BURHAN

Oscillations libres dans un circuit RLC série

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/oscillations-libres-circuit-rlc-serie/cours

Chapitre	Semestre
Oscillations libres dans un circuit RLC série	Semestre 2

Décharger un condensateur dans une bobine

Le montage de charge et de décharge

En travaux pratiques, tu disposes d'un générateur de tension constante $U_0 = 6{,}0\,\mathrm{V}$, d'un condensateur de capacité $C = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$ et d'une bobine à noyau de fer. Cette bobine a une inductance $L = 0{,}10\,\mathrm{H}$ et une résistance $r = 12\,\Omega$. Un résistor $R = 10\,\Omega$ et un commutateur K à deux positions complètent le montage.

En position 1, le condensateur se charge sous la tension U_0. En position 2, il est relié en série à la bobine et au résistor. Le générateur ne fait alors plus partie du circuit.

Devine : La tension après le basculement

Le condensateur est chargé. À l'instant $t = 0$, on bascule K en position 2. Comment évolue ensuite la tension u_C aux bornes du condensateur ?

A. Elle décroît vers zéro sans jamais changer de signe.

Faux.
C'est la décharge dans un simple résistor, vue avec le dipôle RC. La bobine change ce comportement.

B. Elle change plusieurs fois de signe, avec des extremums décroissants.

Juste.
Juste : la bobine prolonge le courant après l'annulation de u_C, ce qui recharge le condensateur en sens inverse.

C. Elle reste égale à U_0, faute de générateur.

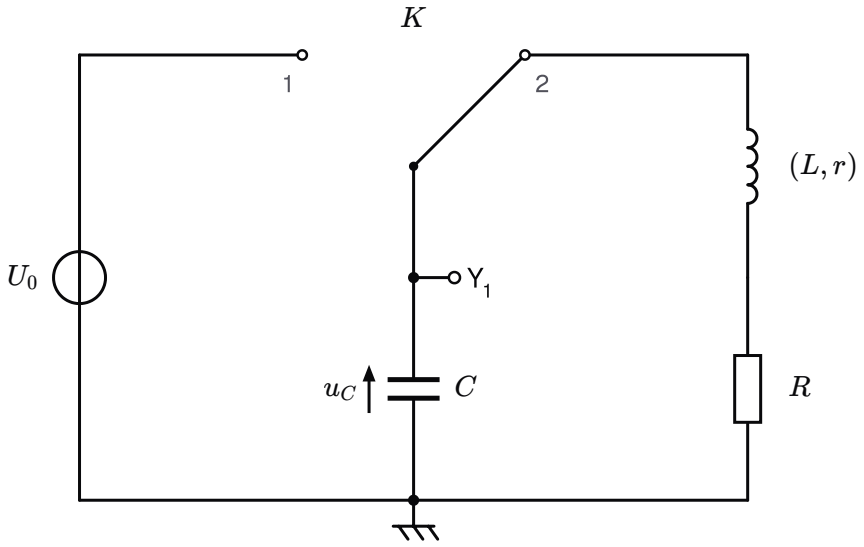
Faux.
Sans générateur, rien ne maintient la tension : le condensateur se décharge dès la fermeture du circuit.

D. Elle augmente au-delà de U_0.

Faux.
Aucune source n'apporte d'énergie après le basculement : la tension ne dépasse pas sa valeur de départ.

Correction

La bobine s'oppose aux variations de l'intensité. Quand u_C s'annule, le courant ne s'arrête pas d'un coup. Il continue de circuler et charge le condensateur en sens inverse : u_C devient négative. Puis le phénomène se répète. L'oscillogramme qui suit le montre.



Montage de travaux pratiques : charge du condensateur en position 1, décharge dans la bobine et le résistor en position 2 (représentée).

Visualiser la tension du condensateur

Rappel : un oscilloscope affiche la tension entre une de ses entrées et sa masse. On relie l'entrée Y_1 à l'armature du condensateur reliée au commun de K. La masse est reliée à l'autre armature. La voie Y_1 affiche alors u_C.

La décharge ne se produit qu'une fois. On l'enregistre avec un oscilloscope à mémoire, ou avec un système d'acquisition relié à un ordinateur. L'enregistrement démarre au basculement de K.

Vérifie : Un appareil assez rapide

Les oscillations de la décharge durent une vingtaine de millisecondes. Pourquoi un voltmètre ne suffit-il pas pour les étudier ?

A. Il ne suit pas des variations qui durent quelques millisecondes.
Juste.
Juste : il faut enregistrer u_C en fonction du temps.

B. Il ne sait pas mesurer une tension négative.
Faux.
Un voltmètre affiche une tension négative avec son signe ; le problème est la durée du phénomène.

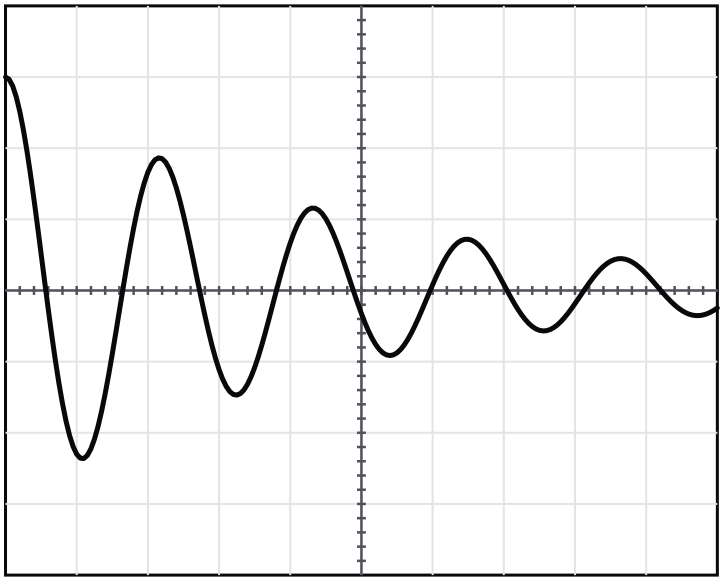
C. Il détournerait tout le courant de la décharge.

Faux.

Un voltmètre a une très grande résistance : il ne prélève presque aucun courant.

Correction

Un voltmètre renouvelle son affichage quelques fois par seconde. Il ne suit donc pas des variations de quelques millisecondes. L'oscilloscope à mémoire ou le système d'acquisition enregistre $u_C(t)$, que l'on exploite ensuite.



Voie Y_1 : 2 V/div Balayage : 2 ms/div

Oscillogramme de la tension du condensateur pendant la décharge (R = 10 Ω). Voie Y1 : 2 V/div ; balayage : 2 ms/div.

Des oscillations libres et amorties

Lecture de l'écran. À $t = 0$, la trace est à $3{,}0$ divisions au-dessus de l'axe central. Avec $2\,\mathrm{V}$ par division :

$$u_C(0) = 3{,}0 \times 2 = 6{,}0\,\mathrm{V}.$$

C'est la tension U_0 de la charge. Ensuite, u_C s'annule, devient négative, puis redevient positive. Elle change de signe à intervalles de temps réguliers.

Définition : Oscillations libres d'un circuit RLC série

Un condensateur de capacité C, **préalablement chargé**, est relié à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance L et de résistance r, en série avec un résistor de résistance R. Le circuit ne contient aucun générateur : c'est un **circuit RLC série en décharge**.

Si l'amortissement est assez faible, la tension u_C aux bornes du condensateur change alors de signe à intervalles de temps réguliers. Le circuit est le siège d'**oscillations électriques libres**. Elles sont libres : le circuit évolue seul, avec l'énergie stockée au départ dans le condensateur.

Vérifie : Le sens du mot libres

Pendant la décharge, pourquoi dit-on que les oscillations de u_C sont **libres** ?

A. On choisit librement leur période avec le commutateur.

Faux.
Le commutateur ne fait que lancer la décharge ; la période dépend des composants du circuit.

B. La bobine est libre de toute résistance.

Faux.
La bobine a une résistance $r = 12\,\Omega$; le mot « libres » porte sur l'absence de générateur.

C. Aucun générateur n'agit : le circuit évolue seul.

Juste.
Juste : seule l'énergie stockée pendant la charge est disponible.

Correction
Après le basculement, le générateur est hors du circuit. Le condensateur, chargé au départ, est la seule réserve d'énergie : le circuit évolue seul. C'est le sens du mot « libres ».

Exemple : Le premier minimum de la tension

Sur l'écran, le premier minimum de la trace est environ $2{,}4$ divisions sous l'axe central. On en déduit :

$$u_C \approx -2{,}4 \times 2 = -4{,}8\,\text{V}.$$

En valeur absolue, $4{,}8\,\text{V}$ est inférieur à $6{,}0\,\text{V}$. D'un extremum au suivant, la tension perd de l'amplitude : les oscillations sont **amorties**.

Lire un maximum sur l'écran

À toi : La tension au deuxième maximum

Sur le même écran, le deuxième maximum de la trace est environ $1{,}9$ division au-dessus de l'axe central. Calcule la valeur de u_C à cet instant. Compare-la à sa valeur initiale par un quotient. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Multiplie le nombre de divisions par la sensibilité verticale.
Indice 2

Divise ensuite cette tension par $u_C(0) = 6{,}0\,\mathrm{V}$.

Indice 3

Point délicat : une division vaut $2\,\mathrm{V}$ sur cette voie, et non $1\,\mathrm{V}$.

Réponse

$u_C \approx 1{,}9 \times 2 = 3{,}8\,\mathrm{V}$. Le quotient vaut

$$\frac{3{,}8}{6{,}0} \approx 0{,}63.$$

Après une oscillation complète, le maximum ne vaut plus que $63\,\%$ environ de sa valeur initiale : l'amortissement est net.

Dans ce chapitre, tu nommes les régimes de ces oscillations et tu mesures leur durée. Tu établis les équations différentielles des circuits, sans résistance puis avec résistance. Tu suis l'énergie du circuit. Enfin, tu apprends à entretenir les oscillations.

Décrire les régimes d'oscillations

Trois résistances, trois enregistrements

On garde le condensateur et la bobine du montage ; le condensateur est chargé chaque fois sous $U_0 = 6{,}0\,\mathrm{V}$. On recommence la décharge avec trois résistors : $R = 10\,\Omega$, puis $R = 60\,\Omega$, puis $R = 680\,\Omega$. Un système d'acquisition enregistre chaque fois $u_C(t)$.

Devine : L'effet d'une résistance plus grande

Que prévois-tu quand on passe de $R = 10\,\Omega$ à $R = 680\,\Omega$?

A. Les oscillations deviennent nettement plus rapides.

Faux.

La durée d'une oscillation dépend surtout de L et de C, inchangés ici.

B. Les oscillations deviennent plus amples.

Faux.

Une résistance dissipe de l'énergie : elle n'augmente pas l'amplitude.

C. L'amplitude diminue plus vite, jusqu'à la disparition des oscillations.

Juste.

Juste : la part de l'énergie dissipée pendant un échange augmente avec la résistance totale.

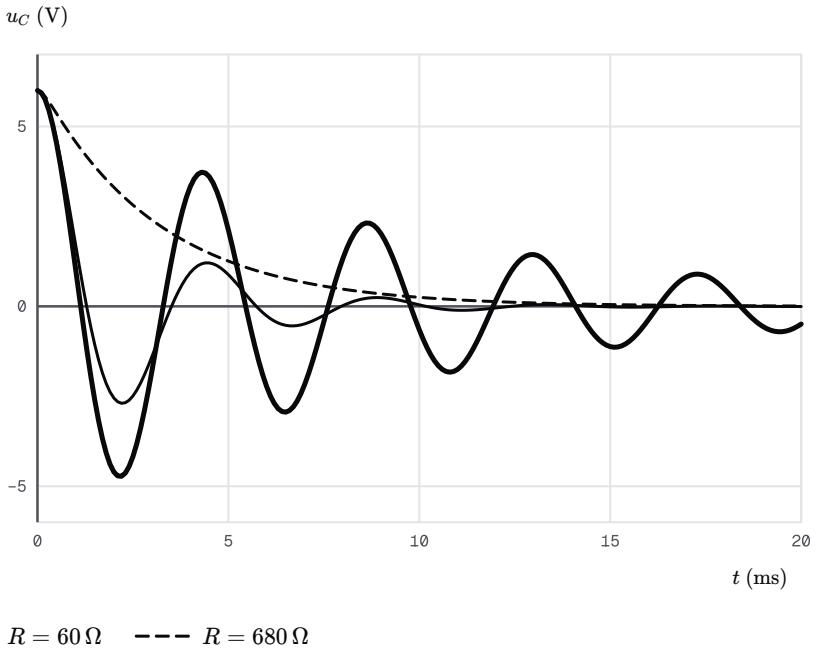
D. Rien ne change, car la bobine reste la même.

Faux.

$680\,\Omega$ est bien plus grand que $r = 12\,\Omega$: la résistance totale change beaucoup.

Correction

Pendant un échange entre le condensateur et la bobine, la part de l'énergie dissipée augmente avec la résistance totale $R + r$: l'amplitude diminue plus vite. Pour une résistance assez grande, l'énergie est dissipée avant que la charge ne s'inverse : u_C retourne vers zéro sans changer de signe. Les trois enregistrements le montrent.



Tension du condensateur pendant la décharge, pour trois valeurs de R ; même condensateur et même bobine.

Nommer les trois régimes

Lecture. Pour $R = 10\,\Omega$, on compte plusieurs oscillations, d'amplitude lentement décroissante. Pour $R = 60\,\Omega$, l'amplitude chute vite : après deux oscillations, la courbe se confond presque avec l'axe. Pour $R = 680\,\Omega$, u_C décroît vers zéro sans changer de signe. Ces trois comportements portent un nom.

Définition : Régimes périodique, pseudo-périodique et apériodique

Selon l'importance de l'amortissement, la tension $u_C(t)$ d'un circuit RLC série en décharge évolue suivant l'un de trois **régimes** :

- **périodique** : l'amplitude des oscillations reste constante ; c'est le modèle du circuit dont la résistance totale est nulle (circuit LC idéal), de période T_0 appelée **période propre** ;
- **pseudo-périodique** : u_C oscille avec une amplitude qui diminue au cours du temps ; la durée qui sépare deux maximums successifs de u_C est la **pseudo-période** T ;
- **apériodique** : u_C tend vers zéro sans osciller ; il n'y a ni période ni pseudo-période.

Vérifie : Le régime de la deuxième courbe

Dans quel régime est le circuit pour $R = 60\,\Omega$?

A. Apériodique, car l'amplitude devient vite très faible.

Faux.

La tension change de signe avant de s'éteindre : ce n'est pas un retour à zéro sans oscillation.

B. Pseudo-périodique, car u_C change de signe en s'amortissant.

Juste.

Juste : l'amortissement est fort, mais la tension oscille.

C. Périodique, car les changements de signe sont réguliers.

Faux.

Un régime périodique garde une amplitude constante ; ici, elle diminue.

Correction

La courbe change de signe, et ses extremums diminuent : le régime est pseudo-périodique, même si l'amortissement est fort. Le régime apériodique exige que u_C revienne vers zéro sans osciller.

Remarque : Le régime critique et le modèle périodique

Entre les deux derniers comportements, il existe une valeur limite de la résistance. Le régime qui lui correspond est appelé **régime critique**. Ce chapitre le nomme seulement, sans le calculer.

Le régime périodique, lui, est un modèle : il suppose une résistance totale nulle.

Mesurer une pseudo-période

Méthode : Mesurer une période ou une pseudo-période sur un écran

1. **Choisir** deux points de même nature sur la trace : deux sommets, ou deux points où elle coupe l'axe en montant.
2. **Les prendre éloignés** : ils doivent encadrer le plus d'oscillations complètes possible, soit n oscillations.
3. **Mesurer** leur écart horizontal en divisions, à la précision de la graduation. Le multiplier par la durée d'une division donne nT.
4. **Diviser** par n. Une mesure sur plusieurs oscillations réduit l'erreur relative de lecture.

Exemple : La pseudo-période sur l'oscillogramme de la décharge

Sur l'oscillogramme de la décharge ($R = 10\,\Omega$), le premier maximum est sur le bord gauche. Le cinquième maximum est $8{,}6$ divisions plus loin : ces deux sommets encadrent 4 oscillations. Avec $2\,\text{ms}$ par division :

$$T = \frac{8{,}6 \times 2}{4} \approx 4{,}3\,\text{ms}.$$

À toi : Une pseudo-période sur un autre écran

Un autre oscillogramme est réglé à $1\,\text{ms}$ par division. On y repère six maximums successifs ; le premier et le sixième sont séparés de $9{,}0$ divisions. Calcule la pseudo-période T. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compte les oscillations complètes entre le premier et le sixième maximum.
Indice 2
Convertis l'écart en millisecondes, puis divise par ce nombre d'oscillations.
Indice 3
Point délicat : six maximums délimitent cinq intervalles, et non six.

Réponse
Entre le premier et le sixième maximum, il y a 5 oscillations complètes. Donc $5\,T = 9{,}0 \times 1 = 9{,}0\,\text{ms}$, et

$$T = \frac{9{,}0}{5} = 1{,}8\,\text{ms}.$$

Diviser par 6 donnerait $1{,}5\,\text{ms}$: une valeur fausse.

Reconnaître un régime

Méthode : Reconnaître le régime d'une décharge sur une courbe

1. **Regarder le signe** : si u_C retourne vers zéro sans changer de signe, le régime est apériodique, sans pseudo-période.
2. **Comparer les extremums** : s'ils diminuent d'une oscillation à la suivante, le régime est pseudo-périodique.
3. **Vérifier l'amplitude** : une amplitude constante signe le régime périodique, celui du modèle sans résistance.
4. **Relier** le régime à la résistance totale : en régime pseudo-périodique, plus elle est grande, plus l'amplitude diminue vite ; au-delà d'une valeur limite, le régime devient apériodique.

Vérifie : Un régime périodique avec ce montage

Peut-on obtenir un régime périodique avec ce montage en retirant le résistor ($R = 0$) ?

A. Non : la bobine garde sa résistance, l'amplitude diminue encore.

Juste.

Juste : la résistance totale vaut encore $r = 12\,\Omega$.

B. Oui : sans résistor, l'amplitude reste constante.

Faux.

Il reste la résistance $r = 12\,\Omega$ de la bobine, qui dissipe de l'énergie.

C. Non : sans résistor, le régime devient apériodique.

Faux.

Diminuer la résistance réduit l'amortissement ; elle ne le renforce pas.

Correction

Sans résistor, la résistance totale vaut encore $r = 12\,\Omega$. L'amortissement est plus faible, mais l'amplitude diminue toujours : le régime reste pseudo-périodique. Le régime périodique est le modèle d'un circuit de résistance totale nulle.

Mettre en équation le circuit LC sans résistance

Un circuit sans résistance

Devine : Des oscillations sans résistance

Imagine le circuit de la décharge sans aucune résistance : ni résistor, ni résistance de la bobine. Que deviendraient les oscillations de u_C ?

A. Elles s'amortiraient quand même, un peu plus lentement.

Faux.

L'amortissement vient de la résistance ; sans elle, rien ne dissipe l'énergie.

B. Elles garderaient la même amplitude sans fin.

Juste.

Juste : sans résistance, rien ne fait baisser l'amplitude.

C. Il n'y en aurait plus : u_C resterait égale à U_0.

Faux.

Le condensateur se décharge toujours dans la bobine : un courant circule.

Correction

L'amortissement des enregistrements vient de la résistance totale, qui dissipe de l'énergie. Sans elle, rien ne fait diminuer l'amplitude : les oscillations seraient périodiques. Ce circuit idéal est un **modèle**. On en établit l'équation.

Le circuit de modèle. Dans cette section et les trois suivantes, on étudie un circuit idéal. Un condensateur de capacité $C = 5{,}0\,\mu\mathrm{F}$, chargé sous $U_0 = 4{,}0\,\mathrm{V}$, est relié à $t = 0$ à une bobine d'inductance $L = 0{,}20\,\mathrm{H}$. La résistance de la bobine est négligée, et il n'y a pas de résistor : c'est un **circuit LC idéal**.

Rappel : on oriente le courant i sur la maille, et q est la charge de l'armature où arrive ce courant orienté. Alors $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$. En convention récepteur, une bobine d'inductance L et de résistance r a pour tension $u_L = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Sur une maille, la loi d'additivité des tensions s'applique.

Établir l'équation du circuit idéal

Pourquoi est-ce vrai ? Sous l'énoncé, l'établissement suit quatre gestes. On oriente le courant, on flèche les tensions en convention récepteur, on exprime chaque tension, puis on applique la loi d'additivité. Il ne reste qu'une inconnue, u_C.

Propriété : Équation différentielle du circuit LC idéal

Dans un circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L dont la résistance est négligeable (amortissement négligeable), la tension u_C et la charge q vérifient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Conventions. On oriente le courant i sur la maille ; q est la charge de l'armature vers laquelle i est orienté, donc $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$. Les tensions u_C et u_L sont fléchées en convention récepteur.

Étape 2. Tension de chaque dipôle. Pour la bobine de résistance négligeable, $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on a $u_L = LC\,\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}$.

Étape 3. Loi d'additivité des tensions. Sur la maille fermée, sans générateur : $u_C + u_L = 0$, soit

$$u_C + LC\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Étape 4. Forme finale. En divisant par LC, non nul : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\,u_C = 0$. En remplaçant u_C par $\dfrac{q}{C}$ puis en multipliant par C, on obtient l'équation en q.

À retenir : Le geste clé de l'établissement du circuit idéal

La maille ne contient que deux dipôles : $u_C + u_L = 0$. On écrit ensuite u_L avec la seule inconnue u_C, grâce à $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. La dérivée de i fait apparaître la dérivée seconde de u_C.

Vérifie : D'où vient la dérivée seconde

À l'étape 2 de l'établissement, pourquoi la tension de la bobine contient-elle $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$?

A. Parce que $u_L = u_C$ sur la maille.

Faux.

La loi d'additivité donne $u_L = -u_C$, et elle n'intervient qu'à l'étape 3.

B. Parce que l'énergie de la bobine est proportionnelle à i^2.

Faux.

L'énergie n'intervient pas dans cet établissement : seule la relation de la bobine sert.

C. Parce que u_L contient la dérivée de i, et i celle de u_C.

Juste.

Juste : C étant constante, dériver i revient à dériver deux fois u_C.

D. Parce que les oscillations sont sinusoïdales.

Faux.

C'est une conséquence de l'équation, pas une étape de son établissement.

Correction

La bobine a pour tension $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Or $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$, car C est constante. D'où $u_L = LC\,\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$.

Écrire l'équation d'un circuit donné

Exemple : L'équation du circuit de modèle

Pour le circuit de modèle, le coefficient de l'équation vaut :

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0{,}20 \times 5{,}0 \times 10^{-6}} = 1{,}0 \times 10^{6}\ \mathrm{s}^{-2}$$

L'équation s'écrit donc, avec u_C en volts et t en secondes :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + 1{,}0 \times 10^{6}\,u_C = 0$$

Méthode : Établir l'équation différentielle d'un circuit série

1. **Orienter** le courant i sur la maille ; appeler q la charge de l'armature où arrive ce courant, de sorte que $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.
2. **Flécher** les tensions : convention récepteur pour le condensateur, la bobine et le résistor ; convention générateur pour un générateur.
3. **Exprimer** chaque tension : $u_C = \dfrac{q}{C}$, $u_R = R\,i$, $u_L = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
4. **Additionner** les tensions sur la maille. Garder une seule inconnue, puis ranger les termes de la dérivée seconde à la grandeur elle-même.

À toi : L'équation vérifiée par la charge

Pour le circuit LC idéal, pars de $u_C + u_L = 0$. Établis l'équation différentielle vérifiée par la charge q. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Exprime u_C en fonction de q et de C.
Indice 2
Remplace i par $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ dans $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
Indice 3
Point délicat : pour obtenir le coefficient 1 devant la dérivée seconde, divise par L, et non par C.

Réponse
$u_C = \dfrac{q}{C}$ et $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$. La loi d'additivité donne $L\,\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q}{C} = 0$. En divisant par L :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

C'est la même équation que pour u_C, car $q = C\,u_C$.

Période propre du circuit LC

Une tension en forme de cosinus

Devine : Ce qui fixe la durée d'une oscillation

Dans le circuit LC idéal, de quelles grandeurs dépend la durée d'une oscillation de u_C ?

A. De la tension U_0 de la charge.
Faux.
U_0 fixe l'amplitude ; l'équation différentielle ne la contient pas.

B. De L et de C seulement.
Juste.
Juste : l'équation ne contient que le produit LC.

C. De la charge initiale et de C.

Faux.

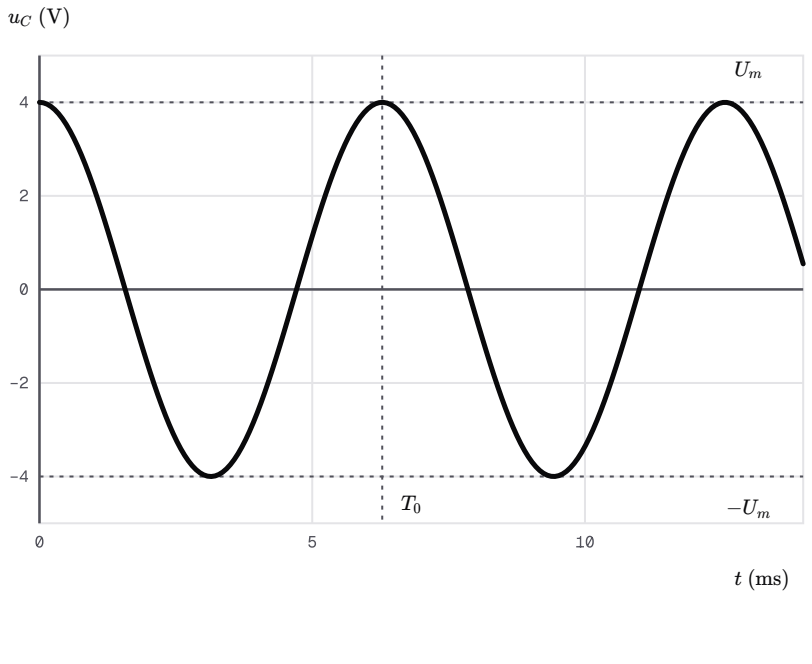
La charge initiale fixe l'amplitude, comme U_0.

Correction

L'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\, u_C = 0$ ne contient que le produit LC. La durée d'une oscillation ne dépend donc que de lui. La substitution qui suit en donne l'expression.

Remarque : Ce que l'équation ne contient pas

L'équation du circuit idéal ne fait intervenir ni U_0 ni la charge initiale. Ces valeurs n'agissent que par les conditions initiales, étudiées à la fin de cette section : elles fixent l'amplitude.



Tension du condensateur du circuit LC de modèle, obtenue par simulation : amplitude et période propre repérées.

Vérifier une solution sinusoïdale

Pourquoi est-ce vrai ? La simulation donne une courbe en cosinus, d'amplitude constante. On admet un outil de mathématiques : les solutions d'une équation $y'' + a^2 y = 0$ sont des fonctions sinusoïdales. On propose donc une fonction cosinus, puis on la **vérifie par substitution** dans l'équation du circuit idéal. Cette vérification impose la valeur de T_0.

Propriété : Solution de l'équation et période propre

L'équation différentielle du circuit LC idéal admet pour solutions les fonctions

$$q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right),$$

où $Q_m > 0$ est l'amplitude et φ la phase à l'origine, fixées par les conditions initiales. La **période propre** vaut :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

avec L en henrys, C en farads et T_0 en secondes. La tension s'écrit $u_C(t) = \dfrac{Q_m}{C}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$.

Démonstration

Étape 1. Forme proposée. On admet (outil de mathématiques) que les solutions de l'équation s'écrivent sous la forme $q(t) = Q_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$; on la vérifie par substitution.

Étape 2. Dérivées. Par la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q(t).$$

Étape 3. Substitution. Le premier membre de l'équation vaut $\left(\dfrac{1}{LC} - \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\right) q(t)$. Il est nul pour tout t si et seulement si $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{1}{LC}$, soit, T_0 étant positive, $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Étape 4. Équation aux dimensions. D'après $u = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $[L] = [U]\cdot \mathrm{T}\cdot[I]^{-1}$; d'après $q = C\,u$ et $q = i\,t$, $[C] = [I]\cdot\mathrm{T}\cdot[U]^{-1}$. Donc $[LC] = \mathrm{T}^2$ et $[T_0] = \mathrm{T}$: T_0 est bien une durée.

Étape 5. Conditions initiales. Q_m et φ se déterminent par $q(0)$ et $i(0)$. Pour un condensateur chargé sous la tension U_0, puis relié à la bobine à $t = 0$ avec un courant nul : $i(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\varphi = 0$ donne $\sin\varphi = 0$, soit $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Comme $q(0) = Q_m\cos\varphi = CU_0 > 0$ avec $Q_m > 0$, on a $\cos\varphi > 0$: donc $\varphi = 0$ et $Q_m = CU_0$.

À retenir : Ce que la substitution impose

Dériver deux fois le cosinus fait apparaître le facteur $-\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2$. L'équation n'est vérifiée à chaque instant que si $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{1}{LC}$. Une période étant positive, on garde $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Vérifie : Le choix de la racine positive

L'étape 3 donne $T_0^2 = 4\pi^2 LC$. Pourquoi retient-on seulement $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$?

A. Parce que T_0 est une durée, donc un nombre positif.

Juste.

Juste : une durée négative n'a pas de sens.

B. Parce que l'autre solution décrit un courant de sens opposé.
Faux.
Le sens du courant est fixé par l'orientation ; il ne change pas le signe d'une durée.

C. Parce que l'autre valeur est trop petite pour être mesurée.
Faux.
$-2\pi\sqrt{LC}$ n'est pas petite : elle est négative, donc exclue pour une durée.

Correction
L'équation $T_0^2 = 4\pi^2 LC$ a deux solutions opposées. Une période est une durée, strictement positive : seule $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ convient.

Calculer une période propre

Exemple : La période propre du circuit de modèle

Avec $L = 0{,}20\,\mathrm{H}$ et $C = 5{,}0\,\mu\mathrm{F} = 5{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{LC} \\ &= 2\pi\sqrt{0{,}20 \times 5{,}0 \times 10^{-6}} \\ &\approx 6{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

soit $T_0 \approx 6{,}3\,\mathrm{ms}$. Les deux données ont deux chiffres significatifs, le résultat aussi.

Chiffres significatifs. On arrondit un résultat calculé : il garde autant de chiffres significatifs que la moins précise des données. Les zéros de tête ne comptent pas : $0{,}20$ en a deux, $0{,}050$ aussi. Ainsi, T_0 s'écrit $6{,}3\,\mathrm{ms}$, et non $6{,}283\,\mathrm{ms}$. Cette règle vaut pour tout le chapitre.

Vérifie : La précision d'un résultat

Une bobine de $0{,}150\,\mathrm{H}$ est associée à un condensateur de $2{,}2\,\mu\mathrm{F}$. Comment écrire la période propre du circuit ?

A. $T_0 \approx 3{,}61\,\mathrm{ms}$
Faux.
Trois chiffres : c'est la précision de L, mais C n'en a que deux.

B. $T_0 \approx 4\,\mathrm{ms}$
Faux.
Un seul chiffre : c'est moins précis que les données.

C. $T_0 \approx 3{,}6\,\mathrm{ms}$
Juste.
Juste : C, la donnée la moins précise, a deux chiffres significatifs.

D. $T_0 \approx 3{,}610\,\text{ms}$

Faux.

Le zéro final annonce une précision que les données n'ont pas.

Correction

$$T_0 = 2\pi\sqrt{0{,}150 \times 2{,}2 \times 10^{-6}}$$
$$\approx 3{,}6 \times 10^{-3}\,\text{s}$$

soit $3{,}6\,\text{ms}$: deux chiffres significatifs, comme C.

Unités et grandeur isolée

Contrôle par les unités. D'après $u = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $1\,\text{H} = 1\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{A}^{-1}$. D'après $q = C\,u$ et $q = i\,t$, $1\,\text{F} = 1\,\text{A}\cdot\text{s}\cdot\text{V}^{-1}$. Le produit vaut donc $1\,\text{H}\cdot\text{F} = 1\,\text{s}^2$: $2\pi\sqrt{LC}$ s'exprime bien en secondes. Ce contrôle détecte une formule mal retenue, comme $2\pi\sqrt{L/C}$.

Méthode : Calculer ou isoler une grandeur dans la période propre

1. **Convertir** les données en unités SI : $1\,\text{mH} = 10^{-3}\,\text{H}$, $1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$, $1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F}$.
2. **Isoler** la grandeur cherchée après avoir élevé au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 LC$, d'où $C = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L}$ ou $L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 C}$.
3. **Calculer**, puis écrire le résultat avec son unité et ses chiffres significatifs.
4. **Contrôler** l'ordre de grandeur : en travaux pratiques, T_0 va de quelques dixièmes de milliseconde à quelques dizaines de millisecondes.

Attention : Les puissances de dix sous la racine

✗ « $L = 200\,\text{mH}$ et $C = 5{,}0\,\mu\text{F}$, donc $T_0 = 2\pi\sqrt{200 \times 5{,}0} \approx 2{,}0 \times 10^2\,\text{s}$. »

✓ Le millihenry et le microfarad ne sont pas des unités SI. On écrit $LC = 0{,}200 \times 5{,}0 \times 10^{-6}$, soit $1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{s}^2$, d'où $T_0 \approx 6{,}3\,\text{ms}$. Une période de plus de trois minutes pour ce circuit est absurde.

À toi : La capacité pour une période imposée

On garde la bobine de $0{,}20\,\text{H}$ du circuit de modèle. Quelle capacité donne une période propre $T_0 = 8{,}0\,\text{ms}$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pars de l'expression de la période propre : C y est la seule inconnue.

Indice 2

Convertis T_0 en secondes avant de calculer.

Indice 3

Point délicat : élève aussi la puissance de dix au carré, $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Réponse

$T_0^2 = 4\pi^2 LC$, donc $C = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L}$. Avec $T_0 = 8{,}0 \times 10^{-3}\,\text{s}$:

$$C = \frac{(8{,}0 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 0{,}20} \approx 8{,}1 \times 10^{-6}\,\text{F}$$

soit $C \approx 8{,}1\,\mu\text{F}$.

Les constantes par les conditions initiales

Méthode : Trouver l'amplitude et la phase à l'origine

1. **Écrire** la forme de la solution, $q(t) = Q_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, et l'intensité $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ obtenue en la dérivant.
2. **Traduire** l'état du circuit à $t = 0$: valeur de $q(0)$, ou de $u_C(0)$, et valeur de $i(0)$.
3. **Résoudre** les deux équations $Q_m \cos\varphi = q(0)$ et $-\dfrac{2\pi}{T_0}\,Q_m \sin\varphi = i(0)$, avec $Q_m > 0$.
4. **Contrôler** sur la courbe : à $t = 0$, la valeur de q et son sens de variation doivent concorder avec la solution trouvée.

Exemple : Les constantes du circuit de modèle

À $t = 0$, le condensateur porte la charge $q(0) = C\,U_0$, et le courant est nul :

$$q(0) = 5{,}0 \times 10^{-6} \times 4{,}0 = 2{,}0 \times 10^{-5}\,\text{C}$$

La condition $i(0) = 0$ impose $\sin\varphi = 0$. Avec $Q_m \cos\varphi > 0$, on retient $\varphi = 0$ et $Q_m = 2{,}0 \times 10^{-5}\,\text{C}$. Ainsi, avec q en coulombs et t en secondes :

$$q(t) = 2{,}0 \times 10^{-5} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)$$

Charge et intensité du courant dans le circuit LC

Un quart de période de décalage

Devine : Le courant quand la charge est maximale

Dans le circuit de modèle, à l'instant où la charge q du condensateur est maximale, que vaut l'intensité i ?

A. Elle est maximale, elle aussi.

Faux.
Une grandeur maximale ne varie plus à cet instant : sa dérivée y est nulle.

B. Elle vaut la moitié de son maximum.

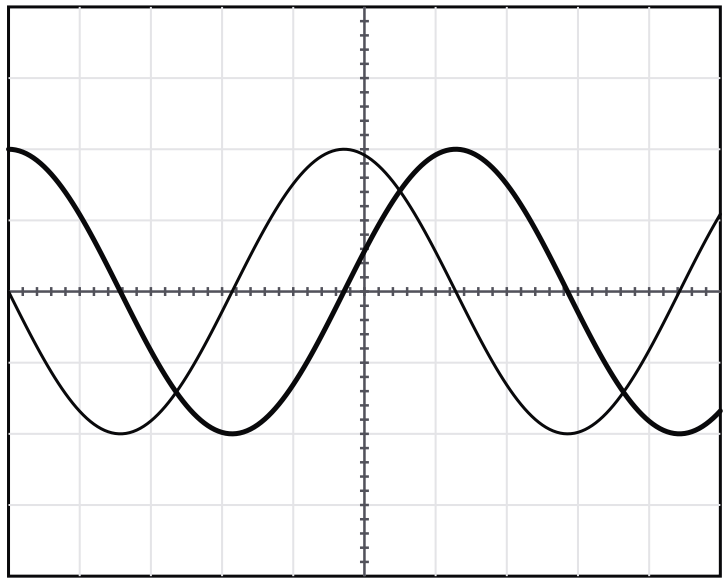
Faux.
Rien n'impose ce partage ; regarde la relation entre i et q.

C. Elle est nulle à cet instant.

Juste.
Juste : la dérivée de q s'annule là où q est maximale.

Correction

L'intensité est la dérivée de la charge : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Quand q passe par un maximum, sa dérivée s'annule : $i = 0$. Le courant change alors de sens.



Voie q : 10 μC/div Voie i : 10 mA/div Balayage : 1 ms/div

Charge et intensité du circuit de modèle sur l'écran d'un système d'acquisition. Voie q : 10 microcoulombs par division ; voie i : 10 mA/div ; balayage : 1 ms/div.

Lecture. À $t = 0$, la trace de q est 2 divisions au-dessus de l'axe : $q = 2 \times 10 = 20\,\mu\mathrm{C}$, soit Q_m. Celle de i passe par zéro. La trace de i atteint son minimum, 2 divisions sous l'axe, vers $1{,}6$ division, soit $t \approx 1{,}6\,\mathrm{ms}$. C'est le quart de $T_0 \approx 6{,}3\,\mathrm{ms}$: les deux grandeurs sont décalées d'un quart de période.

Dériver la charge

Pourquoi est-ce vrai ? L'intensité s'obtient en dérivant l'expression de $q(t)$ de la section précédente. La dérivée d'une fonction composée donne le facteur $\frac{2\pi}{T_0}$, et le cosinus devient un sinus.

Propriété : Intensité du courant dans le circuit LC idéal

Si la charge s'écrit $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right)$, l'intensité du courant est :

$$i(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\, Q_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right).$$

C'est une fonction sinusoïdale de même période T_0, d'amplitude

$$I_m = \frac{2\pi}{T_0}\, Q_m,$$

qui s'annule quand $|q|$ est maximale et devient maximale en valeur absolue quand q s'annule.

Démonstration

Étape 1. Relation entre i et q. Avec l'orientation choisie, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Étape 2. Dérivation. Par la dérivée d'une fonction composée, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right) = -\frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right)$, ce qui donne l'expression de $i(t)$.

Étape 3. Amplitude et instants remarquables. Le sinus varie entre -1 et 1, donc $|i| \leq \frac{2\pi}{T_0}\, Q_m = I_m$. Le sinus s'annule exactement quand le cosinus vaut 1 ou -1, c'est-à-dire quand $|q| = Q_m$; il vaut 1 ou -1 exactement quand le cosinus s'annule, c'est-à-dire quand $q = 0$.

À retenir : Le facteur qui relie les deux amplitudes

En dérivant $\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right)$, on multiplie par la dérivée de l'angle, $\frac{2\pi}{T_0}$. C'est pourquoi $I_m = \frac{2\pi}{T_0}\, Q_m$. À charge égale, un circuit plus rapide fait circuler un courant plus intense.

Vérifie : L'unité de l'amplitude du courant

Vérifie l'homogénéité de $I_m = \frac{2\pi}{T_0}\, Q_m$. Quelle est l'unité du quotient d'une charge par une durée ?

A. Le coulomb, car 2π n'a pas d'unité.

Faux.

2π est sans unité, mais la division par T_0 en ajoute une.

B. L'ampère, car $1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Juste.

Juste : un coulomb par seconde est un ampère.

C. Le volt, car $Q_m = C\,U_m$.

Faux.

Q_m est une charge, en coulombs, quelle que soit son expression.

Correction

2π est sans unité, Q_m est en coulombs et T_0 en secondes. Un coulomb par seconde est un ampère, puisque $q = i\,t$ pour un courant constant. La relation est homogène.

L'amplitude du courant

Exemple : L'intensité dans le circuit de modèle

Ici, $\sqrt{LC} = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{s}$ et $\dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Donc :

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}} = \frac{2{,}0 \times 10^{-5}}{1{,}0 \times 10^{-3}} = 2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{A}$$

soit $20\,\text{mA}$. Avec i en ampères et t en secondes :

$$i(t) = -2{,}0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)$$

Remarque : La tension du condensateur suit la charge

Comme $u_C = \dfrac{q}{C}$, la tension a la même forme que la charge, d'amplitude $U_m = \dfrac{Q_m}{C} = 4{,}0\,\text{V}$. Elle est donc, elle aussi, décalée d'un quart de période par rapport à l'intensité.

Le sens du courant et l'origine des dates

Vérifie : Le signe du courant

Entre $t = 0$ et $t = \dfrac{T_0}{4}$, l'intensité i est négative. Que signifie ce signe ?

A. Aucun courant ne circule.

Faux.

Un courant nul s'écrirait $i = 0$; ici, i est négative, donc non nulle.

B. Le circuit a été mal orienté.

Faux.

Toute orientation convient ; le signe de i donne le sens réel par rapport à elle.

C. Le condensateur reçoit de l'énergie.

Faux.

Le condensateur se décharge : sa charge diminue, son énergie aussi.

D. Le courant réel va contre la flèche, et q diminue.

Juste.

Juste : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} < 0$, donc la charge diminue.

Correction

Avec l'orientation choisie, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Si $i < 0$, la charge q de l'armature diminue : le condensateur se décharge. Le courant réel circule dans le sens opposé à la flèche de i.

À toi : Les constantes pour un départ à charge nulle

On change l'origine des dates du circuit de modèle : à $t = 0$, $q = 0$ et $i = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{A}$. Détermine Q_m et φ dans $q(t) = Q_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $q(0)$ et $i(0)$ à partir de la forme de la solution.

Indice 2

La condition $q(0) = 0$ donne $\cos\varphi = 0$; la valeur de $i(0)$ fixe ensuite $Q_m \sin\varphi$.

Indice 3

Point délicat : le signe de $i(0)$ choisit entre les deux valeurs possibles de φ.

Réponse

$q(0) = Q_m \cos\varphi = 0$, donc $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Ensuite, $i(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}\, Q_m \sin\varphi > 0$ exige $\sin\varphi < 0$: $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Enfin, $Q_m = \sqrt{LC}\; i(0)$:

$$\begin{aligned} Q_m &= 1{,}0 \times 10^{-3} \\ &\quad \times 2{,}0 \times 10^{-2} \\ &= 2{,}0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

C'est la même amplitude : seule l'origine des dates a changé.

Énergie totale du circuit LC idéal

Deux réserves d'énergie

Devine : L'énergie quand le courant est maximal

Dans le circuit de modèle, à l'instant où $|i|$ est maximale, où se trouve l'énergie du circuit ?

A. Entièrement dans la bobine.

Juste.

Juste : $q = 0$, donc le condensateur ne stocke rien.

B. Entièrement dans le condensateur.

Faux.

À cet instant, $q = 0$: le condensateur ne stocke rien.

C. Pour moitié dans chaque dipôle.

Faux.

Ce partage existe, mais à un autre instant de l'oscillation.

D. Nulle part : elle a été dissipée.

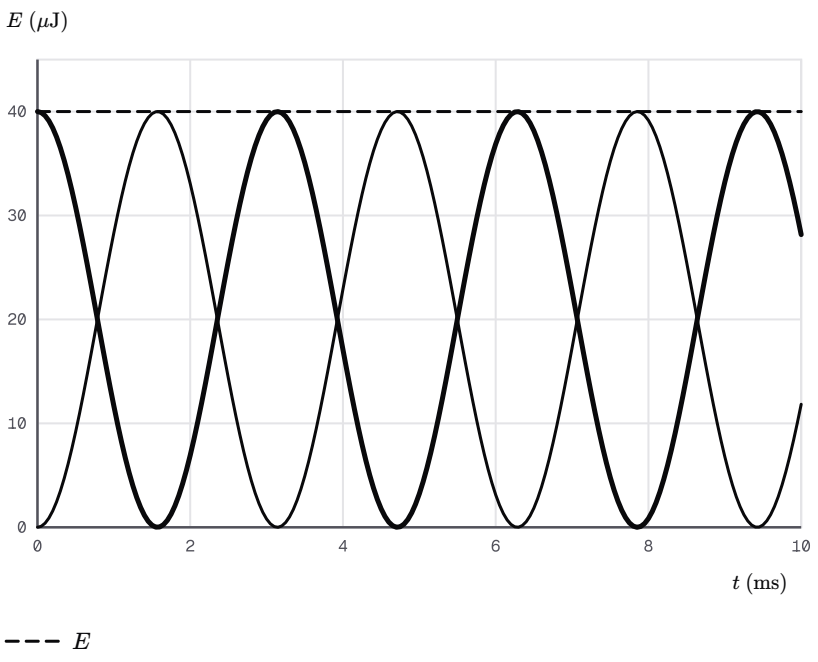
Faux.

Le circuit idéal n'a aucune résistance : rien ne dissipe l'énergie.

Correction

Quand $|i|$ est maximale, $q = 0$ (section précédente). L'énergie électrique $\dfrac{q^2}{2C}$ est nulle : toute l'énergie est magnétique, dans la bobine. Un quart de période plus tard, elle est revenue dans le condensateur.

Rappel : un condensateur de charge q stocke l'énergie électrique $E_e = \dfrac{q^2}{2C}$. Une bobine parcourue par le courant i stocke l'énergie magnétique $E_m = \dfrac{1}{2}\,L\,i^2$.



Énergies électrique, magnétique et totale du circuit LC de modèle en fonction du temps.

Lecture. La courbe qui part de $40\,\mu\text{J}$ est E_e : à $t = 0$, le condensateur est chargé et $i = 0$. L'autre courbe est E_m. Leur somme E reste à $40\,\mu\text{J}$: l'énergie passe du condensateur à la bobine, puis revient, sans perte. Les deux courbes se croisent à $20\,\mu\text{J}$, quand l'énergie est partagée en deux moitiés.

Une somme qui ne varie pas

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve sous l'énoncé dérive la somme des deux énergies, puis applique la loi d'additivité des tensions.

Propriété : Conservation de l'énergie totale du circuit LC idéal

L'**énergie totale** d'un circuit RLC série est la somme de l'énergie électrique du condensateur et de l'énergie magnétique de la bobine :

$$E = E_e + E_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\,L\,i^2.$$

Dans le circuit LC idéal, cette énergie se **conserve** : les deux formes s'échangent sans perte, et

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2}\,L\,I_m^2.$$

Démonstration

Étape 1. Dérivée de l'énergie totale. Avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{q}{C}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= i\left(u_C + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right).\end{aligned}$$

Étape 2. Loi d'additivité des tensions. Dans le circuit LC idéal, $u_C + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ (établissement de l'équation différentielle du circuit LC idéal). Donc $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ à chaque instant : E est constante.

Étape 3. Valeur de la constante. Quand $|q| = Q_m$, l'intensité est nulle et $E = \dfrac{Q_m^2}{2C}$. Quand $q = 0$, $|i| = I_m$ et $E = \dfrac{1}{2}\,L\,I_m^2$. La constante étant la même, les deux expressions sont égales.

À retenir : Ce qui annule la dérivée de l'énergie

La dérivée de E se factorise par i :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = i\left(u_C + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right).$$

La parenthèse est la somme des tensions de la maille, nulle d'après la loi d'additivité. L'énergie totale ne varie donc pas.

Vérifie : La loi qui conserve l'énergie

À l'étape 2 de la preuve, quelle relation rend nulle la dérivée de l'énergie totale ?

A. La loi d'Ohm $u = R\,i$, appliquée à la bobine.
Faux.
La bobine du circuit idéal n'a pas de résistance, et le circuit ne contient aucun résistor.

B. La loi d'additivité des tensions sur la maille.

Juste.

Juste : la parenthèse est la somme des tensions de la maille.

C. La relation $q = C\,u_C$, utilisée seule.

Faux.

Elle sert à l'étape 1 ; elle ne suffit pas à annuler la dérivée.

Correction

La parenthèse $u_C + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ est la somme des tensions du condensateur et de la bobine idéale. La loi d'additivité des tensions, sur une maille sans générateur, la rend nulle à chaque instant.

Les échanges dans le circuit de modèle

Exemple : L'énergie totale du circuit de modèle

Au départ, toute l'énergie est dans le condensateur :

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{(2{,}0\times10^{-5})^2}{2\times5{,}0\times10^{-6}} = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{J}$$

soit $40\,\mu\mathrm{J}$. Contrôle par la bobine, à l'instant où $|i| = I_m$:

$$E = \frac{1}{2}\times0{,}20\times(2{,}0\times10^{-2})^2 = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{J}$$

Attention : La période des énergies du circuit idéal

✗ « E_e et E_m ont la même période T_0 que la charge. »

✓ E_e dépend de q^2, et E_m de i^2 : elles ne changent pas de signe. E_e est maximale pour $q = Q_m$ et pour $q = -Q_m$, deux fois par période. Les énergies ont donc la période $\dfrac{T_0}{2}$, soit environ $3{,}1\,\mathrm{ms}$ pour le circuit de modèle.

Méthode : Repérer les énergies et la dissipation sur des courbes

1. **Identifier** E_e : elle est maximale quand $|u_C|$ l'est, et nulle quand $u_C = 0$.
2. **Identifier** E_m : elle est maximale quand $|i|$ l'est, et nulle quand le courant s'annule.
3. **Suivre** la somme $E_e + E_m$: elle reste fixe si le circuit est idéal, elle baisse si une résistance dissipe.

4. **Calculer** l'énergie dissipée entre deux dates $t_1 < t_2$: $E(t_1) - E(t_2)$. Une valeur lue donne aussi C ou L, par $E_e = \dfrac{q^2}{2C}$ ou $E_m = \dfrac{1}{2} L\, i^2$.

Un diagramme d'énergie en fonction de la charge

Diagramme d'énergie. On peut aussi représenter les énergies en fonction de la charge q, et non du temps. L'énergie électrique $E_e = \dfrac{q^2}{2C}$ donne une parabole de sommet l'origine. L'énergie totale, constante, donne une droite horizontale, à $40\,\mu\text{J}$ pour le circuit de modèle. Pour chaque q, l'écart vertical entre la droite et la parabole est l'énergie magnétique $E_m = E - E_e$.

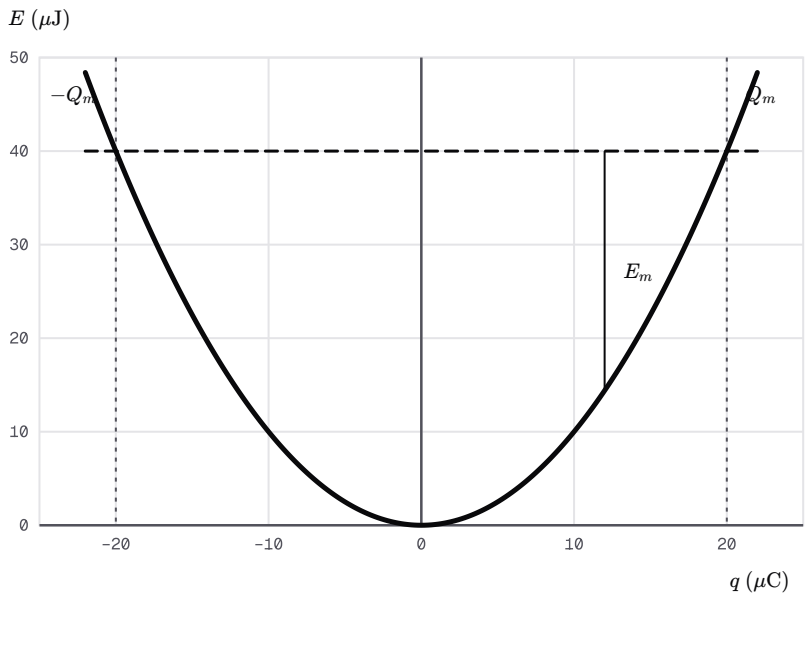


Diagramme d'énergie du circuit LC de modèle : énergie électrique et énergie totale en fonction de la charge.

Exemple : Les limites de la charge sur le diagramme

La parabole coupe la droite en deux points, d'abscisses $q \approx -20\,\mu\text{C}$ et $q \approx 20\,\mu\text{C}$. En ces points, l'écart est nul : $E_m = 0$, donc $i = 0$, et $|q|$ est maximale. On retrouve $Q_m = 20\,\mu\text{C}$. La charge ne sort pas de cet intervalle, car E_m ne peut pas être négative.

En $q = 0$, l'écart vaut toute l'énergie, $40\,\mu\text{J}$: $|i| = I_m$. Au cours d'une période, le point de la parabole va d'une extrémité à l'autre, puis revient.

À toi : Le partage de l'énergie à un instant

Dans le circuit de modèle, à un instant donné, $u_C = 2{,}0\,\text{V}$. Calcule E_e, puis E_m, puis la valeur de $|i|$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise $E_e = \dfrac{1}{2}\,C\,u_C^2$, qui découle de $q = C\,u_C$.

Indice 2

L'énergie totale vaut $40\,\mu\text{J}$ à chaque instant : déduis-en E_m.

Indice 3

Point délicat : convertis E_m en joules avant d'isoler $|i|$.

Réponse

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \times 5{,}0 \times 10^{-6} \\ &\quad \times 2{,}0^2 \\ &= 1{,}0 \times 10^{-5}\,\text{J} \end{aligned}$$

Donc $E_m = E - E_e = 3{,}0 \times 10^{-5}\,\text{J}$, et

$$\begin{aligned} |i| &= \sqrt{\frac{2 \times 3{,}0 \times 10^{-5}}{0{,}20}} \\ &\approx 1{,}7 \times 10^{-2}\,\text{A} \end{aligned}$$

soit environ $17\,\text{mA}$, moins que $I_m = 20\,\text{mA}$.

Équation différentielle du circuit RLC amorti

La résistance totale du circuit

Devine : Les dipôles qui dissipent

Dans le montage de la décharge, quels dipôles dissipent de l'énergie par effet Joule ?

A. Le résistor et la bobine, par sa résistance r.

Juste.

Juste : le courant traverse le résistor et le fil de la bobine.

B. Le résistor seulement.

Faux.

La bobine est faite d'un long fil : elle a aussi une résistance.

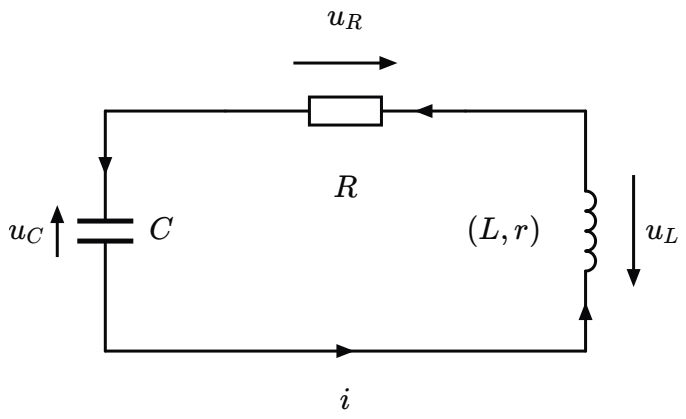
C. Le condensateur, qui se décharge.

Faux.

Le condensateur cède son énergie au circuit ; il ne la transforme pas en chaleur.

Correction

Le courant traverse le résistor et le fil de la bobine, qui ont tous deux une résistance. L'énergie dissipée dépend de la **résistance totale** $R + r$. Pour le montage, $R + r = 10 + 12 = 22\,\Omega$.



Maille du circuit RLC en décharge : courant orienté, tensions fléchées en convention récepteur.

Pourquoi est-ce vrai ? L'établissement reprend les gestes du circuit idéal, sur la maille de la figure. La loi d'Ohm donne $u_R = R\,i$, et la bobine apporte le terme $r\,i$. La loi d'additivité des tensions s'écrit alors $u_C + u_R + u_L = 0$.

L'équation du circuit amorti

Propriété : Équation différentielle du circuit RLC série amorti

Dans un circuit RLC série en décharge, de résistance totale $R + r$ (résistor et bobine), la tension u_C vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r}{L}\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0.$$

Le terme en $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ traduit l'**amortissement**. La charge q vérifie la même équation. On l'établit et on l'exploite, sans la résoudre.

Démonstration

Étape 1. Conventions. Courant i orienté sur la maille, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; tensions u_C, u_R et u_L fléchées en convention récepteur.

Étape 2. Tension de chaque dipôle. Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$. Bobine : $u_L = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Étape 3. Loi d'additivité des tensions. Sur la maille fermée, sans générateur :

$$u_C + (R + r)\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Étape 4. Une seule inconnue. On remplace i par $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ par $C\,\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}$:

$$LC\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + (R + r)C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0.$$

En divisant par LC, on obtient l'équation annoncée.

À retenir : Le terme apporté par la résistance totale

Les deux termes résistifs se regroupent en $(R+r)\,i$. Avec $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, ils donnent un terme en dérivée **première** de u_C, de coefficient $\dfrac{R+r}{L}$. Ce terme traduit l'amortissement.

Vérifie : Retrouver le circuit idéal

Dans l'équation du circuit amorti, que se passe-t-il si l'on pose $R + r = 0$?

A. L'équation n'a plus de solution.

Faux.

Elle devient celle du circuit idéal, dont on connaît les solutions sinusoïdales.

B. Il ne reste qu'une équation du premier ordre.

Faux.

C'est le terme en dérivée première qui disparaît ; la dérivée seconde reste.

C. On retrouve l'équation du circuit LC idéal.

Juste.

Juste : le terme d'amortissement disparaît.

Correction

Le terme $\dfrac{R+r}{L}\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ s'annule. Il reste $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\,u_C = 0$: le circuit idéal est le cas du circuit amorti sans résistance.

Exploiter l'équation sans la résoudre

Exemple : Les coefficients de l'équation de la décharge

Pour la décharge du montage, $R + r = 22\,\Omega$, $L = 0{,}10\,\mathrm{H}$ et $C = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$:

$$\frac{R+r}{L} = \frac{22}{0{,}10} = 2{,}2 \times 10^{2}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0{,}10 \times 4{,}7 \times 10^{-6}} \approx 2{,}1 \times 10^{6}\,\mathrm{s}^{-2}$$

En unités SI, u_C vérifie donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + 2{,}2 \times 10^{2}\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2{,}1 \times 10^{6}\,u_C = 0$$

Attention : Une bobine réelle amortit aussi

✗ « Sans résistor, $R = 0$: le circuit n'est plus amorti. »

✓ La bobine garde sa résistance r. Dans l'équation comme dans le bilan d'énergie, c'est la résistance **totale** $R + r$ qui compte. Avec $R = 0$, le montage reste amorti par $r = 12\,\Omega$.

Remarque : Une équation exploitée sans être résolue

Ce chapitre n'écrit pas les solutions de cette équation. On l'exploite autrement : elle relie l'amortissement à $R + r$, elle conduit au bilan d'énergie de la section suivante, et elle contient le circuit idéal comme cas sans résistance. La pseudo-période, elle, se mesure sur un enregistrement.

À toi : L'équation du circuit amorti en charge

Établis l'équation différentielle vérifiée par la charge q dans le circuit amorti, à partir de la loi d'additivité des tensions. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Exprime u_C, u_R et u_L en fonction de q et de i.
Indice 2
Remplace i par $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, puis divise par L.
Indice 3
Point délicat : la résistance r de la bobine s'ajoute à R dans le terme en dérivée première.

Réponse
La loi d'additivité donne $\dfrac{q}{C} + R\,i + r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$. Avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, puis en divisant par L :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,q = 0$$

C'est la même équation que pour u_C, puisque $q = C\,u_C$.

Amortissement et effet Joule

Une décharge suivie par l'énergie

Devine : L'énergie au cours de la décharge

Pendant la décharge du montage, avec $R + r = 22\,\Omega$, comment évolue l'énergie totale $E = E_e + E_m$?

A. Elle reste constante, comme dans le circuit idéal.

Faux.
Le circuit idéal n'a pas de résistance ; ici, $R + r = 22\,\Omega$ dissipe de l'énergie.

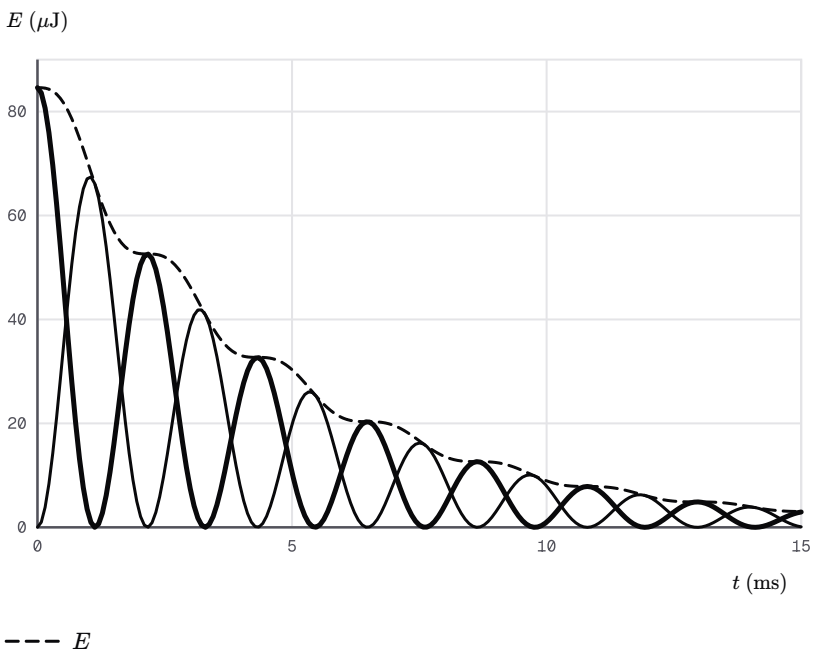
B. Elle diminue au cours du temps.
Juste.
Juste : les résistances transforment l'énergie en chaleur.

C. Elle oscille autour d'une valeur fixe.
Faux.
E_e et E_m oscillent, mais leur somme ne remonte pas.

D. Elle augmente, car un courant circule.
Faux.
Aucun générateur ne fournit d'énergie pendant la décharge.

Correction
Les résistances transforment de l'énergie électrique en chaleur. Aucun générateur ne la compense : l'énergie totale diminue. L'enregistrement de la décharge le montre.

Reprenons la décharge du montage, avec $R = 10\,\Omega$. Le système d'acquisition enregistre u_C et la tension du résistor, dont on déduit i par la loi d'Ohm. Un tableur calcule à chaque date $E_e = \frac{1}{2}\,C\,u_C^2$, $E_m = \frac{1}{2}\,L\,i^2$ et leur somme E.



Énergies électrique, magnétique et totale pendant la décharge enregistrée (R = 10 Ω).

Exemple : L'énergie dissipée pendant la première pseudo-période

À $t = 0$, toute l'énergie est électrique, avec $u_C(0) = 6{,}0\,\mathrm{V}$:

$$E(0) = \frac{1}{2} \times 4{,}7 \times 10^{-6} \times 6{,}0^2$$
$$\approx 8{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

soit $85\,\mu$J. Après une pseudo-période, on lit sur la courbe $E(T) \approx 33\,\mu$J. Pendant la première pseudo-période, les résistances ont dissipé environ $85 - 33 = 52\,\mu$J.

Effet Joule et énergie totale

Pourquoi est-ce vrai ? La dérivée de l'énergie totale s'écrit comme pour le circuit idéal. La différence vient de la loi d'additivité : dans le circuit amorti, la somme $u_C + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ n'est plus nulle, elle vaut $-(R + r)\,i$.

Propriété : Diminution de l'énergie totale par effet Joule

Dans un circuit RLC série en décharge, l'énergie totale $E = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{1}{2}\,L\,i^2$ varie selon

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2.$$

Elle **diminue** au cours du temps : elle est dissipée sous forme de chaleur par **effet Joule** dans les résistances. En régime pseudo-périodique, l'amplitude diminue d'autant plus vite que la résistance totale est grande. Un faible amortissement donne le régime pseudo-périodique, un fort amortissement le régime apériodique.

Démonstration

Étape 1. Dérivée de l'énergie totale. Comme pour le circuit idéal :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = i\left(u_C + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right).$$

Étape 2. Loi d'additivité des tensions. D'après l'établissement de l'équation du circuit amorti, $u_C + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i$.

Étape 3. Conclusion. Donc $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2$. Ce terme est négatif ou nul, et nul seulement aux instants isolés où $i = 0$: l'énergie totale décroît. La puissance $(R + r)\,i^2$ est celle que reçoivent les résistances, cédée au milieu extérieur sous forme de chaleur.

À retenir : Le signe de la variation d'énergie

$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\,i^2$ est négative ou nulle, car un carré est positif ou nul. L'énergie totale décroît ; sa courbe ne marque un palier qu'aux instants où $i = 0$.

Vérifie : Les instants des paliers

Sur la courbe de l'énergie totale, à quels instants la pente est-elle nulle ?

A. Aux instants où $u_C = 0$.

Faux.

Quand $u_C = 0$, $|i|$ est proche de son maximum : E y décroît vite.

B. Jamais : l'énergie décroît sans arrêt.

Faux.

$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ s'annule chaque fois que $i = 0$.

C. Aux instants où $i = 0$.

Juste.

Juste : la pente $-(R + r)\, i^2$ s'annule avec i.

Correction

$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(R + r)\, i^2$ s'annule quand $i = 0$. Comme $i = C\, \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, ce sont les instants où u_C passe par un extremum. La courbe de E y marque un palier.

Exemple : La puissance dissipée à un instant

À un instant où $|i| = 20\,\mathrm{mA}$, la décharge du montage perd de l'énergie au rythme :

$$\begin{aligned}(R + r)\, i^2 &= 22 \times (2{,}0 \times 10^{-2})^2 \\ &\approx 8{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

soit $8{,}8\,\mathrm{mW}$. À cet instant, l'énergie totale diminue de $8{,}8\,\mu\mathrm{J}$ par milliseconde.

Les régimes et la chaleur

Les trois régimes vus par l'énergie. Avec une faible résistance totale, l'énergie passe plusieurs fois du condensateur à la bobine avant d'être dissipée : le régime est pseudo-périodique. Avec une grande résistance, elle est dissipée avant un échange complet : u_C ne change pas de signe, le régime est apériodique. Sans résistance, rien n'est dissipé : c'est le régime périodique du modèle.

Vérifie : La destination de l'énergie perdue

Pendant la décharge, que devient l'énergie perdue par le circuit ?

A. Elle retourne au générateur de charge.

Faux.

Le générateur est hors du circuit en position 2.

B. Elle part en chaleur, dans le résistor et dans la bobine.

Juste.

Juste : c'est l'effet Joule.

C. Elle reste stockée dans le condensateur.

Faux.

L'énergie du condensateur est E_e, déjà comptée dans E ; elle diminue aussi.

Correction

La puissance $(R + r)\, i^2$ est reçue par le résistor et par le fil de la bobine. Ils la cèdent au milieu extérieur sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule.

À toi : L'énergie dissipée en deux pseudo-périodes

Sur la courbe de l'énergie totale de la décharge, on lit $E \approx 13\,\mu\text{J}$ sur le palier qui suit la deuxième pseudo-période. Quelle énergie a été dissipée depuis $t = 0$? Quelle part de l'énergie initiale cela représente-t-il ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reprends l'énergie initiale calculée plus haut.

Indice 2

L'énergie dissipée est la différence entre l'énergie initiale et l'énergie restante.

Indice 3

Point délicat : la part se calcule par rapport à l'énergie initiale, et non par rapport à l'énergie restante.

Réponse

L'énergie dissipée vaut :

$$\begin{aligned} &E(0) - E(2T) \\ &\approx 85 - 13 = 72\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

Elle représente $\dfrac{72}{85} \approx 0{,}85$ de l'énergie initiale, soit environ $85\,\%$. Après deux oscillations, il ne reste qu'environ $15\,\%$ de l'énergie de départ.

Influence de R, L et C sur les oscillations

Un protocole pour étudier la capacité

Devine : Une capacité plus petite

Dans le montage de la décharge, on remplace le condensateur de $4{,}7\,\mu\text{F}$ par un condensateur de $1{,}0\,\mu\text{F}$. Comment varie la pseudo-période ?

A. Elle augmente.

Faux.

En amortissement faible, T reste voisine de $2\pi\sqrt{LC}$, qui diminue avec C.

B. Elle ne change pas, la bobine étant la même.

Faux.

La pseudo-période dépend de L et de C : changer C la modifie.

C. Elle diminue.

Juste.

Juste : les mesures qui suivent le confirment.

Correction

La pseudo-période diminue quand C diminue : les mesures qui suivent le confirment. On cherche maintenant la loi qui relie T à C.

Méthode : Montage, protocole, exploitation de l'étude de la pseudo-période

Montage. Celui de la décharge, sans résistor ($R = 0$), pour réduire l'amortissement : la résistance totale se réduit à $r = 12\,\Omega$. L'entrée Y_1 d'un système d'acquisition est sur l'armature reliée au commun, sa masse sur l'autre armature.

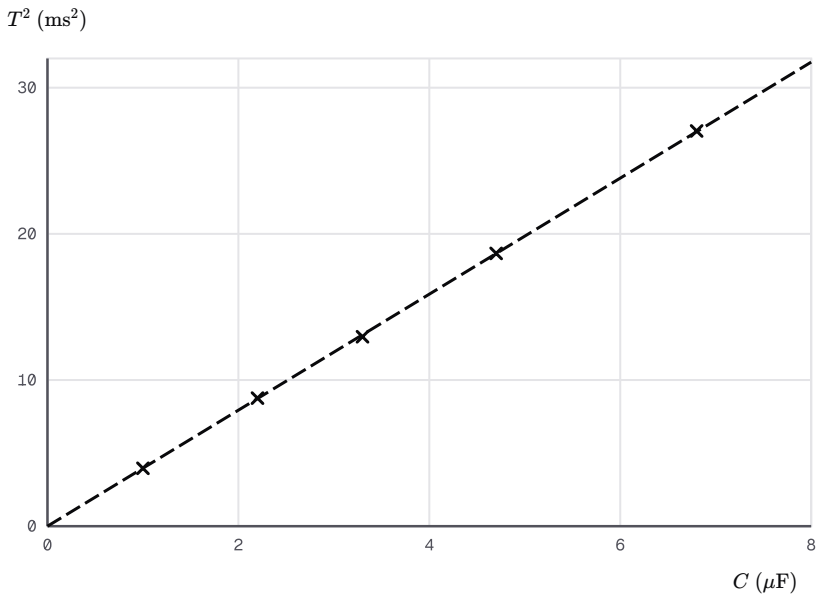
Protocole. Pour chaque condensateur de la série $1{,}0$; $2{,}2$; $3{,}3$; $4{,}7$; $6{,}8\,\mu\text{F}$: charger sous $6{,}0\,\text{V}$, basculer en position 2, enregistrer u_C, puis mesurer T sur plusieurs oscillations.

Exploitation. Calculer T^2 pour chaque mesure et tracer T^2 en fonction de C. Si les points s'alignent avec l'origine, T^2 est proportionnelle à C.

Mesures. Les pseudo-périodes obtenues sont, dans l'ordre des capacités croissantes :

- $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$: $T = 1{,}99\,\text{ms}$;
- $C = 2{,}2\,\mu\text{F}$: $T = 2{,}96\,\text{ms}$;
- $C = 3{,}3\,\mu\text{F}$: $T = 3{,}60\,\text{ms}$;
- $C = 4{,}7\,\mu\text{F}$: $T = 4{,}32\,\text{ms}$;
- $C = 6{,}8\,\mu\text{F}$: $T = 5{,}20\,\text{ms}$.

Modéliser les mesures



× Mesures – – – $T^2 = k\,C$

Carré de la pseudo-période mesurée en fonction de la capacité, et droite de modélisation passant par l'origine.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 5 points : y = a x, avec a ≈ 3,969.

Exemple : La pente de la droite et l'inductance de la bobine

Les points s'alignent sur une droite qui passe par l'origine : $T^2 = k\,C$, avec $k \approx 3{,}97\,\text{ms}^2 \cdot \mu\text{F}^{-1}$. Or $1\,\text{ms}^2 \cdot \mu\text{F}^{-1} = 1\,\text{s}^2 \cdot \text{F}^{-1}$. Si $T \approx T_0$, alors $T^2 \approx 4\pi^2 L\,C$, et $k = 4\pi^2 L$:

$$L = \frac{3{,}97}{4\pi^2} \approx 0{,}10\,\text{H}.$$

On retrouve l'inductance indiquée pour la bobine.

Vérifie : Ce que dit la droite

Les points de T^2 en fonction de C sont alignés avec l'origine. Que devient T si l'on multiplie C par 4 ?

A. T est multipliée par 4.

Faux.

C'est T^2 qui est proportionnelle à C, et non T.

B. T est multipliée par 2.

Juste.

Juste : T^2 est multipliée par 4, donc T par $\sqrt{4} = 2$.

C. T est multipliée par 16.

Faux.

Ce serait le cas si T variait comme C^2.

D. T ne change pas.

Faux.

Les mesures montrent que T augmente avec C.

Correction

$T^2 = k\,C$: si C est multipliée par 4, T^2 l'est aussi, et $T = \sqrt{k\,C}$ est multipliée par $\sqrt{4} = 2$. Les mesures vont dans ce sens : de $1{,}0$ à $4{,}7\,\mu\text{F}$, $\sqrt{4{,}7} \approx 2{,}2$ et $\dfrac{4{,}32}{1{,}99} \approx 2{,}2$.

Comparer la pseudo-période à la période propre

Pseudo-période et période propre. Pour $C = 4{,}7\,\mu\text{F}$, la période propre du circuit vaut :

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{0{,}10 \times 4{,}7 \times 10^{-6}} \\ &\approx 4{,}3 \times 10^{-3}\,\text{s} \end{aligned}$$

La pseudo-période mesurée, $4{,}32\,\text{ms}$, en est très proche : l'amortissement est faible. Ce rapprochement est un constat expérimental, admis dans ce chapitre.

Propriété : Pseudo-période et période propre

Lorsque l'amortissement est **faible** (régime pseudo-périodique dont l'amplitude diminue lentement), la pseudo-période T est très voisine de la période propre du circuit :

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

La pseudo-période augmente avec L et avec C. Augmenter la résistance totale accroît l'amortissement, sans modifier T_0 ; au-delà d'une certaine valeur, le régime devient apériodique.

Vérifie : La période propre quand la résistance change

On double la résistance totale du montage, sans changer L ni C. Que devient la période propre T_0 ?

A. Elle ne change pas.

Juste.

Juste : seul l'amortissement augmente.

B. Elle double.

Faux.

La résistance n'apparaît pas dans $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

C. Elle est divisée par deux.

Faux.

Même erreur : T_0 ne dépend que de L et de C.

Correction

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ne contient ni R ni r : elle ne change pas. Doubler la résistance totale renforce l'amortissement. La pseudo-période mesurée s'écarte un peu de T_0 si l'amortissement devient fort.

Attention : Une pseudo-période seulement voisine de la période propre

✗ « On a mesuré T, donc on connaît exactement T_0. »

✓ La relation $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ décrit le circuit sans résistance. La pseudo-période mesurée n'en est proche que si l'amortissement est faible ; elle s'en écarte quand il devient fort. Un régime apériodique n'a aucune pseudo-période.

Le rôle de la résistance et de l'inductance

Influence de R, de L et de C. Les trois enregistrements de la décharge montrent l'effet de R : une résistance plus grande amortit plus vite, puis supprime les oscillations. Les mesures montrent l'effet de C : T augmente avec C. Pour L, on enfonce davantage le noyau de fer dans la bobine : L augmente, et la pseudo-période aussi.

Attention : Changer la résistance ne change pas la période propre

✗ « Pour diminuer la pseudo-période, on augmente R. »

✓ R ne figure pas dans $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Augmenter R fait baisser l'amplitude plus vite, et peut rendre le régime apériodique. Tant que l'amortissement est faible, la pseudo-période reste voisine de T_0. Pour la diminuer, on diminue L ou C.

À toi : L'inductance avec le noyau enfoncé

On enfonce davantage le noyau de fer de la bobine, puis on l'associe à un condensateur de $2{,}2\ \mu\text{F}$, sans résistor. La pseudo-période mesurée vaut $4{,}1\ \text{ms}$, avec un amortissement faible. Estime l'inductance L. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
En amortissement faible, assimile T à $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.
Indice 2
Convertis T et C en unités SI avant de calculer.
Indice 3
Point délicat : ce calcul reste une estimation, valable parce que l'amortissement est faible.

Réponse
Avec $T \approx T_0$, $L \approx \dfrac{T^2}{4\pi^2 C}$:

$$L \approx \frac{(4{,}1 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 2{,}2 \times 10^{-6}}$$
$$\approx 0{,}19\,\mathrm{H}$$

Enfoncer le noyau a presque doublé l'inductance, qui valait $0{,}10\,\mathrm{H}$.

Entretien des oscillations

Compenser l'énergie dissipée

Devine : Des oscillations d'amplitude constante

Pour que les oscillations du montage gardent une amplitude constante, que faut-il ajouter au circuit ?

A. Un second condensateur, chargé lui aussi.
Faux.
Il apporterait une réserve d'énergie finie, épuisée à son tour.

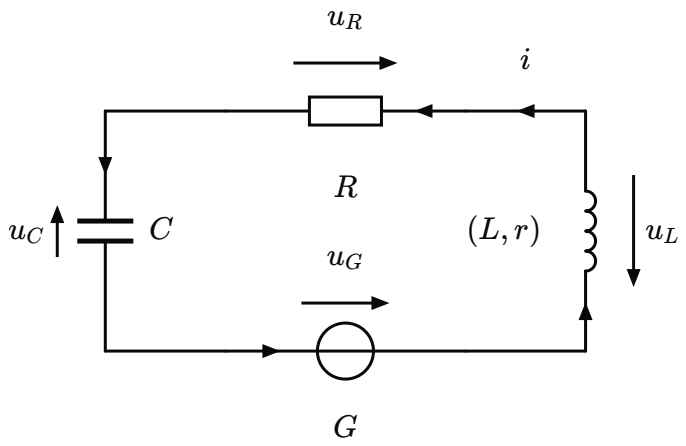
B. Un résistor de plus grande résistance.
Faux.
Une résistance de plus augmente l'amortissement.

C. Rien : il suffit d'attendre un régime stable.
Faux.
Sans apport d'énergie, celle du circuit diminue jusqu'à zéro.

D. Un dispositif qui compense l'énergie dissipée.
Juste.
Juste : c'est le rôle d'un dispositif d'entretien.

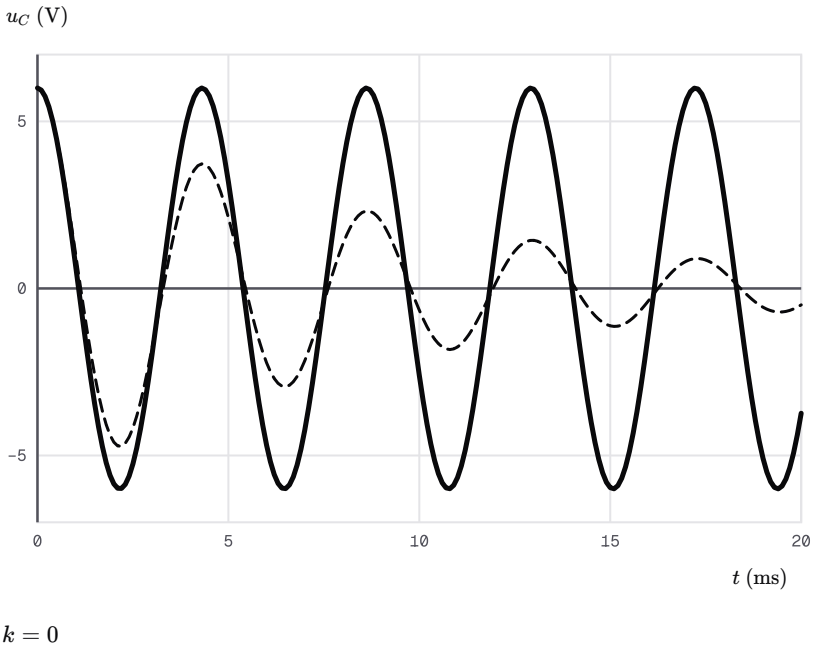
Correction
L'amortissement vient de l'énergie dissipée par effet Joule. Pour garder une amplitude constante, un dispositif doit restituer cette énergie au fur et à mesure : c'est l'**entretien** des oscillations.

Le dispositif d'entretien est un montage électronique alimenté, placé en série dans la maille. Il délivre une tension proportionnelle à l'intensité : $u_G = k\,i$, où k est un coefficient réglable, en ohms. Sur le schéma, on le représente par le symbole d'un générateur de tension, nommé G.



Circuit RLC entretenu : le générateur G, de tension proportionnelle à l'intensité, est en série avec le condensateur, le résistor et la bobine.

Une amplitude qui ne diminue plus



Tension du condensateur sans entretien (k = 0, pointillés) et avec le générateur réglé à k = 22 Ω (trait plein).

Observation. Sans générateur, $k = 0$: on retrouve la décharge amortie du montage. Avec le générateur réglé à $k = 22\,\Omega$, l'amplitude reste la même d'une oscillation à l'autre, et la durée d'une oscillation change à peine. L'équation du circuit explique ce réglage.

L'équation du circuit entretenu

Pourquoi est-ce vrai ? La tension u_G est fléchée en convention générateur, les autres en convention récepteur. La loi d'additivité des tensions dit alors que la tension du générateur est égale à la somme des tensions des trois autres dipôles.

Propriété : Équation du circuit entretenu et condition d'entretien

Un générateur placé en série dans le circuit RLC délivre une tension proportionnelle à l'intensité, $u_G = k\,i$, avec k en ohms. La charge q vérifie alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r - k}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

Pour $k = R + r$, on retrouve l'équation du circuit LC idéal : les oscillations sont **entretenues**, sinusoïdales, de période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Le générateur fournit à chaque instant l'énergie dissipée par effet Joule.

Démonstration

Étape 1. Conventions. Courant i orienté sur la maille, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; u_C, u_R, u_L en convention récepteur ; u_G fléchée en convention générateur, $u_G = k\,i$.

Étape 2. Loi d'additivité des tensions. La tension du générateur est égale à la somme des tensions des récepteurs :

$$k\,i = \frac{q}{C} + (R + r)\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Étape 3. Équation en q. Avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}$, puis en divisant par L :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R + r - k}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,q = 0.$$

Étape 4. Condition d'entretien. Si $k = R + r$, le terme d'amortissement s'annule : c'est l'équation du circuit LC idéal, dont les solutions sont sinusoïdales de période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. La puissance fournie par le générateur, $u_G\,i = k\,i^2$, est alors égale à la puissance $(R + r)\,i^2$ dissipée par effet Joule.

À retenir : La condition qui supprime l'amortissement

Le générateur ajoute le terme $-k\,i$ au bilan de la maille. Le coefficient de la dérivée première devient $\dfrac{R + r - k}{L}$. Il s'annule pour $k = R + r$, et l'on retrouve l'équation du circuit idéal.

Vérifie : Le rôle de la convention du générateur

Dans l'établissement, pourquoi la tension u_G est-elle seule dans un membre de l'égalité ?

A. Parce qu'elle est plus grande que les autres tensions.

Faux.
La loi d'additivité ne compare pas les valeurs des tensions.

B. Parce qu'elle est fléchée en convention générateur.
Juste.
Juste : sa flèche va dans le sens du courant, à l'inverse des autres.

C. Parce que u_G est constante.
Faux.
$u_G = k\,i$ varie comme l'intensité.

Correction
Les tensions des récepteurs sont fléchées en sens inverse du courant, celle du générateur dans le même sens. Le long de la maille, la loi d'additivité s'écrit donc $u_G = u_C + u_R + u_L$.

Régler le générateur d'entretien

Exemple : Le réglage du générateur pour le montage

Dans le montage de la décharge, $R = 10\,\Omega$ et $r = 12\,\Omega$. L'entretien exige :

$$k = R + r = 10 + 12 = 22\,\Omega.$$

Le circuit se comporte alors comme le circuit idéal : les oscillations sont sinusoïdales, d'amplitude constante. Le régime est **périodique**, de période $T_0 \approx 4{,}3\,\text{ms}$, la période propre calculée à la section précédente.

Régler k en pratique. On observe u_C à l'oscilloscope et on augmente k à partir de zéro. Tant que $k < R + r$, l'amplitude diminue encore. Pour $k = R + r$, elle reste constante. Au-delà, elle croît jusqu'à la saturation du générateur, et la tension se déforme. On garde le réglage qui donne une sinusoïde d'amplitude constante.

Attention : Un coefficient ni trop petit ni trop grand

✗ « Plus k est grand, mieux les oscillations sont entretenues. »

✓ Si $k > R + r$, le coefficient de la dérivée première devient négatif : l'amplitude augmente jusqu'à la saturation du générateur, et u_C n'est plus sinusoïdale. Si $k < R + r$, l'amortissement est seulement réduit. Seul $k = R + r$ donne une sinusoïde d'amplitude constante.

Entretenir un autre montage

À toi : Entretenir avec un autre résistor

On remplace le résistor du montage par un résistor de $30\,\Omega$, avec la même bobine ($r = 12\,\Omega$). Quelle valeur de k entretient les oscillations ? Quelle puissance le générateur fournit-il à un instant où $|i| = 16\,\text{mA}$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La condition d'entretien fait intervenir la résistance totale du circuit.
Indice 2
Exprime la puissance fournie par le générateur à partir de sa tension et de l'intensité.
Indice 3
Point délicat : n'oublie pas la résistance de la bobine, et convertis $16\,\text{mA}$ en ampères.

Réponse
$k = R + r = 30 + 12 = 42\,\Omega$. À cet instant, la puissance fournie vaut :

$$\begin{aligned} k\,i^2 &= 42 \times (1{,}6 \times 10^{-2})^2 \\ &\approx 1{,}1 \times 10^{-2}\,\text{W} \end{aligned}$$

soit environ $11\,\text{mW}$. C'est la puissance dissipée par effet Joule dans le résistor et la bobine au même instant.

Ce qu'il faut savoir faire. Pour un circuit RLC série :

- reconnaître le régime d'une courbe $u_C(t)$ et mesurer une pseudo-période sur un écran ;
- établir les équations des circuits idéal, amorti et entretenu, en nommant orientation, conventions et loi d'additivité ;
- vérifier une solution par substitution, puis calculer T_0, Q_m, I_m et l'énergie totale ;
- lire des courbes d'énergie en fonction du temps ou de la charge ;
- expliquer les trois régimes et l'entretien par des échanges d'énergie.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Oscillations libres dans un circuit RLC série » (2bac · pc · physique-chimie)