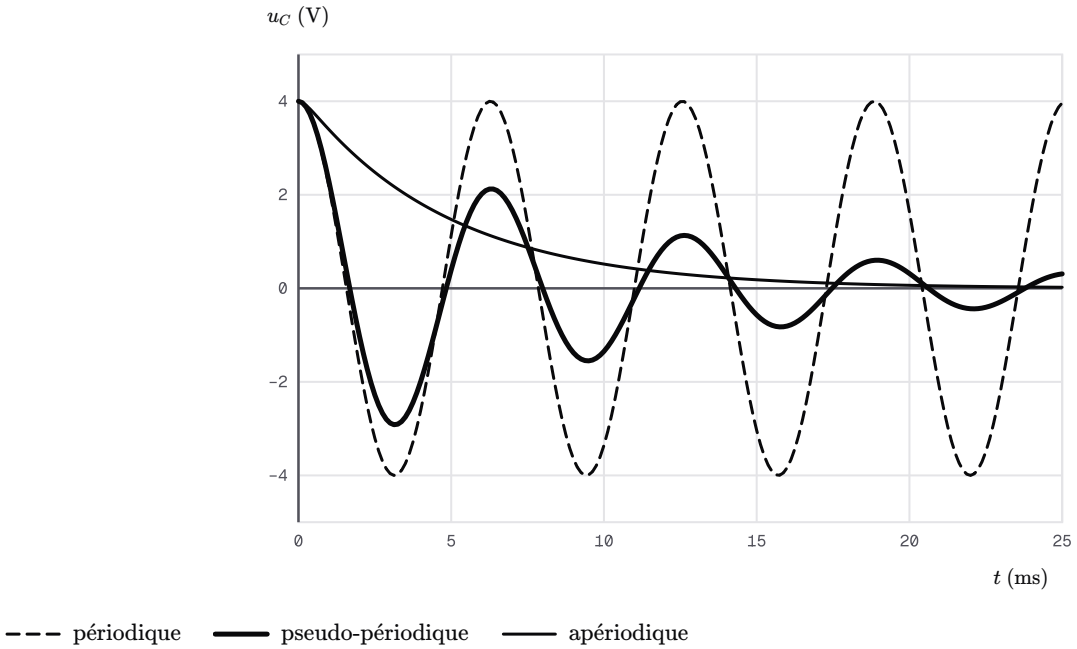
Un condensateur de capacité C, **préalablement chargé**, est relié à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance L et de résistance r, en série avec un résistor de résistance R. Le circuit ne contient aucun générateur : c'est un **circuit RLC série en décharge**.

Si l'amortissement est assez faible, la tension u_C aux bornes du condensateur change alors de signe à intervalles de temps réguliers. Le circuit est le siège d'**oscillations électriques libres**. Elles sont libres : le circuit évolue seul, avec l'énergie stockée au départ dans le condensateur.

Définition : Régimes périodique, pseudo-périodique et apériodique

Selon l'importance de l'amortissement, la tension $u_C(t)$ d'un circuit RLC série en décharge évolue suivant l'un de trois **régimes** :

- **périodique** : l'amplitude des oscillations reste constante ; c'est le modèle du circuit dont la résistance totale est nulle (circuit LC idéal), de période T_0 appelée **période propre** ;
- **pseudo-périodique** : u_C oscille avec une amplitude qui diminue au cours du temps ; la durée qui sépare deux maximums successifs de u_C est la **pseudo-période** T ;
- **apériodique** : u_C tend vers zéro sans osciller ; il n'y a ni période ni pseudo-période.



Allure de la tension aux bornes du condensateur dans les trois régimes

Méthode : Identifier un régime d'après l'amplitude

1. **Amplitude constante** : régime périodique, celui du circuit idéal ou d'un circuit entretenu.
2. **Amplitude qui décroît** au fil des oscillations : régime pseudo-périodique.
3. **Aucune oscillation**, la tension rejoint zéro : régime apériodique.
4. **Cause** : la résistance totale du circuit fixe l'importance de l'amortissement.

Méthode : Mesurer une durée sur un oscillogramme

1. **Choisis** deux points semblables de la courbe, séparés par n oscillations entières.
2. **Compte** les divisions horizontales qui les séparent.
3. **Convertis** : la durée vaut ce nombre de divisions fois le balayage.
4. **Divise** cette durée par n pour obtenir T ou T_0.

Exemple

Balayage : $0{,}2\,\text{ms/div}$. Trois pseudo-périodes couvrent $7{,}5$ divisions.

$$3T = 7{,}5 \times 0{,}2\,\text{ms}$$
$$3T = 1{,}5\,\text{ms}$$

D'où $T \approx 0{,}50\,\text{ms}$.

Mise en équation du circuit LC idéal

Remarque : Relations du condensateur et de la bobine

Rappel : avec i orienté vers l'armature de charge q, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$. En convention récepteur, une bobine (L, r) a pour tension $u = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Propriété : Équation différentielle du circuit LC idéal

Dans un circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L dont la résistance est négligeable (amortissement négligeable), la tension u_C et la charge q vérifient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

Méthode : Les quatre gestes d'une mise en équation

1. **Oriente** i et repère l'armature qui porte q.
2. **Flèche** les tensions des récepteurs en convention récepteur.
3. **Remplace** chaque tension par son expression en q ou en i.
4. **Additionne** les tensions sur la maille, puis élimine i pour ne garder que q ou u_C.

Solution sinusoïdale et période propre

Propriété : Solution de l'équation et période propre

L'équation différentielle du circuit LC idéal admet pour solutions les fonctions

$$q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right),$$

où $Q_m > 0$ est l'amplitude et φ la phase à l'origine, fixées par les conditions initiales. La **période propre** vaut :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

avec L en henrys, C en farads et T_0 en secondes. La tension s'écrit $u_C(t) = \dfrac{Q_m}{C}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$.

Méthode : Calculer ou isoler la période propre

1. **Unités** : L en henrys, C en farads.

2. **Formule** : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$; pour une capacité cherchée, $C = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L}$.
3. **Résultat** : avec son unité, arrondi selon la donnée la moins précise.

Exemple

$L = 0{,}36\,\text{H}$ et $C = 0{,}10\,\mu\text{F} = 1{,}0 \times 10^{-7}\,\text{F}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{3{,}6 \times 10^{-8}}$$
$$T_0 \approx 1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{s}$$

La période propre vaut environ $1{,}2\,\text{ms}$.

Méthode : Fixer l'amplitude et la phase à l'origine

1. **Écris** $q(0)$ et $i(0)$ à partir de l'énoncé.
2. **Pose** $Q_m \cos\varphi = q(0)$ et $-\dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\varphi = i(0)$.
3. **Déduis** φ par les signes, puis $Q_m > 0$.
4. **Vérifie** que la courbe obtenue part de la bonne valeur, dans le bon sens.

Exemple

Un condensateur de $4{,}0\,\mu\text{F}$, chargé sous $3{,}0\,\text{V}$, est relié à $t = 0$ à une bobine idéale de $25\,\text{mH}$, sans courant.

Constantes. $q(0) = C\,U = 1{,}2 \times 10^{-5}\,\text{C}$ et $i(0) = 0$: donc $\varphi = 0$ et $Q_m = 1{,}2 \times 10^{-5}\,\text{C}$.

Période. $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \approx 2{,}0\,\text{ms}$.

Attention : Puissances de dix oubliées dans la période propre

Laisser L en millihenrys et C en microfarads fausse LC d'un facteur 10^9, donc T_0 d'un facteur voisin de 3×10^4. Convertis chaque grandeur avant le calcul. Contrôle ensuite l'ordre de grandeur : au laboratoire, une période de quelques millisecondes est plausible.

Charge et courant dans le circuit idéal

Propriété : Intensité du courant dans le circuit LC idéal

Si la charge s'écrit $q(t) = Q_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, l'intensité du courant est :

$$i(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right).$$

C'est une fonction sinusoïdale de même période T_0, d'amplitude

$$I_m = \frac{2\pi}{T_0}\,Q_m,$$

qui s'annule quand $|q|$ est maximale et devient maximale en valeur absolue quand q s'annule.

Exemple

Avec l'exemple précédent, $I_m = \dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m = \dfrac{Q_m}{\sqrt{LC}}$ et $\sqrt{LC} \approx 3{,}16 \times 10^{-4}\,\text{s}$.

$$I_m = \frac{1{,}2 \times 10^{-5}}{3{,}16 \times 10^{-4}}$$
$$I_m \approx 3{,}8 \times 10^{-2}\,\text{A}$$

À retenir : Un quart de période entre la charge et le courant

Quand $|q|$ est maximale, le courant s'annule. Quand q s'annule, $|i|$ est maximale. Les deux courbes sont décalées d'un quart de période propre.

Échanges d'énergie sans perte

Remarque : Énergies stockées par le condensateur et la bobine

Rappel : le condensateur stocke $E_e = \dfrac{q^2}{2C}$ et la bobine $E_m = \dfrac{1}{2}\,L\,i^2$. Ces deux énergies sont positives ou nulles.

Propriété : Conservation de l'énergie totale du circuit LC idéal

L'**énergie totale** d'un circuit RLC série est la somme de l'énergie électrique du condensateur et de l'énergie magnétique de la bobine :

$$E = E_e + E_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\,L\,i^2.$$

Dans le circuit LC idéal, cette énergie se **conserve** : les deux formes s'échangent sans perte, et

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2}\,L\,I_m^2.$$

Méthode : Repérer les trois énergies sur un graphique

1. **Repère** la courbe maximale quand le condensateur est le plus chargé : c'est E_e.

2. **Repère** celle qui est nulle à ces mêmes instants : c'est E_m.
3. **Additionne** : E est horizontale sans résistance, décroissante sinon.
4. **Exploite** : une différence de valeurs de E donne l'énergie dissipée ; le maximum de E_e donne C ou U_m.

Exemple

Avec le condensateur de $4{,}0\,\mu\text{F}$ et $Q_m = 1{,}2 \times 10^{-5}\,\text{C}$:

$$E = \frac{Q_m^2}{2C}$$
$$E = \frac{(1{,}2 \times 10^{-5})^2}{8{,}0 \times 10^{-6}}$$
$$E = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\text{J}$$

Avec $I_m \approx 3{,}8 \times 10^{-2}\,\text{A}$, $\frac{1}{2}\,L\,I_m^2$ redonne la même valeur.

Attention : Période des énergies : la moitié de la période propre

E_e dépend de q^2 et E_m de i^2 : elles reprennent la même valeur deux fois par oscillation. Leur période vaut $\frac{T_0}{2}$. Ne la confonds pas avec celle de q ou de u_C.

Circuit amorti : équation et effet Joule

Propriété : Équation différentielle du circuit RLC série amorti

Dans un circuit RLC série en décharge, de résistance totale $R + r$ (résistor et bobine), la tension u_C vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r}{L}\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0.$$

Le terme en $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ traduit l'**amortissement**. La charge q vérifie la même équation. On l'établit et on l'exploite, sans la résoudre.

Attention : La bobine dissipe aussi de l'énergie

Dans l'équation et dans le bilan d'énergie, écris la résistance totale $R + r$. Retirer le résistor ne supprime pas l'amortissement : la résistance r de la bobine suffit à faire décroître l'amplitude.

Propriété : Diminution de l'énergie totale par effet Joule

Dans un circuit RLC série en décharge, l'énergie totale $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\,L\,i^2$ varie selon

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R+r)\,i^2.$$

Elle **diminue** au cours du temps : elle est dissipée sous forme de chaleur par **effet Joule** dans les résistances. En régime pseudo-périodique, l'amplitude diminue d'autant plus vite que la résistance totale est grande. Un faible amortissement donne le régime pseudo-périodique, un fort amortissement le régime apériodique.

Exemple

Résistance totale $R + r = 40\,\Omega$; à un instant, $i = 20\,\mathrm{mA}$.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R+r)\,i^2$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -40 \times 0{,}020^2$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{W}$$

À cet instant, le circuit perd $16\,\mathrm{mW}$ par effet Joule.

Exemple

Entre deux instants où $i = 0$, l'énergie totale passe de $45\,\mu\mathrm{J}$ à $30\,\mu\mathrm{J}$. Le circuit a donc dissipé $15\,\mu\mathrm{J}$ par effet Joule pendant cette durée.

Pseudo-période, période propre et rôle de R

Propriété : Pseudo-période et période propre

Lorsque l'amortissement est **faible** (régime pseudo-périodique dont l'amplitude diminue lentement), la pseudo-période T est très voisine de la période propre du circuit :

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

La pseudo-période augmente avec L et avec C. Augmenter la résistance totale accroît l'amortissement, sans modifier T_0 ; au-delà d'une certaine valeur, le régime devient apériodique.

Attention : Pseudo-période et période propre ne se confondent pas toujours

L'égalité approchée $T \approx T_0$ ne vaut qu'en amortissement faible. Plus la résistance totale augmente, plus l'écart grandit. En régime apériodique, il n'y a plus de pseudo-période à mesurer.

Attention : Changer R ne change pas la période propre

T_0 ne dépend que de L et de C. Augmenter R rend l'amortissement plus fort, jusqu'au régime apériodique, sans modifier T_0. Pour allonger les oscillations, augmente L ou C.

Exemple

Si C est multipliée par 4, le produit LC l'est aussi et $\sqrt{LC}$ double : la période propre double.

Compenser l'effet Joule par un générateur

Propriété : Équation du circuit entretenu et condition d'entretien

Un générateur placé en série dans le circuit RLC délivre une tension proportionnelle à l'intensité, $u_G = k\,i$, avec k en ohms. La charge q vérifie alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r - k}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

Pour $k = R + r$, on retrouve l'équation du circuit LC idéal : les oscillations sont **entretenues**, sinusoïdales, de période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Le générateur fournit à chaque instant l'énergie dissipée par effet Joule.

Exemple

Résistor de $68\,\Omega$, bobine de résistance $6{,}0\,\Omega$: l'entretien exige $k = R + r = 74\,\Omega$.

Attention : Un réglage de k trop faible ou trop fort

Si k reste inférieur à $R + r$, l'amortissement diminue sans disparaître. Si k dépasse $R + r$, l'amplitude grandit jusqu'à la saturation du générateur. Règle k en observant u_C : l'amplitude doit rester constante.

Formules et choix de méthode

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Reconnaître un régime** : regarder l'évolution de l'amplitude.
- **Période sur un oscillogramme** : plusieurs oscillations, divisions fois balayage, puis division par leur nombre.
- **Mise en équation** : orientation, convention récepteur, loi d'additivité des tensions.
- **Vérifier une solution** : dériver deux fois, substituer, identifier T_0.
- **Constantes** : conditions initiales sur q et sur i.
- **Courant** : dériver $q(t)$.
- **Énergie** : $E = E_e + E_m$; constante sans résistance, décroissante sinon.

- **Entretien** : $k = R + r$.

Courant

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Période propre

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Amplitude du courant

$$I_m = \frac{2\pi}{T_0}\,Q_m$$

Énergie totale

$$E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

Circuit idéal

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2}\,L\,I_m^2$$

Effet Joule

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2$$

Amortissement faible

$$T \approx T_0$$

Entretien

$$k = R + r$$

À retenir : Rédiger une étude de circuit

Commence par orienter le courant et flécher les tensions. Nomme la loi d'additivité des tensions à chaque mise en équation. Une lecture sur un oscillogramme s'écrit avec ≈. Chaque résultat porte son unité et ses chiffres significatifs.