BURHAN

Oscillations libres dans un circuit RLC série : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/oscillations-libres-circuit-rlc-serie/exercices/examen

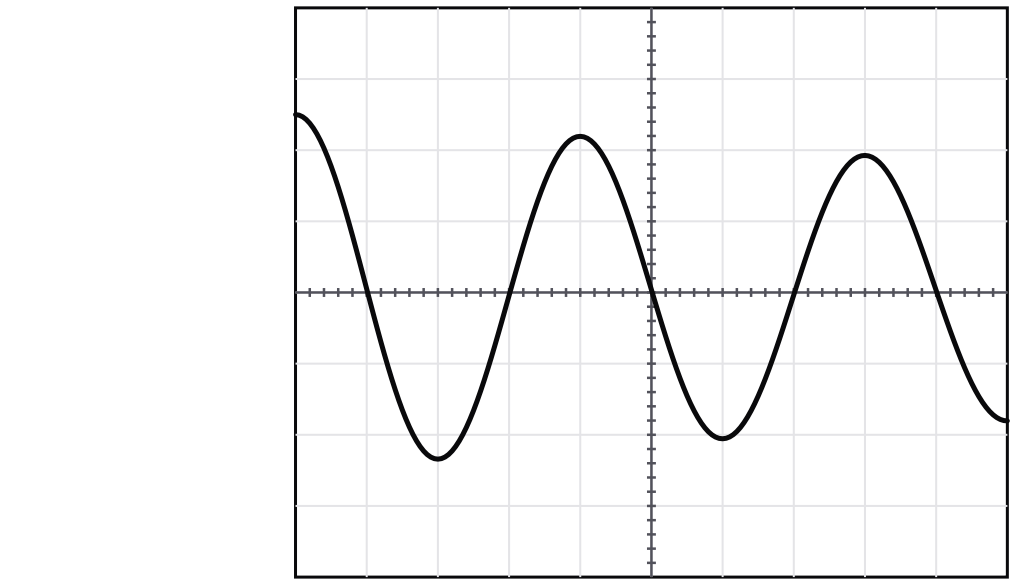
Chapitre	Palier	Exercices
Oscillations libres dans un circuit RLC série	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Boucle inductive d'un détecteur de véhicules

Un détecteur de passage de véhicules utilise une boucle de fil enfouie sous la chaussée : c'est une bobine d'inductance L et de faible résistance. Au laboratoire, on la teste en la reliant à un condensateur de capacité $C = 0{,}22\,\mu\text{F}$, préalablement chargé.

Document. Oscillogramme de la tension u_C aux bornes du condensateur pendant la décharge : sensibilité verticale $2\,\text{V/div}$, balayage $0{,}1\,\text{ms/div}$.



Voie u_C : 2 V/div Balayage : 0,1 ms/div

Oscillogramme de la décharge du condensateur dans la boucle. Voie Y1 : 2 V/div ; balayage : 0,1 ms/div.

A.1. 0,75 pts

Partie A : exploitation de l'oscillogramme.

Nommer le régime des oscillations et justifier.

INDICE

Outil : compare l'amplitude de deux maximums successifs.

CORRIGÉ

Allure. La tension change de signe et ses maximums décroissent.

Conclusion. Le régime est pseudo-périodique, faiblement amorti.

A.2. 0,75 pts

Mesurer la pseudo-période T, en utilisant deux oscillations complètes.

INDICE

Outil : l'écart en divisions entre deux maximums séparés par deux oscillations, multiplié par le balayage.

CORRIGÉ

Lecture. Le premier maximum est à $t = 0$, le troisième à environ $8{,}0$ divisions.

Durée.

$$2T \approx 8{,}0 \times 0{,}1\,\text{ms}$$
$$T \approx 0{,}40\,\text{ms}$$

Conclusion. La pseudo-période vaut environ $0{,}40\,\text{ms}$.

A.3. 1 pts

L'amortissement étant faible, on admet que $T \approx T_0$. Montrer que l'inductance de la boucle vaut environ $18\,\text{mH}$.

INDICE

Outil : isole L dans l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Expression. $T_0^2 = 4\pi^2 LC$, donc $L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 C}$, avec $T_0 \approx 4{,}0 \times 10^{-4}\,\text{s}$.

Application numérique. $T_0^2 \approx 1{,}6 \times 10^{-7}\,\text{s}^2$ et $4\pi^2 C \approx 8{,}69 \times 10^{-6}\,\text{F}$:

$$L \approx \frac{1{,}6 \times 10^{-7}}{8{,}69 \times 10^{-6}}$$
$$L \approx 1{,}8 \times 10^{-2}\,\text{H}$$

Conclusion. L'inductance de la boucle vaut environ $18\,\text{mH}$.

A.4. 0,5 pts

Quand un véhicule s'arrête au-dessus de la boucle, son inductance diminue. Prévoir l'effet sur la pseudo-période, et expliquer comment le détecteur repère le véhicule.

INDICE

Outil : la période propre dépend de L ; regarde dans quel sens.

CORRIGÉ

Effet. $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ croît avec L : une inductance plus petite donne une pseudo-période plus courte.

Détection. Le détecteur mesure en permanence la pseudo-période ; une diminution de T signale un véhicule.

Conclusion. La pseudo-période diminue quand un véhicule est au-dessus de la boucle, et c'est cette variation que le détecteur repère.

B.1. 0,75 pts

Partie B : modèle du circuit LC idéal. On néglige toute résistance : $L = 18\,\text{mH}$, $C = 0{,}22\,\mu\text{F}$. Le condensateur, chargé sous $U_0 = 5{,}0\,\text{V}$, est relié à la bobine à $t = 0$, sans courant. On admet que $q(t) = Q_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$.

Montrer que $\varphi = 0$ et que $Q_m = C\,U_0$.

INDICE

Début : écris $q(0)$ et $i(0)$. **Point délicat :** Q_m est positive.

CORRIGÉ

Courant initial. $i(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\varphi = 0$, donc $\sin\varphi = 0$: $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Charge initiale. $q(0) = Q_m \cos\varphi = C\,U_0 > 0$, donc $\cos\varphi > 0$ et $\varphi = 0$.

Conclusion. $\varphi = 0$ et $Q_m = C\,U_0$.

B.2. 0,5 pts

Calculer Q_m et la période propre T_0.

INDICE

Outil : la relation de la question précédente, puis l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Amplitude. $Q_m = 0{,}22 \times 10^{-6} \times 5{,}0 = 1{,}1 \times 10^{-6}\,\text{C}$.

Période propre. $LC = 1{,}8 \times 10^{-2} \times 2{,}2 \times 10^{-7} \approx 3{,}96 \times 10^{-9}\,\text{s}^2$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 4{,}0 \times 10^{-4}\,\text{s}$$

Conclusion. $Q_m = 1{,}1\,\mu\text{C}$ et $T_0 \approx 0{,}40\,\text{ms}$.

B.3. 1 pts

Exprimer $i(t)$ et calculer l'amplitude I_m de l'intensité.

INDICE

Outil : dérive $q(t)$ avec la dérivée d'une fonction composée.

CORRIGÉ

Expression. $i(t) = \dfrac{\text{d}q}{\text{d}t} = -\dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t\right)$.

Amplitude. $\dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, avec $\sqrt{LC} \approx 6{,}29 \times 10^{-5}\,\text{s}$:

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}}$$
$$I_m \approx 1{,}7 \times 10^{-2}\,\text{A}$$

Conclusion. $i(t) = -I_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t\right)$, avec $I_m \approx 17\,\text{mA}$.

B.4. `0,75 pts`

Déterminer le premier instant $t_1 > 0$ où $|i|$ est maximale, et la valeur de q à cet instant.

INDICE

Outil : $|i|$ est maximale quand le sinus vaut 1 ou -1.

CORRIGÉ

Instant. Le sinus vaut 1 en valeur absolue pour la première fois quand $\dfrac{2\pi}{T_0}\,t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $t_1 = \dfrac{T_0}{4} \approx 0{,}099\,\text{ms}$.

Charge. À cet instant, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $q(t_1) = 0$.

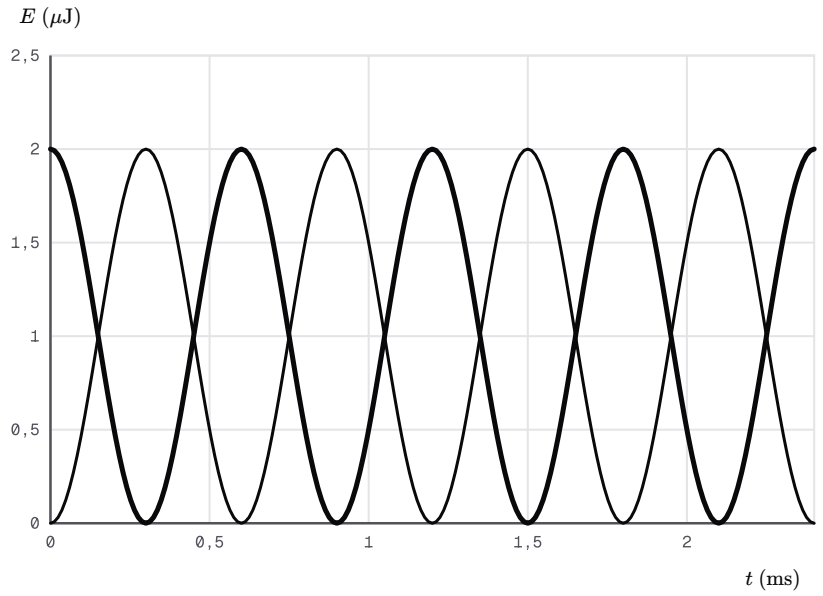
Conclusion. $|i|$ est maximale pour la première fois à $t_1 \approx 0{,}099\,\text{ms}$, quand le condensateur est déchargé.

Exercice 2 — 6 pts

Capteur d'humidité capacitif

Un capteur d'humidité est un condensateur dont la capacité augmente avec l'humidité de l'air. Il est associé à une bobine d'inductance $L = 0{,}35\ \text{H}$, de résistance négligeable : on mesure l'humidité par la période des oscillations du circuit LC obtenu.

Document. Énergies E_e du condensateur et E_m de la bobine, enregistrées pour une humidité inconnue ; à $t = 0$, le condensateur est chargé et le courant est nul.



Énergies du condensateur et de la bobine du capteur

A.1. — 0,75 pts

Partie A : période propre et équation du circuit. Pour une humidité donnée, la capacité vaut $C = 68\ \text{nF}$. Le courant i est orienté vers l'armature qui porte la charge q, et les tensions sont en convention récepteur.

Calculer la période propre T_0 du circuit.

INDICE

Outil : L en henrys et C en farads.

CORRIGÉ

Produit. $LC = 0{,}35 \times 6{,}8 \times 10^{-8} = 2{,}38 \times 10^{-8}\ \text{s}^2$.

Période propre.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 9{,}7 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

Conclusion. La période propre vaut environ $0{,}97\ \text{ms}$.

A.2. 0,5 pts

L'humidité de l'air augmente. Dire comment varie la période propre du circuit.

INDICE

Outil : regarde comment T_0 dépend de C.

CORRIGÉ

Raisonnement. La capacité augmente avec l'humidité, et $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ croît avec C.

Conclusion. Quand l'humidité augmente, la période propre augmente.

A.3. 1 pts

Montrer que la tension u_C vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0$$

INDICE

Outil : la loi d'additivité des tensions, avec les tensions du condensateur et de la bobine idéale.

CORRIGÉ

Tensions. $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\,\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}$.

Additivité. Sans générateur, $u_C + u_L = 0$:

$$u_C + LC\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

Conclusion. En divisant par LC, non nul, on obtient l'équation demandée.

A.4. 0,5 pts

Montrer que $u_C(t) = U_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t\right)$ est solution de cette équation si $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

INDICE

Outil : dérive deux fois, avec la dérivée d'une fonction composée, puis substitue.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,u_C(t)$.

Substitution. Le premier membre vaut $\left(\dfrac{1}{LC} - \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\right) u_C(t)$, nul pour tout t si $T_0^2 = 4\pi^2 LC$.

Conclusion. La fonction est solution pour $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, T_0 étant positive.

B.1. 0,5 pts

Partie B : exploitation des courbes d'énergie. La bobine est la même, $L = 0{,}35\,\mathrm{H}$; la capacité C' du capteur est inconnue.

Associer chaque courbe du document à l'énergie qu'elle représente.

INDICE

Outil : à $t = 0$, le condensateur est chargé et le courant est nul.

CORRIGÉ

Courbe 2. Elle est maximale à $t = 0$, quand le condensateur est chargé : c'est E_e.

Courbe 1. Elle est nulle à $t = 0$, quand le courant est nul : c'est E_m.

Conclusion. La courbe 1 représente l'énergie magnétique de la bobine, la courbe 2 l'énergie électrique du condensateur.

B.2. 0,5 pts

Lire la période des énergies sur le document, puis en déduire la période propre T_0' du circuit.

INDICE

Point délicat : une énergie dépend du carré de la charge ou du courant.

CORRIGÉ

Lecture. La courbe 2 repasse par son maximum à $t \approx 0{,}60\,\mathrm{ms}$: la période des énergies vaut environ $0{,}60\,\mathrm{ms}$.

Période propre. Elle est le double : $T_0' \approx 2 \times 0{,}60 = 1{,}2\,\mathrm{ms}$.

Conclusion. La période propre du circuit vaut environ $1{,}2\,\mathrm{ms}$.

B.3. 0,75 pts

Calculer la capacité C'. L'humidité est-elle plus grande ou plus petite que pour $C = 68\,\mathrm{nF}$?

INDICE

Outil : isole la capacité dans l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Capacité. $C' = \dfrac{T_0'^2}{4\pi^2 L}$, avec $T_0'^2 = 1{,}44 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^2$ et $4\pi^2 L \approx 13{,}8\,\mathrm{H}$:

$$C' = \frac{1{,}44 \times 10^{-6}}{13{,}8}$$
$$C' \approx 1{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{F}$$

Comparaison. C', voisine de $100\,\mathrm{nF}$, est nettement supérieure à $68\,\mathrm{nF}$, et la capacité croît avec l'humidité.

Conclusion. $C' \approx 0{,}10\,\mu\mathrm{F}$: l'humidité est plus grande que dans la situation à $68\,\mathrm{nF}$.

B.4. 0,75 pts

L'énergie totale du circuit est la valeur maximale commune aux deux courbes, $E \approx 2{,}0\,\mu\text{J}$. Avec $C' = 1{,}04 \times 10^{-7}\,\text{F}$, calculer la tension maximale U_m aux bornes du condensateur.

INDICE

Outil : l'énergie du condensateur quand $|u_C| = U_m$.

CORRIGÉ

Expression. Quand $|u_C| = U_m$, le courant est nul et $E = \dfrac{1}{2}\,C'\,U_m^2$.

Application numérique.

$$U_m = \sqrt{\frac{2E}{C'}}$$
$$U_m \approx 6{,}2\,\text{V}$$

Conclusion. La tension maximale aux bornes du condensateur vaut environ $6{,}2\,\text{V}$.

B.5. 0,75 pts

Que valent E_e et E_m aux instants où les deux courbes se croisent ? Justifier.

INDICE

Outil : la somme des deux énergies se conserve.

CORRIGÉ

Conservation. À chaque instant, $E_e + E_m = E \approx 2{,}0\,\mu\text{J}$.

Croisement. Les deux énergies y sont égales, donc chacune vaut $\dfrac{E}{2}$.

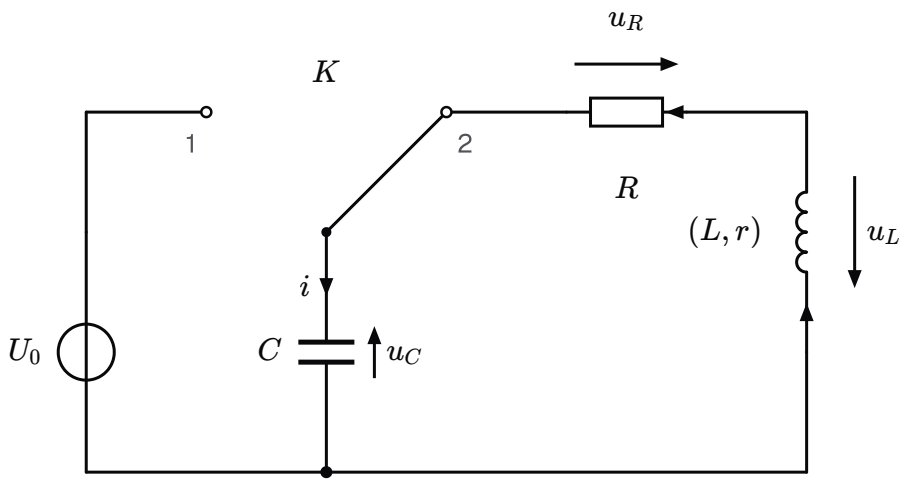
Conclusion. Aux croisements, $E_e = E_m \approx 1{,}0\,\mu\text{J}$.

Exercice 3 6 pts

Gâche de serrure électrique

La gâche d'une serrure électrique contient une bobine d'inductance $L = 0{,}45\,\mathrm{H}$ et de résistance $r = 7{,}2\,\Omega$. Pour la tester, on décharge dans cette bobine, à travers un résistor $R = 6{,}8\,\Omega$, un condensateur de capacité $C = 47\,\mu\mathrm{F}$ préalablement chargé sous $U_0 = 12\,\mathrm{V}$.

Document. Schéma du montage, avec l'orientation du courant et les tensions fléchées pendant la décharge.



Montage de test de la bobine de la gâche

A.1. 0,75 pts

Partie A : montage et équation du circuit.

Indiquer la position du commutateur K pour charger le condensateur, puis pour étudier sa décharge. Préciser comment brancher la voie Y_1 et la masse d'un oscilloscope pour visualiser u_C.

INDICE

Outil : repère la maille formée avec le condensateur dans chaque position. **Point délicat :** l'oscilloscope affiche la tension entre la voie et la masse.

CORRIGÉ

Positions. En position 1, le condensateur est relié au générateur et se charge. En position 2, celle du document, il se décharge dans le résistor et la bobine.

Branchements. La voie Y_1 à l'armature reliée au point commun du commutateur, la masse à l'autre armature, reliée au fil du bas.

Conclusion. Position 1 pour la charge, position 2 pour la décharge ; u_C se visualise entre la voie Y_1 et la masse placées aux bornes du condensateur.

A.2. 1,25 pts

Montrer que, pendant la décharge, la tension u_C vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R+r}{L}\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0$$

INDICE

Outil : la loi d'additivité des tensions, avec la loi d'Ohm et la tension d'une bobine résistive.

CORRIGÉ

Tensions. $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; $u_R = R\,i$ et $u_L = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, en convention récepteur.

Additivité. Sans générateur dans la maille :

$$u_C + (R+r)\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

Une seule inconnue. On remplace i par $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ par $C\,\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}$, puis on divise par LC.

Conclusion. La tension u_C vérifie l'équation demandée.

A.3. 0,5 pts

Quel terme de l'équation traduit l'amortissement ? Les oscillations seraient-elles encore amorties sans le résistor ?

INDICE

Outil : compare cette équation à celle du circuit idéal.

CORRIGÉ

Terme. C'est le terme $\dfrac{R+r}{L}\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, absent de l'équation du circuit idéal.

Sans résistor. Le terme devient $\dfrac{r}{L}\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, non nul, car la bobine a une résistance.

Conclusion. Le terme en $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ traduit l'amortissement ; sans résistor, les oscillations restent amorties par la résistance de la bobine.

A.4. 0,5 pts

Calculer la période propre T_0 du circuit.

INDICE

Outil : l'expression de la période propre, en unités SI.

CORRIGÉ

Produit. $LC = 0{,}45 \times 4{,}7 \times 10^{-5} \approx 2{,}12 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^2$.

Période propre.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 2{,}9 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$$

Conclusion. La période propre vaut environ $29\,\mathrm{ms}$.

B.1. 1 pts

Partie B : bilan d'énergie. Le condensateur de $47\,\mu\mathrm{F}$, chargé sous $12\,\mathrm{V}$, se décharge dans le circuit de résistance totale $R + r$, avec $R = 6{,}8\,\Omega$ et $r = 7{,}2\,\Omega$. L'énergie totale est $E = \dfrac{1}{2}\,C\,u_C^2 + \dfrac{1}{2}\,L\,i^2$, et $u_C + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i$.

Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2$, puis interpréter le signe.

INDICE

Début : dérive chaque terme de E par rapport au temps.

CORRIGÉ

Dérivée.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = C\,u_C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Elle s'écrit $i\left(u_C + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)$, et la relation donnée la ramène à $-(R + r)\,i^2$.

Signe. Ce terme est négatif ou nul : l'énergie totale diminue, dissipée par effet Joule.

Conclusion. $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2$: le circuit perd de l'énergie sous forme de chaleur.

B.2. 0,5 pts

Calculer l'énergie totale E_0 du circuit au début de la décharge.

INDICE

Outil : au début de la décharge, le courant est nul.

CORRIGÉ

Expression. À $t = 0$, $i = 0$, donc $E_0 = \dfrac{1}{2}\, C\, U_0^2$.

Application numérique.

$$E_0 = \frac{47 \times 10^{-6} \times 12^2}{2}$$
$$E_0 \approx 3{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

Conclusion. L'énergie initiale du circuit vaut environ $3{,}4\ \mathrm{mJ}$.

B.3. 1 pts

Une pseudo-période après le début de la décharge, le courant est de nouveau nul et $u_C = 7{,}7\ \mathrm{V}$. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant cette pseudo-période.

INDICE

Outil : quand le courant est nul, l'énergie totale est toute dans le condensateur.

CORRIGÉ

Énergie restante.

$$E_1 = \frac{47 \times 10^{-6} \times 7{,}7^2}{2}$$
$$E_1 \approx 1{,}39 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

Énergie dissipée. Avec $E_0 \approx 3{,}38 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$ non arrondie :

$$E_0 - E_1 \approx 3{,}38 - 1{,}39$$
$$E_0 - E_1 \approx 2{,}0\ \mathrm{mJ}$$

Conclusion. Pendant la première pseudo-période, le circuit dissipe environ $2{,}0\ \mathrm{mJ}$ par effet Joule.

B.4. 0,5 pts

Calculer la fraction de l'énergie initiale dissipée pendant cette pseudo-période.

INDICE

Outil : le rapport de deux énergies.

CORRIGÉ

Fraction. $\dfrac{E_0 - E_1}{E_0} \approx \dfrac{1{,}99}{3{,}38} \approx 0{,}59$, soit environ $59\ \%$.

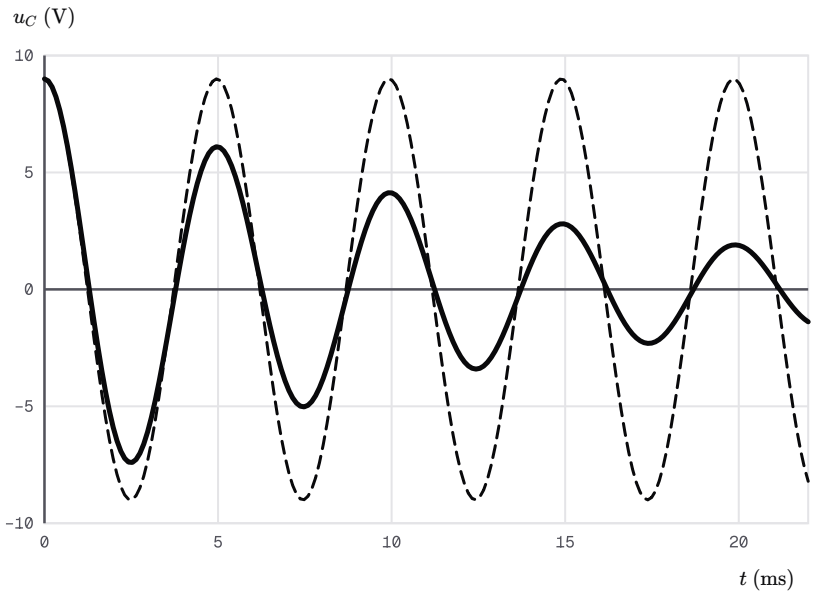
Conclusion. Pendant la première pseudo-période, environ $59\ \%$ de l'énergie initiale est dissipée par effet Joule.

Exercice 4 6 pts

Avertisseur de recul

Le signal sonore d'un avertisseur de recul est produit par un circuit RLC série : condensateur de capacité $C = 3{,}9\,\mu\text{F}$, résistor $R = 18\,\Omega$, bobine d'inductance $L = 0{,}16\,\text{H}$ et de résistance $r = 7{,}0\,\Omega$. Le condensateur est chargé sous $U_0 = 9{,}0\,\text{V}$.

Document. Tension $u_C(t)$ enregistrée sans générateur d'entretien (courbe 1), puis avec un générateur d'entretien en série (courbe 2).



Tension aux bornes du condensateur de l'avertisseur, sans puis avec entretien

A.1. 0,75 pts

Partie A : exploitation des enregistrements.

Nommer le régime de chacune des deux courbes.

INDICE

Outil : compare l'évolution de l'amplitude des deux courbes.

CORRIGÉ

Courbe 1. Les maximums sont de plus en plus bas : régime pseudo-périodique.

Courbe 2. L'amplitude reste constante : régime périodique, celui des oscillations entretenues.

Conclusion. La courbe 1 est pseudo-périodique, la courbe 2 périodique.

A.2. 0,5 pts

Mesurer la pseudo-période T de la courbe 1 sur quatre oscillations.

INDICE

Outil : repère deux maximums séparés par quatre oscillations et lis leur écart en temps.

CORRIGÉ

Lecture. Le premier maximum est à $t = 0$, le cinquième à environ $20\,\text{ms}$.

Calcul. $4T \approx 20\,\text{ms}$, donc $T \approx 5{,}0\,\text{ms}$.

Conclusion. La pseudo-période de la courbe 1 vaut environ $5{,}0\,\text{ms}$.

A.3. 0,75 pts

Calculer la période propre T_0 du circuit et la comparer à T.

INDICE

Outil : l'expression de la période propre, en unités SI.

CORRIGÉ

Produit. $LC = 0{,}16 \times 3{,}9 \times 10^{-6} \approx 6{,}24 \times 10^{-7}\,\text{s}^2$.

Période propre.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{s}$$

Comparaison. T et T_0 sont égales à la précision de la lecture.

Conclusion. $T_0 \approx 5{,}0\,\text{ms}$: l'amortissement est assez faible pour que $T \approx T_0$.

A.4. 0,75 pts

À l'instant $t = T$, le courant est nul. Lire u_C à cet instant sur la courbe 1, puis calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant la première pseudo-période.

INDICE

Outil : quand le courant est nul, l'énergie totale est celle du condensateur. **Ensuite :** fais la différence de deux énergies.

CORRIGÉ

Lecture. À $t = T \approx 5{,}0\,\text{ms}$, la courbe 1 passe par un maximum : $u_C \approx 6{,}1\,\text{V}$.

Énergies. $E(0) = \dfrac{1}{2}\,C\,U_0^2 \approx 1{,}58 \times 10^{-4}\,\text{J}$ et $E(T) \approx \dfrac{1}{2}\,C \times 6{,}1^2 \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{J}$.

Énergie dissipée.

$$\Delta E \approx 1{,}58 \times 10^{-4} - 7{,}3 \times 10^{-5}$$
$$\Delta E \approx 8{,}5 \times 10^{-5}\,\text{J}$$

Conclusion. Pendant la première pseudo-période, le circuit dissipe environ $8{,}5 \times 10^{-5}\,\text{J}$ par effet Joule.

B.1. 1 pts

Partie B : le circuit entretenu. Un générateur G, placé en série, délivre la tension $u_G = k\,i$, fléchée en convention générateur ; les autres tensions sont en convention récepteur, et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Montrer que la charge q vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r - k}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,q = 0$$

INDICE

Outil : la loi d'additivité des tensions ; la tension du générateur égale la somme des tensions des récepteurs.

CORRIGÉ

Additivité.

$$k\,i = \frac{q}{C} + (R + r)\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Une seule inconnue. Avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$, on regroupe les termes en $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et on divise par L.

Conclusion. La charge vérifie l'équation demandée.

B.2. 0,75 pts

Calculer la valeur de k qui entretient les oscillations, sachant que $R = 18\,\Omega$ et $r = 7{,}0\,\Omega$.

INDICE

Outil : le terme d'amortissement de l'équation doit disparaître.

CORRIGÉ

Condition. Le terme en $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ est nul pour $k = R + r$.

Application numérique. $k = 18 + 7{,}0 = 25\,\Omega$.

Conclusion. Le générateur entretient les oscillations pour $k = 25\,\Omega$.

B.3. 0,5 pts

Justifier que la courbe 2 du document correspond au réglage $k = R + r$.

INDICE

Outil : pour ce réglage, l'équation est celle du circuit idéal ; regarde l'amplitude et la période.

CORRIGÉ

Équation. Pour $k = R + r$, on retrouve l'équation du circuit idéal : ses solutions sont sinusoïdales, d'amplitude constante et de période T_0.

Document. La courbe 2 a une amplitude constante, égale à la tension initiale, et une période voisine de $5{,}0\,\text{ms}$.

Conclusion. La courbe 2 montre bien des oscillations entretenues, obtenues avec $k = R + r$.

B.4. 1 pts

Le générateur fournit à chaque instant la puissance $k\,i^2$. Sur une période, la valeur moyenne de i^2 vaut $\dfrac{I_m^2}{2}$. Avec $I_m = 44\,\text{mA}$ et $T_0 = 4{,}96\,\text{ms}$, calculer l'énergie W fournie pendant une période. Que devient cette énergie ?

INDICE

Début : l'énergie fournie pendant une période est la puissance moyenne multipliée par la période.

Point délicat : compare la puissance fournie à la puissance dissipée.

CORRIGÉ

Expression. $W = k\,\dfrac{I_m^2}{2}\,T_0$.

Application numérique.

$$\begin{aligned} W &= 25 \times \frac{0{,}044^2}{2} \\ &\quad \times 4{,}96 \times 10^{-3} \\ W &\approx 1{,}2 \times 10^{-4}\,\text{J} \end{aligned}$$

Devenir. Avec $k = R + r$, la puissance fournie $k\,i^2$ égale à chaque instant la puissance $(R + r)\,i^2$ dissipée par effet Joule.

Conclusion. Le générateur fournit environ $1{,}2 \times 10^{-4}\,\text{J}$ par période, exactement l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances.

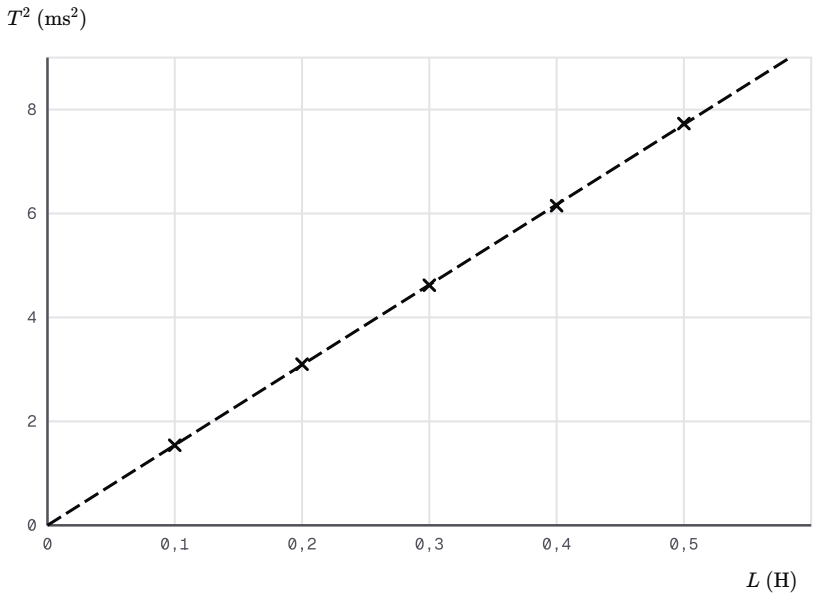
Exercice 5 6 pts

Diapason électronique

Un club d'électronique fabrique un diapason électronique, qui doit émettre un son de fréquence $440\,\text{Hz}$. Il dispose d'un condensateur de capacité inconnue et de bobines de résistance faible, d'inductances connues.

Document. Pour chaque bobine, associée au même condensateur, on a mesuré la pseudo-période T des oscillations libres. On a représenté T^2 en fonction de L, avec la droite de modélisation.

L (H)	T (ms)	T^2 (ms^2)
0,10	1,24	1,54
0,20	1,76	3,10
0,30	2,15	4,62
0,40	2,48	6,15
0,50	2,78	7,73



Carré de la pseudo-période en fonction de l'inductance

A.1. `0,75 pts`

Partie A : mesure de la capacité.

Proposer un montage, en représentant son schéma, et un protocole pour mesurer la pseudo-période T avec l'une des bobines.

INDICE

Début : pars de l'état du condensateur au début de l'enregistrement. **Point délicat :** pense à la précision de la mesure de T.

CORRIGÉ

Montage. Un générateur de tension continue, le condensateur, la bobine et un commutateur à deux positions : position 1 pour la charge, position 2 pour la décharge dans la bobine. La voie Y_1 d'un oscilloscope et sa masse aux bornes du condensateur (schéma ci-dessous).

Protocole. Charger le condensateur, régler l'oscilloscope en mode monocoup, basculer le commutateur, puis mesurer la durée de plusieurs oscillations et la diviser par leur nombre.

Conclusion. Un montage à commutateur, avec u_C visualisée à l'oscilloscope, permet de mesurer T sur plusieurs oscillations.

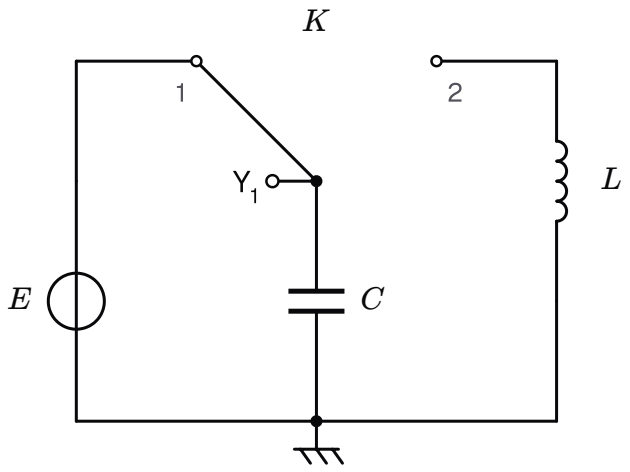


Schéma du montage de mesure de la pseudo-période

A.2. 0,5 pts

La résistance des bobines étant faible, on admet que $T \approx T_0$. Montrer que T^2 est proportionnelle à L, et vérifier que le document le confirme.

INDICE

Outil : élève au carré l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Relation. $T^2 \approx T_0^2 = 4\pi^2 C\, L$; le condensateur étant le même, $4\pi^2 C$ est constant.

Document. Les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.

Conclusion. T^2 est proportionnelle à L, de coefficient $4\pi^2 C$, comme le montrent les mesures.

A.3. 1 pts

Déterminer le coefficient directeur a de la droite, puis calculer la capacité C du condensateur.

INDICE

Début : prends un point de la droite éloigné de l'origine. **Point délicat :** convertis a en $\mathrm{s^2 \cdot H^{-1}}$ avant de calculer C.

CORRIGÉ

Pente. La droite passe par l'origine et par le point d'abscisse $0{,}50\,\mathrm{H}$ et d'ordonnée $7{,}71\,\mathrm{ms^2}$ environ :

$$a = \frac{7{,}71}{0{,}50}$$
$$a \approx 15{,}4\,\mathrm{ms^2 \cdot H^{-1}}$$

soit $a \approx 1{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{s^2 \cdot H^{-1}}$.

Capacité. $a = 4\pi^2 C$, donc :

$$C = \frac{a}{4\pi^2}$$
$$C \approx 3{,}9 \times 10^{-7}\,\mathrm{F}$$

Conclusion. La pente vaut environ $15{,}4\,\mathrm{ms^2 \cdot H^{-1}}$ et la capacité du condensateur environ $0{,}39\,\mu\mathrm{F}$.

A.4. 0,5 pts

Déterminer, à l'aide de la droite, la pseudo-période attendue avec une bobine d'inductance $0{,}27\,\mathrm{H}$.

INDICE

Outil : lis l'ordonnée de la droite pour cette abscisse, ou utilise sa pente.

CORRIGÉ

Lecture. Pour $L = 0{,}27\,\mathrm{H}$, la droite donne $T^2 \approx 15{,}4 \times 0{,}27 \approx 4{,}2\,\mathrm{ms^2}$.

Pseudo-période.

$$T \approx \sqrt{4{,}2}\,\mathrm{ms}$$
$$T \approx 2{,}0\,\mathrm{ms}$$

Conclusion. Avec cette bobine, la pseudo-période attendue vaut environ $2{,}0\,\mathrm{ms}$.

B.1. 1 pts

Partie B : accord du diapason. Le club choisit une bobine d'inductance marquée $L = 0{,}22\,\text{H}$, de résistance négligeable.

Calculer la capacité C_0 qui donne une fréquence propre de $440\,\text{Hz}$.

INDICE

Début : la période propre est l'inverse de la fréquence. **Ensuite :** isole la capacité dans l'expression de la période propre.

CORRIGÉ

Période. $T_0 = \dfrac{1}{440} \approx 2{,}27 \times 10^{-3}\,\text{s}$.

Capacité. $C_0 = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L}$, avec $T_0^2 \approx 5{,}17 \times 10^{-6}\,\text{s}^2$ et $4\pi^2 L \approx 8{,}69\,\text{H}$:

$$C_0 \approx \frac{5{,}17 \times 10^{-6}}{8{,}69}$$
$$C_0 \approx 5{,}9 \times 10^{-7}\,\text{F}$$

Conclusion. Il faut une capacité d'environ $0{,}59\,\mu\text{F}$.

B.2. 0,75 pts

Le condensateur de $0{,}59\,\mu\text{F}$ est chargé sous $U_m = 3{,}5\,\text{V}$ avant chaque note. Calculer l'énergie totale E du circuit.

INDICE

Outil : quand le condensateur est chargé, le courant est nul.

CORRIGÉ

Expression. $E = \dfrac{1}{2}\,C_0\,U_m^2$.

Application numérique.

$$E = \frac{0{,}59 \times 10^{-6} \times 3{,}5^2}{2}$$
$$E \approx 3{,}6 \times 10^{-6}\,\text{J}$$

Conclusion. L'énergie totale du circuit vaut environ $3{,}6\,\mu\text{J}$.

B.3. 0,75 pts

En déduire l'amplitude I_m de l'intensité du courant.

INDICE

Outil : l'énergie se conserve ; elle est toute dans la bobine quand le condensateur est déchargé.

CORRIGÉ

Expression. $E = \dfrac{1}{2}\,L\,I_m^2$, donc $I_m = \sqrt{\dfrac{2E}{L}}$.

Application numérique. Avec $E \approx 3{,}61 \times 10^{-6}\ \text{J}$ non arrondie :

$$I_m = \sqrt{\frac{7{,}23 \times 10^{-6}}{0{,}22}}$$
$$I_m \approx 5{,}7 \times 10^{-3}\ \text{A}$$

Conclusion. L'intensité oscille avec une amplitude d'environ $5{,}7\ \text{mA}$.

B.4. 0,75 pts

Monté avec le condensateur de $0{,}59\ \mu\text{F}$, le diapason émet en réalité $452\ \text{Hz}$: l'inductance réelle de la bobine s'écarte un peu de sa valeur marquée. Faut-il une capacité plus grande ou plus petite ? Calculer la capacité C_2 qui donne $440\ \text{Hz}$ avec cette même bobine.

INDICE

Outil : l'expression de la période propre. **Point délicat :** l'inductance réelle est inconnue, mais elle ne change pas.

CORRIGÉ

Sens. La fréquence $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est trop grande ; elle diminue quand C augmente : il faut une capacité plus grande.

Rapport. Pour la même bobine, le carré de la fréquence est inversement proportionnel à C : $\dfrac{C_2}{0{,}59\ \mu\text{F}} = \left(\dfrac{452}{440}\right)^2 \approx 1{,}055$, d'où

$$C_2 \approx 1{,}055 \times 0{,}59$$
$$C_2 \approx 0{,}62\ \mu\text{F}$$

Conclusion. Il faut une capacité plus grande, d'environ $0{,}62\ \mu\text{F}$: le calcul de la question B.1 ne suffit pas, car la bobine réelle diffère de son modèle.