BURHAN

Mouvements plans

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/mouvements-plans/cours

Chapitre	Semestre
Mouvements plans	Semestre 2

Réaction d'un plan et force de frottement

Un palet sur deux tables

Une expérience. On lance un palet sur une table de laboratoire horizontale. Il ralentit, puis s'arrête après environ un demi-mètre. On le lance ensuite, à la même vitesse, sur une table à coussin d'air : un film d'air le sépare de la table. Il glisse alors presque sans ralentir jusqu'au bord.

Devine : La force qui freine le palet

Sur la table de laboratoire, quelle force explique le ralentissement du palet ?

A. Son poids, dirigé vers le bas.

Faux.

Faux. Le poids est vertical : il ne peut pas réduire une vitesse horizontale.

B. Une force de la table, parallèle à la table et opposée au mouvement.

Juste.

Oui. La table exerce une force de contact ; sa partie parallèle à la table freine le palet.

C. Aucune : le palet s'arrête parce que son élan s'épuise.

Faux.

Faux. D'après le principe d'inertie, sans force la vitesse se conserverait : c'est presque ce qu'on observe sur le coussin d'air.

D. Une force de la table perpendiculaire à la table.

Faux.

Faux. Une force perpendiculaire au mouvement ne change pas la valeur de la vitesse : elle compense le poids.

Correction

La table exerce sur le palet une force de contact. Sa partie parallèle à la table, opposée au glissement, freine le palet : c'est la force de frottement. Sur le coussin d'air, cette partie devient presque nulle.

Rappel : la deuxième loi de Newton relie les forces au mouvement du centre d'inertie G. On l'applique ici dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G.$$

Le palet ralentit : $\vec{a}_G$ n'est pas nul, donc les forces ne se compensent pas. Le poids est vertical. La force exercée par la table a donc aussi une partie horizontale.

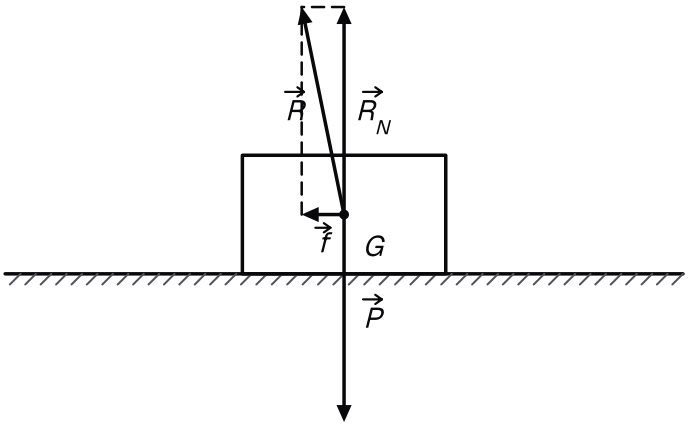
Réaction normale et frottement

Définition : Réaction d'un plan : composante normale et frottement

Un solide posé sur un plan reçoit de ce plan une force de contact $\vec{R}$, la **réaction du plan**. On la décompose en deux forces :

- la **réaction normale** $\vec{R}_N$, perpendiculaire au plan et dirigée du plan vers le solide ;
- la **force de frottement** $\vec{f}$, parallèle au plan et opposée au sens du glissement.

Ainsi $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$ et $R = \sqrt{R_N^2 + f^2}$. Si le contact se fait **sans frottement**, $\vec{f} = \vec{0}$ et la réaction est perpendiculaire au plan. Dans ce chapitre, la valeur f du frottement est supposée **constante** pendant le glissement. Au repos, le frottement prend la valeur nécessaire à l'équilibre, sans dépasser cette même valeur f : si l'équilibre exige davantage, le solide glisse.



Forces exercées sur le palet qui glisse vers la droite : poids, réaction normale, frottement et réaction de la table.

Valeur de la réaction du palet

À retenir : Chiffres significatifs d'un résultat

Une application numérique se rédige en trois temps : la formule littérale, puis les données numériques et leurs unités, enfin le résultat suivi de son unité.

Pour un produit ou un quotient, la donnée qui a le moins de chiffres significatifs fixe ceux du résultat. Pour une somme ou une différence, c'est la décimale la moins précise qui fixe celle du résultat. On garde la valeur non arrondie d'un résultat intermédiaire pour la suite du calcul.

Avec $m = 0{,}250\,\mathrm{kg}$ (trois chiffres) et $f = 0{,}50\,\mathrm{N}$ (deux chiffres), un résultat qui emploie les deux s'écrit avec deux chiffres significatifs.

Exemple : Réaction de la table sur le palet

Système : le palet, de masse $m = 0{,}250\,\mathrm{kg}$; référentiel terrestre supposé galiléen. Le frottement vaut $f = 0{,}50\,\mathrm{N}$ et $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Réaction normale. Le centre d'inertie reste à la même hauteur : $a_y = 0$. Sur la verticale, $R_N - m\,g = 0$:

$$\begin{aligned} R_N &= m\,g \\ R_N &= 0{,}250 \times 9{,}80 \\ R_N &= 2{,}45\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Réaction. $\vec{R}_N$ et $\vec{f}$ sont perpendiculaires :

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_N^2 + f^2} \\ R &= \sqrt{2{,}45^2 + 0{,}50^2} \\ R &= 2{,}5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Le résultat garde deux chiffres significatifs, comme f.

Vérifie : Écrire le poids d'un palet plus léger

Un autre palet a une masse $m = 0{,}18\,\mathrm{kg}$. Avec $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, quelle écriture du poids $P = m\,g$ respecte la règle des chiffres significatifs ?

A. $P = 1{,}764\,\mathrm{N}$

Faux.

Faux. Quatre chiffres : plus que la masse, qui n'en a que deux.

B. $P = 1{,}76\,\mathrm{N}$

Faux.

Faux. Trois chiffres : c'est la précision de g, pas celle de la donnée la moins précise.

C. $P = 1{,}8\,\mathrm{N}$

Juste.

Oui. La masse a deux chiffres significatifs : le poids aussi.

D. $P = 2\,\mathrm{N}$

Faux.

Faux. Un seul chiffre : on jette une précision que la masse fournit.

Correction
La calculatrice affiche $0{,}18 \times 9{,}80 = 1{,}764$. La donnée la moins précise, m, a deux chiffres significatifs : on écrit $P = 1{,}8\,\mathrm{N}$.

Le coussin d'air supprime le frottement

Contact sans frottement. Sur la table à coussin d'air, le film d'air supprime presque tout frottement. La réaction se réduit alors à $\vec{R}_N$, perpendiculaire à la table, qui compense le poids. La somme des forces est nulle : le palet garde une vitesse constante, en ligne droite. C'est le modèle du contact sans frottement, où $\vec{f} = \vec{0}$.

À toi : Réaction sur un tapis de feutre

On lance le même palet ($m = 0{,}250\,\mathrm{kg}$) sur un tapis de feutre horizontal. Le frottement vaut alors $f = 0{,}80\,\mathrm{N}$. Calcule R_N, puis la valeur R de la réaction du tapis. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La projection sur la verticale donne R_N ; la réaction est la somme de deux forces perpendiculaires.
Indice 2
$R_N = m\,g$ comme sur la table, puis $R = \sqrt{R_N^2 + f^2}$.
Indice 3
Point délicat : R n'est pas $R_N + f$, et le résultat garde deux chiffres significatifs, comme f.

Réponse
Réaction normale. Le palet reste à la même hauteur : $R_N = m\,g = 0{,}250 \times 9{,}80$, soit $R_N = 2{,}45\,\mathrm{N}$.

Réaction.

$$R = \sqrt{2{,}45^2 + 0{,}80^2}$$
$$R = 2{,}6\,\mathrm{N}$$

Conclusion. Le tapis exerce sur le palet une réaction de valeur $R = 2{,}6\,\mathrm{N}$, inclinée vers l'arrière du mouvement.

Une confusion sur la réaction

Attention : Réaction normale et poids : une égalité seulement à l'horizontale

X « La réaction normale vaut toujours le poids. »

✓ Sur un plan horizontal, sans autre force verticale, $R_N = m\,g$. Sur un plan incliné d'un angle α, la projection sur la normale donne $R_N = m\,g\cos\alpha$ (section suivante), plus petite que $m\,g$. Une force de traction inclinée change encore R_N. On obtient R_N par la projection sur la normale au plan, jamais par réflexe.

Trouve l'erreur : Une réaction calculée trop vite

Pour le palet de la table ($R_N = 2{,}45\,\mathrm{N}$ et $f = 0{,}50\,\mathrm{N}$), un élève écrit : « $R = R_N + f = 2{,}95\,\mathrm{N}$ ». Où est l'erreur ?

A. Il additionne les valeurs de deux forces perpendiculaires.

Juste.

Oui. On additionne des vecteurs ; pour deux vecteurs perpendiculaires, la valeur de la somme vient du théorème de Pythagore.

B. Il devrait soustraire : $R = R_N - f$.

Faux.

Faux. Le frottement ne diminue pas la réaction : il l'incline, et R est plus grande que R_N.

C. Il oublie le poids, qui fait partie de la réaction.

Faux.

Faux. Le poids est exercé par la Terre, pas par la table : il ne fait pas partie de la réaction.

D. Son calcul est juste.

Faux.

Faux. La somme vectorielle donne une valeur plus petite que $2{,}95\,\mathrm{N}$.

Correction

La réaction est la somme vectorielle $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$. Les deux vecteurs sont perpendiculaires : $R = \sqrt{R_N^2 + f^2}$, soit $R = 2{,}5\,\mathrm{N}$, et non $2{,}95\,\mathrm{N}$.

Équation différentielle du mouvement sur un plan incliné

Une accélération constante sur le banc

Une mesure. Un mobile glisse sur un banc incliné, le long de la ligne de plus grande pente. Un capteur enregistre sa vitesse : elle augmente de la même quantité chaque seconde. Son accélération est donc constante. Quelles grandeurs fixent sa valeur ?

Devine : Doubler la masse du mobile

On suppose le contact sans frottement. On double la masse du mobile avec une surcharge. Que devient son accélération sur la pente ?

A. Elle double.

Faux.

Faux. Le poids double, mais la masse à mettre en mouvement double aussi.

B. Elle est divisée par deux.

Faux.

Faux. Ce serait vrai pour une même force ; ici la force motrice double aussi.

C. Elle reste la même.

Juste.

Oui. Le poids et la masse doublent ensemble : leur rapport ne change pas.

D. Elle devient nulle.

Faux.

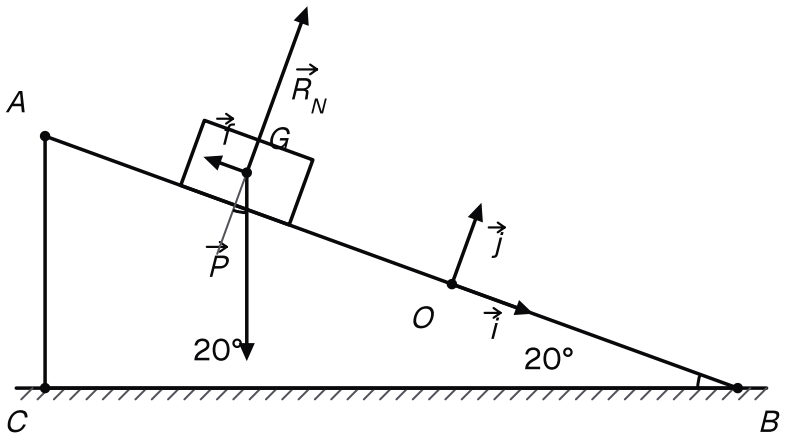
Faux. Rien ne compense la partie du poids qui agit le long de la pente.

Correction

Sans frottement, la seule force qui agit le long de la pente est une partie du poids, proportionnelle à m. La deuxième loi divise cette force par m : l'accélération ne dépend pas de la masse. La suite de la section le montre par le calcul.

Rappel : pour projeter des forces, on choisit des axes adaptés. Ici, l'axe $(O;\vec{i})$ est parallèle à la ligne de plus grande pente et **dirigé vers le bas** ; l'axe $(O;\vec{j})$ est perpendiculaire au plan, orienté vers le haut. Le poids, vertical, fait avec la normale au plan le même angle α que le plan avec l'horizontale : leurs côtés sont perpendiculaires deux à deux.

Projeter le poids sur la pente



Mobile qui descend la pente : repère selon la pente et la normale, poids, réaction normale et frottement en G.

Vérifie : Le poids projeté sur la pente

L'axe $(O;\vec{i})$ est orienté vers le bas de la pente. Quelle est la coordonnée P_x du poids sur cet axe ?

A. $P_x = m\,g\cos\alpha$

Faux.

Faux. $m\,g\cos\alpha$ est la valeur de la projection sur la normale, pas sur la pente.

B. $P_x = m\,g\sin\alpha$

Juste.

Oui. L'angle entre le poids et la normale vaut α ; la partie le long de la pente vaut $m\,g\sin\alpha$, dans le sens de $\vec{i}$.

C. $P_x = -m\,g\sin\alpha$

Faux.

Faux. Le poids tire vers le bas de la pente, dans le sens de $\vec{i}$: la coordonnée est positive.

D. $P_x = m\,g$

Faux.

Faux. Seule une partie du poids agit le long de la pente : $m\,g$ est sa valeur totale.

Correction

Le poids fait l'angle α avec la normale. Sa projection sur la pente vaut $m\,g\sin\alpha$, dirigée vers le bas : avec l'axe orienté vers le bas, $P_x = m\,g\sin\alpha$. Sur la normale, $P_y = -m\,g\cos\alpha$.

Établir l'équation du mouvement

Pourquoi est-ce vrai ? L'énoncé suivant se démontre à partir de la deuxième loi de Newton, admise au chapitre Lois de Newton. La démonstration, sous l'énoncé, suit le schéma de la figure : système, référentiel, bilan des forces, puis projection sur chacun des deux axes.

Propriété : Équation différentielle du mouvement sur un plan horizontal ou incliné

Un solide de masse m glisse vers le bas selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. Il n'est soumis qu'à son poids et à la réaction du plan, de frottement f constant. Sur l'axe $(O;\vec{i})$ parallèle à la ligne de plus grande pente et orienté vers le bas, la vitesse v de son centre d'inertie vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\alpha - \frac{f}{m},$$

et la réaction normale a pour valeur $R_N = m\,g\cos\alpha$.

L'accélération est constante : le mouvement est **rectiligne uniformément varié**. Sans frottement, $a = g\sin\alpha$, indépendante de la masse. Sur un plan horizontal ($\alpha = 0$), l'axe orienté dans le sens du mouvement, un solide lancé et freiné par le seul frottement a pour accélération $a = -\dfrac{f}{m}$.

Démonstration

Étape 1. Système et référentiel : le système est le solide, de centre d'inertie G ; le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Étape 2. Bilan des forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g$; la réaction du plan $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$, avec $\vec{R}_N$ perpendiculaire au plan et $\vec{f}$ parallèle au plan, opposée au glissement, donc dirigée vers le haut de la pente.

Étape 3. Deuxième loi de Newton : dans le référentiel galiléen, $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$.

Étape 4. Projection sur l'axe de la pente : l'axe $(O;\vec{i})$ est orienté vers le bas de la pente et $(O;\vec{j})$ lui est perpendiculaire, orienté vers le haut. Le poids fait l'angle α avec la normale au plan : $P_x = m\,g\sin\alpha$ et $P_y = -m\,g\cos\alpha$. De plus $R_{N,x} = 0$, $R_{N,y} = R_N$, $f_x = -f$ et $f_y = 0$. Sur $(O;\vec{i})$: $m\,g\sin\alpha - f = m\,a_x$, donc

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}.$$

Étape 5. Projection sur la normale : le centre d'inertie reste sur une droite parallèle au plan : $a_y = 0$. Sur $(O;\vec{j})$: $-m\,g\cos\alpha + R_N = 0$, donc $R_N = m\,g\cos\alpha$.

Étape 6. Conclusion : le second membre est constant : l'accélération $a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$ ne dépend pas du temps et le mouvement est rectiligne uniformément varié. Pour $f = 0$, $a = g\sin\alpha$; pour $\alpha = 0$, $a = -\dfrac{f}{m}$.

À retenir : Une projection par axe, une information par projection

Dans la démonstration, la projection sur la pente donne l'équation du mouvement : R_N n'y figure pas, car il est perpendiculaire à la pente. La projection sur la normale donne R_N, car le centre d'inertie ne quitte pas une droite parallèle au plan : $a_y = 0$. Le second membre $g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$ ne dépend pas du temps : l'accélération est constante.

Vérifie : Le rôle de la normale

Dans la démonstration, pourquoi la projection sur l'axe $(O;\vec{j})$ s'écrit-elle $-m\,g\cos\alpha + R_N = 0$?

A. Parce que le mobile est en équilibre.

Faux.

Faux. Le mobile accélère le long de la pente : il n'est pas en équilibre.

B. Parce que le frottement compense le poids.

Faux.

Faux. Le frottement est parallèle au plan : sa coordonnée sur $(O;\vec{j})$ est nulle.

C. Parce que la réaction normale vaut toujours le poids.

Faux.
Faux. Ici $R_N = m\,g\cos\alpha$, plus petite que $m\,g$.

D. Parce que G reste sur une droite parallèle au plan : $a_y = 0$.
Juste.
Oui. C'est l'étape 5 : le mouvement est rectiligne, selon la pente.

Correction
Le mobile glisse le long d'une droite parallèle au plan : sa coordonnée y reste constante, donc $a_y = 0$. La deuxième loi projetée sur $(O;\vec{j})$ donne $-m\,g\cos\alpha + R_N = 0$: c'est l'étape 5 de la démonstration.

Exemple : Accélération et réaction sur le banc incliné

Système : le mobile, de masse $m = 0{,}500\,\text{kg}$; référentiel terrestre supposé galiléen. Le banc fait l'angle $\alpha = 20{,}0°$ et le frottement vaut $f = 1{,}20\,\text{N}$. Le mobile descend.

Accélération.

$$\begin{aligned} a &= g\sin\alpha - \frac{f}{m} \\ a &= 9{,}80 \times \sin 20{,}0° \\ &\quad - \frac{1{,}20}{0{,}500} \\ a &= 0{,}952\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Réaction normale.

$$\begin{aligned} R_N &= m\,g\cos\alpha \\ R_N &= 0{,}500 \times 9{,}80 \\ &\quad \times \cos 20{,}0° \\ R_N &= 4{,}60\,\text{N} \end{aligned}$$

Chaque donnée a trois chiffres significatifs : les résultats aussi.

Démarche sur la pente et cas sans frottement

Méthode : Étapes d'une étude sur un plan incliné

1. **Définir** le système et le référentiel terrestre, supposé galiléen.
2. **Faire le bilan des forces** : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{R}_N$, frottement $\vec{f}$ opposé au glissement, et toute force motrice, comme une traction $\vec{T}$.
3. **Choisir les axes** : $(O;\vec{i})$ selon la ligne de plus grande pente, dans le sens du mouvement, sens écrit ; $(O;\vec{j})$ perpendiculaire au plan.

4. **Projeter** chaque force. Le poids donne $\pm m\,g\sin\alpha$ sur la pente, selon le sens de l'axe, et $-m\,g\cos\alpha$ sur la normale.
5. **Écrire** la deuxième loi sur chaque axe, avec $a_y = 0$, puis isoler la grandeur cherchée et faire l'application numérique.

Sans frottement. Avec $f = 0$, l'équation devient $a = g\sin\alpha$: la masse disparaît. C'est la réponse à la question du début : doubler la masse ne change pas l'accélération. Pour le banc à $20{,}0^\circ$ sans frottement :

$$a = 9{,}80 \times \sin 20{,}0^\circ$$
$$a = 3{,}35\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Changer l'inclinaison du banc

À toi : Le banc relevé à trente degrés

On relève le banc à $\alpha = 30{,}0^\circ$. Le mobile ($m = 0{,}500\,\mathrm{kg}$) subit le même frottement $f = 1{,}20\,\mathrm{N}$ en descendant. Calcule son accélération et la réaction normale. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux projections de la démonstration donnent a et R_N.
Indice 2
$a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$ et $R_N = m\,g\cos\alpha$, avec $\sin 30{,}0^\circ = 0{,}500$.
Indice 3
Point délicat : l'angle change $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, mais pas $\dfrac{f}{m}$; garde trois chiffres significatifs.

Réponse
Accélération.

$$a = 9{,}80 \times 0{,}500 - \frac{1{,}20}{0{,}500}$$
$$a = 2{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Réaction normale.

$$R_N = 0{,}500 \times 9{,}80 \times \cos 30{,}0^\circ$$
$$R_N = 4{,}24\,\mathrm{N}$$

Conclusion. Sur le banc à $30{,}0^\circ$, le mobile descend avec $a = 2{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, et le banc exerce $R_N = 4{,}24\,\mathrm{N}$.

Trouve l'erreur : Un signe dans l'équation de descente

Pour le mobile qui descend, un élève écrit : « $a = g\sin\alpha + \dfrac{f}{m}$ ». Quelle est son erreur ?

A. Il oriente le frottement vers le bas de la pente.

Juste.

Oui. Le mobile descend : le frottement, opposé au glissement, est dirigé vers le haut. Sa coordonnée est $-f$.

B. Il devrait écrire $g\cos\alpha$.

Faux.

Faux. Le long de la pente, le poids donne bien $m\,g\sin\alpha$.

C. Il devrait multiplier f par m.

Faux.

Faux. On divise par m toute l'équation $m\,g\sin\alpha - f = m\,a$: on obtient $\dfrac{f}{m}$.

D. Aucune : le frottement s'ajoute au poids.

Faux.

Faux. Il s'ajoute à la partie du poids seulement quand le solide monte la pente.

Correction

Le frottement est opposé au glissement. En descente, il est dirigé vers le haut de la pente : sur l'axe orienté vers le bas, sa coordonnée est $-f$. On obtient $m\,g\sin\alpha - f = m\,a$, soit $a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$.

Vérifie : Vitesse après une seconde et demie

Le mobile du banc à $20{,}0°$ part du repos, avec $a = 0{,}952\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Quelle est sa vitesse à $t = 1{,}50\,\mathrm{s}$?

A. $1{,}43\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Juste.

Oui. $v = a\,t$, car $v_0 = 0$.

B. $1{,}07\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. $\dfrac{1}{2}\,a\,t^2$ donne la distance parcourue, en mètres, pas la vitesse.

C. $0{,}635\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. $\dfrac{a}{t}$ n'a pas l'unité d'une vitesse.

D. $14{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. C'est $g\,t$: une chute libre verticale, pas une descente freinée sur la pente.

Correction

Le mobile part du repos : $v_0 = 0$.

$$v = a\,t$$
$$v = 0{,}952 \times 1{,}50$$
$$v = 1{,}43\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Montée sur une pente, plan horizontal et distance d'arrêt

Une caisse lancée vers le haut de la rampe

Une situation. Un déménageur lance une caisse de masse $m = 12{,}0\,\mathrm{kg}$ vers le haut d'une rampe inclinée de $\alpha = 15{,}0°$. Au départ, sa vitesse vaut $v_0 = 3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le frottement de la rampe a pour valeur $f = 18{,}0\,\mathrm{N}$. Jusqu'où la caisse monte-t-elle ?

Devine : Le frottement pendant la montée

Pendant que la caisse monte, dans quel sens est dirigé le frottement de la rampe ?

A. Vers le haut de la pente, comme en descente.

Faux.

Faux. Le frottement ne garde pas un sens fixe : il suit le glissement, pas la pente.

B. Perpendiculairement à la rampe.

Faux.

Faux. C'est la direction de la réaction normale ; le frottement est parallèle au plan.

C. Vers le bas de la pente.

Juste.

Oui. La caisse glisse vers le haut : le frottement s'oppose à ce glissement.

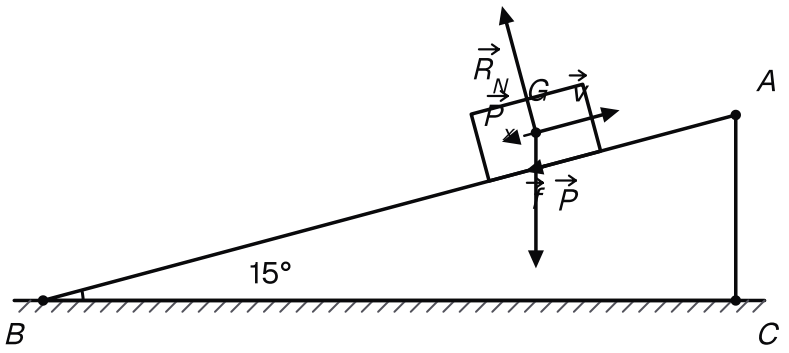
D. Il est nul tant que la caisse avance.

Faux.

Faux. Le frottement agit pendant tout le glissement.

Correction

Le frottement est opposé au sens du glissement. La caisse monte : il est dirigé vers le bas de la pente, comme la partie du poids le long de la pente. Les deux forces freinent la caisse.



Caisse lancée vers le haut de la rampe : vitesse vers le haut, frottement et composante du poids vers le bas.

Décélération pendant la montée

Attention : Sens du frottement : il suit le glissement

✗ « Le frottement est toujours dirigé vers le haut de la pente. »

✓ Le frottement est opposé au **sens du glissement**. Pour un solide lancé vers le haut, il est dirigé vers le bas, dans le même sens que la partie du poids le long de la pente : les deux s'ajoutent. La décélération vaut alors $g \sin\alpha + \dfrac{f}{m}$. À la descente, le frottement change de sens.

Exemple : Décélération de la caisse sur la rampe

Système : la caisse ; référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe $(O;\vec{i})$ suit la pente, **orienté vers le haut**, dans le sens du mouvement. Le poids y donne $-m\,g\sin\alpha$ et le frottement $-f$. La deuxième loi projetée sur cet axe s'écrit $-m\,g\sin\alpha - f = m\,a$:

$$a = -\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)$$
$$a = -\left(9{,}80 \times \sin 15{,}0^\circ + \frac{18{,}0}{12{,}0}\right)$$
$$a = -4{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

La coordonnée négative signale un mouvement retardé : la vitesse diminue de $4{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ chaque seconde.

Rappel : pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération a, de vitesse initiale v_0 et d'abscisse initiale x_0 :

$$v = a\,t + v_0,$$

$$x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0,$$
$$v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0).$$

Ces relations, vues au chapitre sur la chute verticale, s'appliquent ici le long de la pente.

Durée de la montée et distance d'arrêt

À toi : Durée et longueur de la montée

Avec $v_0 = 3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $a = -4{,}04\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, calcule la durée t_m de la montée, puis la distance d parcourue sur la rampe jusqu'à l'arrêt. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
À l'arrêt, la vitesse s'annule.
Indice 2
$v(t_m) = 0$ donne t_m ; la relation $v^2 - v_0^2 = 2\,a\,d$ donne d sans passer par le temps.
Indice 3
Point délicat : a est négative ; vérifie que t_m et d sont positifs, et garde la valeur non arrondie de a.

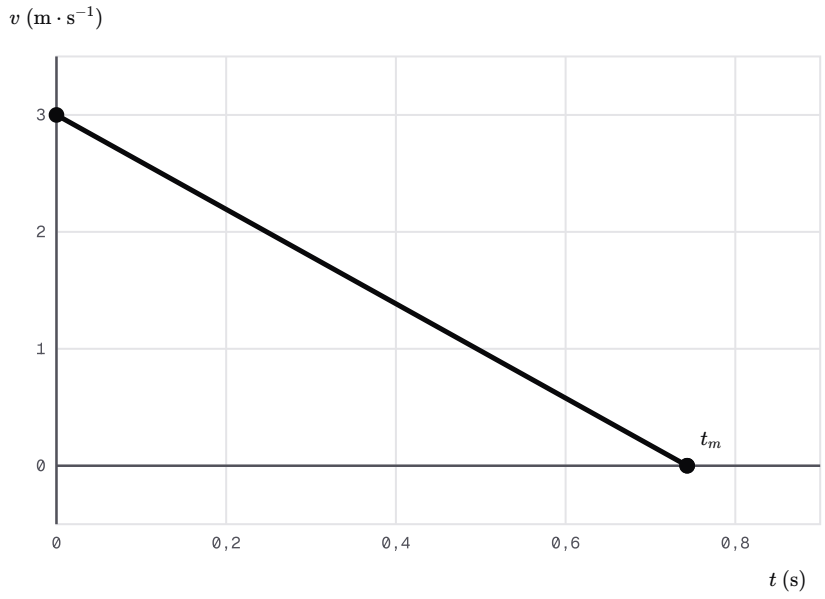
Réponse
Durée. À l'arrêt, $a\,t_m + v_0 = 0$:

$$t_m = -\frac{v_0}{a}$$
$$t_m = \frac{3{,}00}{4{,}036}$$
$$t_m = 0{,}743\,\mathrm{s}$$

Distance. À l'arrêt, $0 - v_0^2 = 2\,a\,d$:

$$d = -\frac{v_0^2}{2\,a}$$
$$d = \frac{3{,}00^2}{2 \times 4{,}036}$$
$$d = 1{,}11\,\mathrm{m}$$

Conclusion. La caisse monte pendant $t_m = 0{,}743\,\mathrm{s}$ et parcourt $d = 1{,}11\,\mathrm{m}$ sur la rampe avant de s'arrêter.



Vitesse de la caisse pendant la montée : une droite décroissante qui s'annule à la fin de la montée.

Après l'arrêt sur la rampe

Redescendre ou rester. À l'arrêt, la partie du poids le long de la pente vaut $m\,g\sin\alpha = 30{,}4\,\mathrm{N}$. D'après le modèle de la première section, le frottement au repos prend la valeur qui assure l'équilibre, sans dépasser $f = 18{,}0\,\mathrm{N}$. L'équilibre exigerait $30{,}4\,\mathrm{N}$: la caisse glisse. Elle redescend, et le frottement change de sens. L'énoncé de la section précédente donne alors, vers le bas :

$$a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$
$$a = 1{,}04\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Vérifie : Une rampe plus rugueuse

On recouvre la rampe d'un revêtement plus rugueux : le frottement vaut alors $f' = 36{,}0\,\mathrm{N}$ pendant le glissement. Au repos, il ne peut pas dépasser cette même valeur. La caisse monte, puis s'arrête. Que fait-elle ensuite ?

A. Elle redescend, car elle est sur une pente.

Faux.

Faux. Ici l'équilibre exige $30{,}4\,\mathrm{N}$, et le frottement au repos peut aller jusqu'à $36{,}0\,\mathrm{N}$.

B. Elle reste immobile.

Juste.

Oui. $30{,}4\,\mathrm{N}$ est inférieur à $f' = 36{,}0\,\mathrm{N}$: le frottement au repos prend la valeur $30{,}4\,\mathrm{N}$ et équilibre la caisse.

C. Elle repart vers le haut.

Faux.

Faux. Aucune force motrice ne la pousse vers le haut.

Correction
À l'arrêt, l'équilibre exige un frottement de $30{,}4\,\mathrm{N}$, la partie du poids le long de la pente. Cette valeur ne dépasse pas $f' = 36{,}0\,\mathrm{N}$: le frottement au repos la prend. La somme des forces est nulle et la caisse reste immobile.

Plan horizontal et force de traction

Plan horizontal. Pour $\alpha = 0$, le poids n'a plus de partie le long du plan : $a = -\dfrac{f}{m}$. Le palet de la première section ($m = 0{,}250\,\mathrm{kg}$, $f = 0{,}50\,\mathrm{N}$) a ainsi $a = -2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Lancé à $v_0 = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, il s'arrête après :

$$\begin{aligned} d &= \frac{v_0^2}{2\,|a|} \\ d &= \frac{1{,}5^2}{2 \times 2{,}0} \\ d &= 0{,}56\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

C'est le demi-mètre observé au début du chapitre.

Exemple : Force de traction pour une montée à vitesse constante

On hisse la caisse à vitesse constante, avec une corde parallèle à la rampe. Système : la caisse ; référentiel terrestre supposé galiléen ; axe $(O;\vec{i})$ selon la pente, orienté vers le haut. La vitesse est constante : $a = 0$. La traction $\vec{T}$ est vers le haut ; le poids et le frottement donnent $-m\,g\sin\alpha$ et $-f$:

$$\begin{aligned} T - m\,g\sin\alpha - f &= 0 \\ T &= m\,g\sin\alpha + f \\ T &= 12{,}0 \times 9{,}80 \\ &\quad \times \sin 15{,}0^\circ + 18{,}0 \\ T &= 48{,}4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Vérifie : Retenir la caisse dans la descente

On fait maintenant descendre la caisse à vitesse constante, retenue par la corde parallèle à la rampe. Quelle est la valeur de la traction ?

A. $48{,}4\,\mathrm{N}$

Faux.
Faux. C'est la montée : en descente, le frottement est dirigé vers le haut et aide la corde.

B. $30{,}4\,\mathrm{N}$

Faux.
Faux. Ce serait le cas sans frottement.

C. $12{,}4\,\mathrm{N}$

Juste.

Oui. Corde et frottement retiennent ensemble la partie du poids le long de la pente.

D. $0\,\mathrm{N}$

Faux.

Faux. Sans corde, la caisse accélérerait : la partie du poids le long de la pente dépasse le frottement.

Correction

En descente, le frottement est dirigé vers le haut de la pente, comme la traction. Avec l'axe orienté vers le bas et $a = 0$: $m\,g\sin\alpha - f - T = 0$, donc

$$T = m\,g\sin\alpha - f$$
$$T = 30{,}44 - 18{,}0$$
$$T = 12{,}4\,\mathrm{N}$$

Étude expérimentale d'un mouvement sur un plan incliné

Préparer la mesure sur le banc

Un travail pratique. On veut mesurer le frottement que subit un mobile sur un banc incliné. Le mobile a une masse $m = 0{,}350\,\mathrm{kg}$; le banc est réglé à $\alpha = 10{,}0^\circ$. Sans frottement, l'équation du mouvement prévoit $a = g\sin\alpha = 1{,}70\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Une mesure de a dira si le frottement est négligeable.

Devine : Allure de la courbe des vitesses

On enregistre la vitesse v du mobile au cours du temps pendant la descente. Quelle allure attends-tu pour la courbe $v(t)$?

A. Une droite croissante.

Juste.

Oui. L'accélération est constante : la vitesse croît de la même quantité à chaque seconde.

B. Une parabole.

Faux.

Faux. C'est l'allure de l'abscisse $x(t)$, pas celle de la vitesse.

C. Une courbe qui tend vers une vitesse limite.

Faux.

Faux. Une vitesse limite apparaît avec un frottement qui croît avec la vitesse ; ici f est constant.

D. Une droite horizontale.

Faux.

Faux. Ce serait un mouvement uniforme : ici la partie du poids le long de la pente l'emporte sur le frottement.

Correction

> Le frottement est constant, et l'accélération $a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$ aussi : $v(t) = a\,t + v_0$ est une fonction affine du temps. La courbe est une droite croissante, de coefficient directeur a.

Méthode : Montage, protocole, exploitation sur le banc incliné

Montage. Un banc rectiligne repose sur une cale ; un inclinomètre mesure l'angle α. Un capteur de position, ou une caméra suivie d'un logiciel de pointage, relève la position du mobile toutes les $0{,}10\,\text{s}$. Une balance donne la masse m.

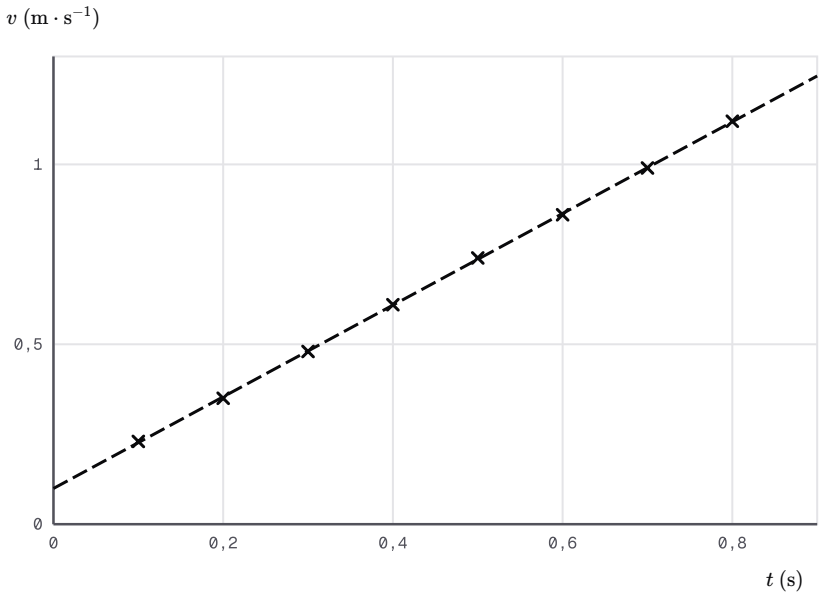
Protocole. On lâche le mobile en haut du banc, puis on lance l'enregistrement. On calcule une vitesse à chaque date avec les positions qui l'encadrent. On recommence trois fois pour vérifier la reproductibilité.

Exploitation. On trace $v(t)$ et on la modélise par une droite. Son coefficient directeur donne a ; on le compare à $g\sin\alpha$, puis on en déduit f.

Vitesses mesurées et droite de modélisation

Vitesses calculées à partir de l'enregistrement. La date $t = 0$ est celle du début de l'enregistrement, peu après le lâcher.

t (s)	v ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
$0{,}10$	$0{,}23$
$0{,}20$	$0{,}35$
$0{,}30$	$0{,}48$
$0{,}40$	$0{,}61$
$0{,}50$	$0{,}74$
$0{,}60$	$0{,}86$
$0{,}70$	$0{,}99$
$0{,}80$	$1{,}12$



Vitesses mesurées sur le banc incliné et droite de modélisation.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 8 points : y = a x + b, avec a ≈ 1,274 et b ≈ 0,09929.

Accélération mesurée et frottement

Méthode : Mesurer une accélération, puis en déduire le frottement

1. **Mesurer** l'accélération : coefficient directeur de la droite $v(t)$, ou relation $v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0)$ entre deux positions d'un enregistrement.
2. **Écrire** l'équation du mouvement sur l'axe de la pente, avec le frottement inconnu f.
3. **Isoler** f ; pour une descente, $f = m\,(g\sin\alpha - a)$.
4. **Vérifier** que $f \geq 0$: un frottement négatif signale une erreur de mesure ou de sens. Calculer $R = \sqrt{R_N^2 + f^2}$ si la réaction est demandée.

Exemple : Frottement déduit de la droite de modélisation

La droite de modélisation a pour coefficient directeur $a \approx 1{,}27\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, plus petit que $g\sin\alpha = 1{,}70\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$: le frottement n'est pas négligeable. Pour la descente, $m\,g\sin\alpha - f = m\,a$:

$$\begin{aligned} f &= m\,(g\sin\alpha - a) \\ f &= 0{,}350 \times (1{,}702 \\ &\qquad - 1{,}274) \\ f &= 0{,}15\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

La différence $g\sin\alpha - a$ n'a que deux chiffres significatifs : f aussi. Le frottement vaut environ $4\,\%$ du poids.

À toi : Accélération tirée de deux mesures

Sans tracer la droite, calcule a à partir des seules mesures aux dates $0{,}20\,\mathrm{s}$ et $0{,}70\,\mathrm{s}$, puis le frottement f. Compare aux valeurs obtenues par la droite. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
L'accélération est la variation de vitesse divisée par la durée correspondante.
Indice 2
$a = \dfrac{v(0{,}70) - v(0{,}20)}{0{,}70 - 0{,}20}$, puis $f = m\,(g\sin\alpha - a)$.
Indice 3
Point délicat : la différence $g\sin\alpha - a$ fixe la précision de f ; deux points seulement rendent le résultat sensible à chaque mesure.

Réponse
Accélération.

$$a = \frac{0{,}99 - 0{,}35}{0{,}50}$$
$$a = 1{,}28\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Frottement.

$$f = 0{,}350 \times (1{,}702 - 1{,}280)$$
$$f = 0{,}15\,\mathrm{N}$$

Conclusion. Ces deux mesures donnent $a = 1{,}28\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ au lieu de $1{,}27\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: l'accélération dépend des points choisis. Le frottement reste $f = 0{,}15\,\mathrm{N}$ à deux chiffres. La droite emploie les huit mesures : elle est moins sensible à l'erreur d'un seul point.

Sources d'erreur et protocole de vérification

Sources d'erreur. L'angle pèse lourd : une erreur de $0{,}5^\circ$ sur α change $g\sin\alpha$ d'environ $0{,}08\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, donc f d'environ $0{,}03\,\mathrm{N}$, soit un cinquième de sa valeur. S'y ajoutent l'imprécision du pointage, un banc mal rectiligne et un frottement qui varie le long du banc. Mesurer α avec soin et répéter l'enregistrement améliorent le résultat.

Vérifie : Vérifier la loi en changeant l'inclinaison

Pour vérifier la relation $a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$, quel protocole proposes-tu ?

A. Mesurer a pour plusieurs angles, puis tracer a en fonction de $\sin\alpha$.
Juste.
Oui. La loi prévoit une droite de coefficient directeur g et d'ordonnée à l'origine $-\dfrac{f}{m}$.

B. Mesurer a pour un seul angle et le comparer à g.

Faux.

Faux. Sur une pente, a ne vaut pas g : il faudrait $\sin\alpha = 1$ et aucun frottement.

C. Refaire une seule mesure, avec plus de soin.

Faux.

Faux. Une seule mesure ne vérifie pas une relation entre deux grandeurs.

D. Allonger le banc sans changer l'angle.

Faux.

Faux. La longueur du banc n'apparaît pas dans la relation.

Correction

La relation est affine en $\sin\alpha$. On règle le banc à plusieurs angles, on mesure a à chaque fois, puis on trace a en fonction de $\sin\alpha$. Une droite confirme la loi ; son coefficient directeur se compare à g. On suppose que le frottement reste le même d'un angle à l'autre.

Ordonnée à l'origine et bilan de la mesure

Vérifie : L'ordonnée à l'origine de la droite

La droite de modélisation coupe l'axe des vitesses vers $0{,}10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Que représente cette valeur ?

A. La valeur du frottement.

Faux.

Faux. Un frottement est une force, en newtons : pas une vitesse.

B. L'accélération du mobile.

Faux.

Faux. L'accélération est le coefficient directeur, pas l'ordonnée à l'origine.

C. Une erreur : la droite devrait passer par l'origine.

Faux.

Faux. Le mobile était déjà en mouvement au début de l'enregistrement.

D. La vitesse du mobile au début de l'enregistrement.

Juste.

Oui. À $t = 0$, $v = v_0$: le mobile avait déjà été lâché.

Correction

La droite modélise $v(t) = a\,t + v_0$. À $t = 0$, elle donne $v_0 \approx 0{,}10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: la vitesse du mobile au moment où l'enregistrement commence, peu après le lâcher.

À retenir : Comparer la mesure au modèle sans frottement

Sur un plan incliné, l'accélération mesurée en descente se compare à $g\sin\alpha$:

- $a \approx g \sin\alpha$, à la précision des mesures : le frottement est négligeable ;
- $a < g \sin\alpha$: le frottement vaut $f = m\,(g \sin\alpha - a)$;
- $a > g \sin\alpha$: erreur de mesure, d'angle ou de sens, car le frottement ne peut pas accélérer le mobile.

Exploiter le document d'une trajectoire de projectile

Positions successives d'une balle

Un document. Une balle de tennis est lancée vers le haut et vers l'avant. Une chronophotographie montre ses positions successives M_0, M_1, M_2… prises à intervalles réguliers $\tau = 50{,}0\,\text{ms}$. À cette vitesse modérée, les frottements de l'air sur la balle restent faibles.

Devine : Écarts horizontaux entre deux positions

Sur la chronophotographie, comment évoluent les écarts horizontaux entre deux positions successives ?

A. Ils augmentent.

Faux.

Faux. Rien n'accélère la balle horizontalement : son poids est vertical.

B. Ils diminuent jusqu'au sommet.

Faux.

Faux. C'est l'écart vertical qui diminue pendant la montée.

C. Ils restent égaux.

Juste.

Oui. La vitesse horizontale ne change pas : les abscisses sont équidistantes.

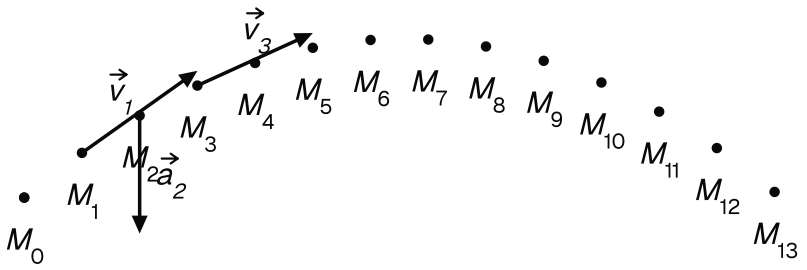
D. Ils s'annulent au sommet.

Faux.

Faux. Au sommet, la balle avance encore horizontalement.

Correction

Le poids est vertical : aucune force n'agit selon l'horizontale. La coordonnée horizontale de la vitesse reste constante, et les positions sont régulièrement espacées en abscisse.



Chronophotographie de la balle, vitesses en deux positions et accélération verticale.

Coordonnées relevées sur le document

Coordonnées des cinq premières positions, ramenées à la réalité ; l'origine est en M_0, l'axe vertical est orienté vers le haut.

Position	t (s)	x (m)	y (m)
M_0	0	0	0
M_1	$0{,}050$	$0{,}192$	$0{,}148$
M_2	$0{,}100$	$0{,}383$	$0{,}272$
M_3	$0{,}150$	$0{,}575$	$0{,}372$
M_4	$0{,}200$	$0{,}766$	$0{,}447$

Méthode : Lire un document de trajectoire

1. **Constater** que les positions sont dans un plan vertical : le mouvement est plan.
2. **Mesurer** les abscisses successives : des écarts égaux montrent que v_x est constante.
3. **Calculer** une vitesse avec les positions qui encadrent le point : $v_i \approx \dfrac{M_{i-1}M_{i+1}}{2\,\tau}$, ou coordonnée par coordonnée.
4. **Calculer** la variation de la vitesse entre deux positions : elle est verticale, vers le bas, et l'accélération vaut g en tout point.
5. **Remonter** aux conditions initiales v_0 et θ, puis comparer aux équations horaires.

Vérifie : Vitesse horizontale de la balle

De M_0 à M_4, l'abscisse augmente de $0{,}766\,\text{m}$ en quatre intervalles $\tau = 50{,}0\,\text{ms}$. Que vaut v_x ?

A. $3{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Juste.

Oui. La distance horizontale est divisée par la durée $4\,\tau = 0{,}200\,\mathrm{s}$.

B. $0{,}766\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. C'est une distance : il faut la diviser par la durée $4\,\tau$.

C. $15{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. La distance est divisée par τ au lieu de $4\,\tau$.

D. $0{,}00383\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Faux.

Faux. τ est en millisecondes : $50{,}0\,\mathrm{ms} = 0{,}0500\,\mathrm{s}$.

Correction

Les abscisses sont équidistantes : v_x est constante.

$$v_x = \frac{x_4 - x_0}{4\,\tau}$$
$$v_x = \frac{0{,}766}{4 \times 0{,}0500}$$
$$v_x = 3{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Accélération de la balle

Accélération. Les positions qui encadrent M_1 et M_3 donnent leurs vitesses. Selon l'horizontale, $v_x = 3{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans les deux cas. Selon la verticale, $v_{y,1} = \dfrac{y_2 - y_0}{2\,\tau} = 2{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_{y,3} = \dfrac{y_4 - y_2}{2\,\tau} = 1{,}75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Entre ces deux positions, séparées de $2\,\tau = 0{,}100\,\mathrm{s}$:

$$a_y = \frac{1{,}75 - 2{,}72}{0{,}100}$$
$$a_y \approx -9{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

La différence des deux vitesses n'a que deux chiffres significatifs : a_y aussi. À la précision du pointage, l'accélération est verticale, vers le bas, de valeur g.

Vérifie : Direction de l'accélération pendant la montée

En M_2, la balle monte encore. Quelle est la direction du vecteur accélération ?

A. Tangente à la trajectoire, dans le sens du mouvement.

Faux.

Faux. C'est la direction de la vitesse.

B. Verticale, vers le haut, puisque la balle monte.

Faux.

Faux. La balle monte de moins en moins vite : sa vitesse verticale diminue.

C. Verticale, vers le bas.

Juste.

Oui. Seule la coordonnée verticale de la vitesse change, et elle diminue.

D. Nulle, car le mouvement est plan.

Faux.

Faux. Un mouvement plan peut avoir une accélération ; ici elle vaut g.

Correction

Entre deux positions, v_x ne change pas et v_y diminue : la variation de la vitesse est verticale, vers le bas. L'accélération l'est aussi, en M_2 comme en tout point.

Vitesse initiale et angle de tir

Exemple **: Vitesse initiale de la balle**

Coordonnées initiales. v_x est constante : $v_x(0) = 3{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La coordonnée verticale perd $g\,\tau$ à chaque intervalle, donc :

$$v_y(0) = v_{y,1} + g\,\tau$$
$$v_y(0) = 2{,}72 + 9{,}80 \times 0{,}0500$$
$$v_y(0) = 3{,}21\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Valeur.

$$v_0 = \sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}$$
$$v_0 = \sqrt{3{,}83^2 + 3{,}21^2}$$
$$v_0 = 5{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

À toi : Angle de tir de la balle

Avec $v_x(0) = 3{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_y(0) = 3{,}21\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, détermine l'angle de tir θ de la balle. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

θ est l'angle entre $\vec{v}_0$ et l'horizontale.

Indice 2

$\tan\theta = \dfrac{v_y(0)}{v_x(0)}$, puis la touche arctan de la calculatrice.

Indice 3

Point délicat : la calculatrice doit être réglée en degrés ; le résultat garde trois chiffres significatifs.

Réponse

Dans le triangle des coordonnées de $\vec{v}_0$:

$$\tan\theta = \frac{3{,}21}{3{,}83}$$
$$\theta = 40{,}0^\circ$$

Conclusion. La balle est lancée avec $v_0 = 5{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sous l'angle de tir $\theta = 40{,}0^\circ$.

Nature du mouvement de la balle

À retenir : Trois constats tirés de la chronophotographie

La chronophotographie établit trois faits :

- les positions sont dans un plan vertical : le mouvement est **plan** ;
- v_x reste constante : le mouvement horizontal est uniforme ;
- l'accélération est verticale, vers le bas, de valeur g.

Elle donne aussi les conditions initiales de la balle : sa vitesse v_0 et son angle de tir θ.

Trouve l'erreur : Une vitesse instantanée mal estimée

Pour la vitesse en M_1, un élève calcule $\dfrac{M_0M_1}{\tau}$. Que lui reproches-tu ?

A. Il obtient une vitesse moyenne entre M_0 et M_1, pas la vitesse en M_1.

Juste.

Oui. Les positions M_0 et M_2, qui encadrent M_1, donnent une meilleure estimation.

B. Il devrait diviser par τ^2.

Faux.

Faux. Une vitesse est une distance divisée par une durée.

C. Il devrait ne garder que l'écart horizontal.

Faux.

Faux. La vitesse a aussi une coordonnée verticale.

D. Rien : c'est la méthode à suivre en M_1.

Faux.

Faux. Cette valeur décrit l'intervalle de M_0 à M_1 : elle est plus proche de la vitesse au milieu de cet intervalle.

Correction

$\dfrac{M_0M_1}{\tau}$ est la vitesse moyenne sur l'intervalle de M_0 à M_1. La vitesse en M_1 s'estime avec les positions qui l'encadrent : $v_1 \approx \dfrac{M_0M_2}{2\,\tau}$.

Du document au modèle. Ces constats décrivent une balle. Pour prévoir n'importe quel lancer, il faut un modèle : celui du projectile, dont la section suivante établit les équations horaires.

Équations horaires d'un tir et conditions initiales

Un ballon dans le champ de pesanteur

Une question. Un joueur tire un ballon de football posé au sol. Le ballon part avec une vitesse $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sous un angle de tir $\theta = 30{,}0°$. Peut-on prévoir sa position à chaque instant, et l'endroit où il retombe ?

Devine : Les forces pendant le vol

Une fois le ballon parti, quelles forces le modèle retient-il ?

A. Son poids et la force du pied.

Faux.

Faux. Le pied ne touche plus le ballon : il n'exerce plus de force.

B. Son poids seulement.

Juste.

Oui. Le contact avec le pied a cessé et on néglige l'air : seul le poids agit.

C. Une force d'élan, dans le sens du mouvement.

Faux.

Faux. Aucune force d'élan n'existe : sans force horizontale, la vitesse horizontale se conserve.

D. Aucune force.

Faux.

Faux. Le ballon retombe : son poids agit.

Correction

Pendant le vol, plus rien ne touche le ballon. On néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède : le ballon n'est soumis qu'à son poids. C'est le modèle du projectile, défini ci-dessous.

Définition : Projectile dans un champ de pesanteur uniforme

Dans une région de quelques centaines de mètres au voisinage du sol, le **champ de pesanteur** $\vec{g}$ est **uniforme** : même direction verticale, même sens vers le bas et même valeur g en tout point.

Un **projectile** est un solide lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et qui n'est soumis, pendant son vol, qu'à son **poids** $\vec{P} = m\,\vec{g}$: les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sont négligés. C'est un **modèle**, valable pour un solide dense et peu rapide.

Les **conditions initiales** sont la position de lancement et le vecteur $\vec{v}_0$, de valeur v_0, qui fait l'**angle de tir** θ avec l'horizontale.

Vérifie : Domaine du modèle du projectile

Pour quel objet le modèle du projectile est-il le plus fidèle ?

A. Un volant de badminton frappé fort.

Faux.

Faux. Léger et rapide, il est fortement freiné par l'air.

B. Une feuille de papier lâchée.

Faux.

Faux. Son poids est faible devant l'action de l'air.

C. Un ballon de baudruche lancé.

Faux.

Faux. La poussée d'Archimède et l'air ne sont pas négligeables devant son poids.

D. Une bille d'acier lancée à $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

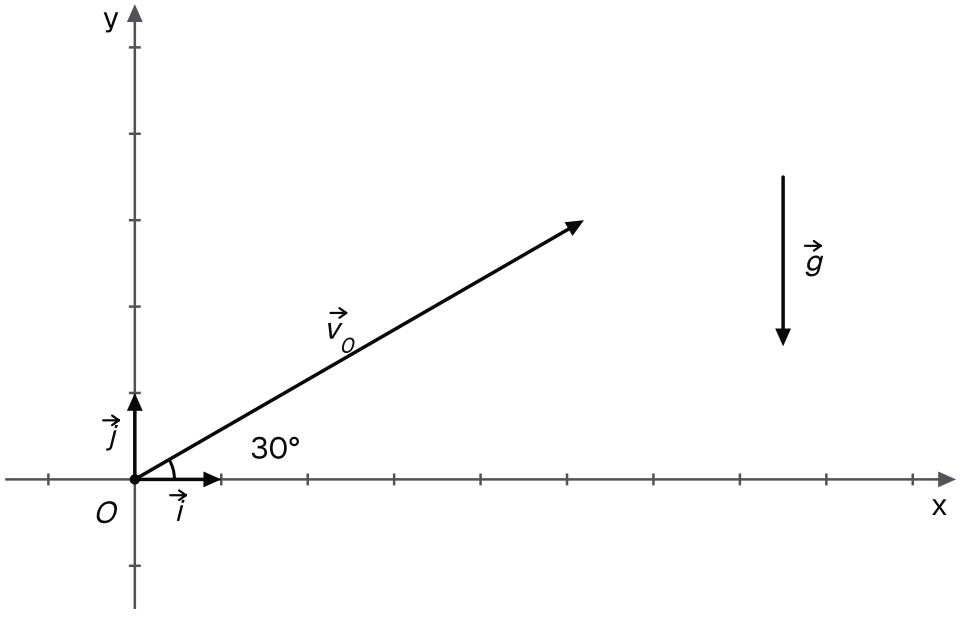
Juste.

Oui. Dense et lente : l'air agit très peu sur elle devant son poids.

Correction

Le modèle néglige l'air devant le poids. Il convient à un objet dense et peu rapide, comme une bille d'acier. Pour le ballon de football, il reste une bonne première approche, qui surestime un peu la portée.

Repère et conditions initiales



Repère du tir : vecteur vitesse initiale, angle de tir et champ de pesanteur.

Exemple : Conditions initiales du ballon

Le ballon part de O à $t = 0$. Les coordonnées de $\vec{v}_0$ se lisent sur la figure :

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \cos\theta \\ v_x(0) &= 15{,}0 \times \cos 30{,}0^\circ \\ v_x(0) &= 13{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y(0) &= v_0 \sin\theta \\ v_y(0) &= 15{,}0 \times \sin 30{,}0^\circ \\ v_y(0) &= 7{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Le champ de pesanteur a pour coordonnées $(0 ; -g)$, car $\vec{j}$ est orienté vers le haut.

Établir les équations horaires

Pourquoi est-ce vrai ? Les équations horaires se démontrent par la deuxième loi de Newton, puis par deux calculs de primitives.

Outil admis (mathématiques). Une primitive de la constante k est $k\,t + C$; une primitive de $k\,t + C$ est $\dfrac{1}{2}\,k\,t^2 + C\,t + C'$. Les constantes C et C' se fixent par les valeurs à $t = 0$.

Propriété : Équations horaires du mouvement d'un projectile

Un projectile est lancé à l'instant $t = 0$ depuis l'origine O d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{i}$ horizontal et $\vec{j}$ vertical vers le haut, et le vecteur $\vec{v}_0$ est dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les équations différentielles de son mouvement sont :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g.$$

Ses équations horaires sont :

$$x(t) = v_0 \cos\theta \; t,$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\theta \; t.$$

Le mouvement est **plan**, dans le plan vertical qui contient $\vec{v}_0$: il est uniforme selon l'horizontale et uniformément varié selon la verticale.

Démonstration

Étape 1. Système et référentiel : le système est le projectile, de centre d'inertie G ; le référentiel terrestre est supposé galiléen pendant la durée du vol.

Étape 2. Bilan des forces : le projectile n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, avec $\vec{g} = -g\,\vec{j}$.

Étape 3. Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$. En projetant sur les axes : $a_x = 0$ et $a_y = -g$, ce qui donne les équations différentielles. Sur l'axe $(O ; \vec{k})$ perpendiculaire au plan, $a_z = 0$.

Étape 4. Vitesse : une primitive d'une constante (outil admis) donne $v_x = C_1$, $v_y = -g\,t + C_2$ et $v_z = C_3$. À $t = 0$: $v_x(0) = v_0 \cos\theta$, $v_y(0) = v_0 \sin\theta$, $v_z(0) = 0$. Donc $v_x = v_0 \cos\theta$, $v_y = -g\,t + v_0 \sin\theta$ et $v_z = 0$.

Étape 5. Position : une nouvelle primitive, avec $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, donne $x = v_0 \cos\theta\; t$, $y = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\theta\; t$ et $z = 0$.

Étape 6. Conclusion : la coordonnée z reste nulle : le mouvement a lieu dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$. La vitesse horizontale est constante (mouvement uniforme) et l'accélération verticale vaut $-g$ (mouvement uniformément varié).

À retenir : Accélération, vitesse, position : deux primitives

La démonstration enchaîne trois étages. La deuxième loi donne $\vec{a}_G = \vec{g}$. Une primitive donne la vitesse, fixée par $\vec{v}_0$; une seconde primitive donne la position, fixée par le point de lancement. La coordonnée z, nulle au départ avec une vitesse nulle selon $\vec{k}$, reste nulle : le mouvement est plan.

Vérifie : Pourquoi la vitesse horizontale se conserve

Dans la démonstration, pourquoi v_x garde-t-elle la valeur $v_0 \cos\theta$ pendant tout le vol ?

A. Parce que le pied a donné un élan horizontal.

Faux.

Faux. Le pied n'agit plus ; c'est l'absence de force horizontale qui conserve v_x.

B. Parce que la vitesse est horizontale au sommet.

Faux.

Faux. C'est une conséquence, pas la raison.

C. Parce que $a_x = 0$: une primitive de 0 est une constante.

Juste.

Oui. C'est l'étape 4 : la constante vaut $v_x(0) = v_0 \cos\theta$.

D. Parce que g est constant.

Faux.

Faux. g fixe a_y ; sur l'horizontale, la raison est $a_x = 0$.

Correction

La deuxième loi projetée sur l'horizontale donne $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$. Une primitive de 0 est une constante ; à $t = 0$, elle vaut $v_0 \cos\theta$. Donc $v_x = v_0 \cos\theta$ à chaque instant.

Exemple : Position du ballon après quatre dixièmes de seconde

Avec $v_x(0) = 13{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_y(0) = 7{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, en mètres et en secondes :

$$x(t) = 13{,}0\,t,$$
$$y(t) = -4{,}90\,t^2 + 7{,}50\,t.$$

À $t = 0{,}400\,\mathrm{s}$:

$$\begin{aligned} x &= 13{,}0 \times 0{,}400 \\ x &= 5{,}20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -4{,}90 \times 0{,}400^2 \\ &\quad + 7{,}50 \times 0{,}400 \\ y &= 2{,}22\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Uniforme selon l'horizontale, varié selon la verticale

Deux mouvements à la fois. Selon l'horizontale, x croît de $13{,}0\,\mathrm{m}$ par seconde : le mouvement est uniforme. Selon la verticale, $y(t)$ a la forme vue au chapitre sur la chute verticale, avec une vitesse initiale vers le haut. Ce mouvement est uniformément varié : retardé pendant la montée, puis accéléré pendant la descente. Le mouvement du ballon réunit les deux, dans le plan vertical qui contient $\vec{v}_0$.

À toi : Le ballon une seconde après le tir

Calcule la position du ballon et la coordonnée v_y de sa vitesse à $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$. Monte-t-il encore ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les équations horaires donnent x et y ; v_y vient de la vitesse établie dans la démonstration.
Indice 2
$v_y = -g\,t + v_0 \sin\theta$.
Indice 3
Point délicat : le signe de v_y dit si le ballon monte ou descend, avec $\vec{j}$ vers le haut.

Réponse
Position. $x = 13{,}0 \times 1{,}00$, soit $x = 13{,}0\,\mathrm{m}$, et

$$\begin{aligned} y &= -4{,}90 \times 1{,}00^2 \\ &\quad + 7{,}50 \times 1{,}00 \\ y &= 2{,}60\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Vitesse verticale.

$$\begin{aligned} v_y &= -9{,}80 \times 1{,}00 \\ &\quad + 7{,}50 \\ v_y &= -2{,}30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. À $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$, le ballon est en $x = 13{,}0\,\mathrm{m}$ et $y = 2{,}60\,\mathrm{m}$. Sa vitesse verticale est négative : il redescend déjà.

Trouve l'erreur : Un signe dans l'équation horaire verticale

Un élève écrit $y(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin\theta\; t$, avec $\vec{j}$ vers le haut. Où est l'erreur ?

A. Le terme en t^2 doit être négatif : $\vec{g}$ est opposé à $\vec{j}$.

Juste.

Oui. $a_y = -g$: le terme vaut $-\frac{1}{2}\, g\, t^2$.

B. Il faut $v_0 \cos\theta$ au lieu de $v_0 \sin\theta$ dans le second terme.

Faux.

Faux. $v_0 \cos\theta$ est la coordonnée horizontale de $\vec{v}_0$.

C. Le facteur $\frac{1}{2}$ est en trop.

Faux.

Faux. Une primitive de $-g\, t$ est $-\frac{1}{2}\, g\, t^2$: le facteur est juste.

D. Aucune : l'équation est juste telle qu'elle est écrite.

Faux.

Faux. Avec ce signe, le ballon monterait de plus en plus vite.

Correction

Avec $\vec{j}$ vers le haut, $\vec{g} = -g\,\vec{j}$ et $a_y = -g$. La primitive qui s'annule en 0 donne $y(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin\theta\; t$: le terme en t^2 est négatif.

Trajectoire parabolique, flèche et portée

Parabole, sommet et retour au sol

Devine : Forme de la trajectoire du ballon

Si l'on élimine le temps entre $x(t)$ et $y(t)$, quelle courbe décrit le ballon ?

A. Un arc de cercle.

Faux.

Faux. Rien ne maintient le ballon à une distance fixe d'un centre.

B. Une droite oblique, puis une chute verticale.

Faux.

Faux. La vitesse horizontale ne s'annule jamais : le ballon ne tombe pas à la verticale.

C. Une parabole.

Juste.

Oui. x est proportionnel à t et y est du second degré en t : y est du second degré en x.

Correction

> L'équation horaire horizontale donne $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$. En reportant dans $y(t)$, y devient un polynôme du second degré en x, de coefficient de x^2 négatif : la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas.

Pourquoi est-ce vrai ? La démonstration, sous l'énoncé, élimine le temps entre les deux équations horaires. Elle annule ensuite v_y pour le sommet, puis y pour le retour au sol. Elle emploie la formule de duplication $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$, vue en mathématiques.

Propriété : Équation de la trajectoire, flèche et portée d'un projectile

Avec les notations des équations horaires du projectile et pour $0 < \theta < 90^\circ$, la trajectoire est une portion de **parabole** d'équation :

$$y = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\theta}\,x^2 + x\tan\theta.$$

La **flèche** H est la hauteur maximale atteinte au-dessus du point de lancement :

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2\,g}.$$

La **portée** D est la distance horizontale entre le point de lancement et le point où le projectile revient à la même altitude :

$$D = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}.$$

Pour une même valeur v_0, la portée est maximale pour $\theta = 45^\circ$.

Démonstration

Étape 1. Élimination du temps : comme $\cos\theta \neq 0$, l'équation horaire $x = v_0\cos\theta\; t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$. En reportant dans $y(t)$:

$$y = -\frac{g\,x^2}{2\,v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta.$$

Étape 2. Sommet : au sommet S, la coordonnée verticale de la vitesse s'annule : $-g\,t_S + v_0\sin\theta = 0$, donc $t_S = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$. Alors

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2\,g} \\ &\quad + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} \\ y_S &= \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2\,g}. \end{aligned}$$

C'est la flèche H.

Étape 3. Retour à l'altitude de lancement : on cherche $x > 0$ tel que $y = 0$: $x\left(\tan\theta - \dfrac{g\,x}{2\,v_0^2\cos^2\theta}\right) = 0$. La solution non nulle est $x = \dfrac{2\,v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$.

Étape 4. Portée : avec $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$: $D = \dfrac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$. Le sinus vaut au plus 1, atteint pour $2\theta = 90°$: la portée est maximale pour $\theta = 45°$.

À retenir : Le sommet et le retour au sol, deux conditions

Deux conditions donnent les deux grandeurs. Au sommet, $v_y = 0$: on en tire t_S, puis la flèche $H = y(t_S)$. Au retour à l'altitude de lancement, $y = 0$ avec $x > 0$: on en tire la portée D. La flèche dépend de $\sin^2\theta$, la portée de $\sin(2\theta)$.

Vérifie : Condition qui donne la portée

Dans la démonstration, quelle condition fournit la portée D ?

A. $v_y = 0$ pour une date $t > 0$

Faux.

Faux. Cette condition donne le sommet, donc la flèche.

B. $y = 0$ avec $x > 0$

Juste.

Oui. C'est l'étape 3 : le retour à l'altitude de lancement.

C. $x = 0$ avec $y = 0$

Faux.

Faux. C'est le point de lancement.

D. $v_x = 0$ avec $t > 0$

Faux.

Faux. v_x ne s'annule jamais pendant le vol.

Correction

La portée est l'abscisse du point où le ballon revient à l'altitude de lancement : $y = 0$. La solution $x = 0$ est le lancement ; l'autre solution est D (étape 3 de la démonstration).

Flèche et portée du ballon

Exemple : Équation de la trajectoire, flèche et portée du ballon

Avec $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\theta = 30{,}0°$ et $\cos^2\theta = 0{,}750$, le coefficient de x^2 vaut :

$$\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\theta} = \frac{9{,}80}{2\times 15{,}0^2\times 0{,}750} = 0{,}0290\,\text{m}^{-1}$$

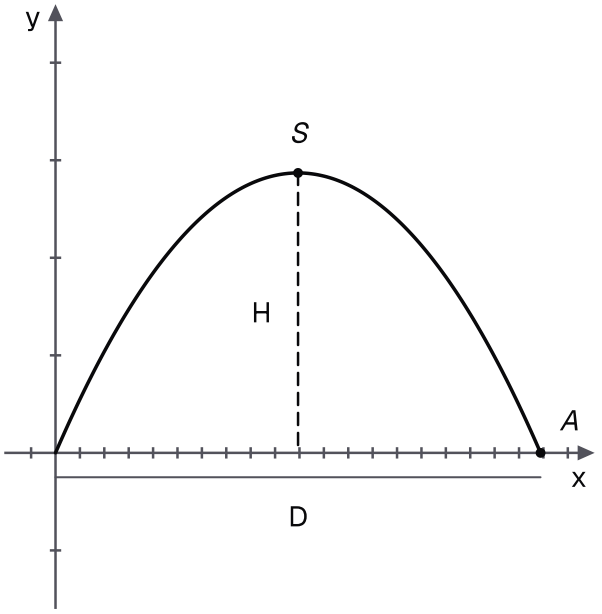
Avec $\tan 30{,}0^\circ = 0{,}577$: $y = -0{,}0290\,x^2 + 0{,}577\,x$.

Flèche.

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2\,g}$$
$$H = \frac{15{,}0^2\times 0{,}500^2}{2\times 9{,}80}$$
$$H = 2{,}87\,\text{m}$$

Portée.

$$D = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$
$$D = \frac{15{,}0^2\times \sin 60{,}0^\circ}{9{,}80}$$
$$D = 19{,}9\,\text{m}$$



Trajectoire du ballon : sommet S, flèche H et portée D.

Méthode : Flèche, portée et point d'impact : la démarche

1. **Placer** l'origine au point de lancement, l'axe vertical vers le haut, et écrire les conditions initiales.
2. **Écrire** les équations horaires, puis l'équation de la trajectoire si la question porte sur un point de passage.

3. **Sommet** : $v_y = 0$ donne t_S, puis $H = y(t_S)$.
4. **Point d'impact** : résoudre $y = y_{\text{sol}}$. Si le sol est à l'altitude de lancement, $D = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$; sinon, on résout une équation du second degré en x et on garde la solution positive.
5. **Contrôler** l'unité et l'ordre de grandeur du résultat.

Angle de tir et passage d'un obstacle

Attention : Au sommet, la vitesse reste horizontale

✗ « Au sommet, la vitesse du ballon est nulle. »

✓ Au sommet, seule la coordonnée verticale v_y s'annule. La vitesse vaut $v_0 \cos\theta$, horizontale : $13{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour le ballon. L'accélération vaut $\vec{g}$ en tout point de la trajectoire, sommet compris : elle n'est jamais nulle pendant le vol.

Vérifie : Deux angles pour une même portée

Le joueur garde $v_0 = 15{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Quel angle de tir donne la même portée que $\theta = 30{,}0°$?

A. $45{,}0°$

Faux.

Faux. $45°$ donne la portée maximale, plus grande.

B. $60{,}0°$

Juste.

Oui. $\sin 120° = \sin 60°$: même portée.

C. $15{,}0°$

Faux.

Faux. $\sin 30°$ est plus petit que $\sin 60°$: la portée est plus courte.

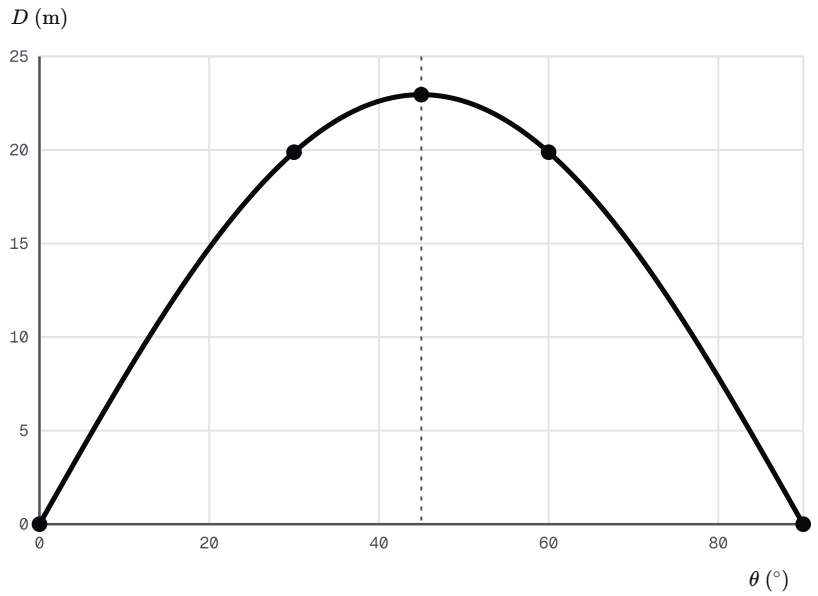
D. Aucun autre angle.

Faux.

Faux. Deux angles dont la somme vaut $90°$ donnent le même $\sin(2\theta)$.

Correction

La portée dépend de $\sin(2\theta)$. Pour $\theta = 30{,}0°$, $2\theta = 60°$; pour $\theta = 60{,}0°$, $2\theta = 120°$, et $\sin 120° = \sin 60°$. Les deux tirs vont à $19{,}9\,\text{m}$; celui à $60{,}0°$ monte plus haut.



Portée du ballon en fonction de l'angle de tir, pour une même vitesse initiale de 15,0 mètres par seconde.

À toi : Le ballon franchit-il le mur ?

Lors d'un coup franc, un mur de joueurs se tient à $9{,}15\,\mathrm{m}$ du ballon ; il atteint $1{,}80\,\mathrm{m}$ de haut, sauts compris. Le ballon est tiré avec $v_0 = 15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\theta = 30{,}0°$. Passe-t-il au-dessus du mur ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
L'équation de la trajectoire donne la hauteur du ballon pour une abscisse donnée.
Indice 2
Calcule y pour $x = 9{,}15\,\mathrm{m}$ avec $y = -0{,}0290\,x^2 + 0{,}577\,x$.
Indice 3
Point délicat : garde les coefficients avec un chiffre de plus pour le calcul, puis compare la hauteur obtenue à celle du mur.

Réponse
Hauteur au niveau du mur.

$$\begin{aligned} y &= -0{,}02904 \times 9{,}15^2 \\ &\quad + 0{,}5774 \times 9{,}15 \\ y &= 2{,}85\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Conclusion. Au niveau du mur, le ballon est à $2{,}85\,\mathrm{m}$, plus haut que $1{,}80\,\mathrm{m}$: il passe au-dessus, avec une marge de $1{,}05\,\mathrm{m}$.

Tir depuis une butte

Attention : Portée et altitude d'arrivée

✗ « Pour un tir depuis une hauteur, la portée vaut encore $\dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$. »

✓ Cette expression suppose un retour à l'altitude de lancement. Si le projectile part d'une hauteur h au-dessus du sol d'arrivée, on résout $y = -h$ avec l'équation de la trajectoire. La portée maximale n'est alors plus atteinte pour $45°$.

Exemple : Point d'impact d'un tir depuis une butte

Le ballon est tiré, avec les mêmes v_0 et θ, du haut d'une butte de $h = 2{,}00\,\text{m}$. Il retombe sur le terrain, où $y = -2{,}00\,\text{m}$:

$$-\,0{,}02904\,x^2 + 0{,}5774\,x + 2{,}00 = 0$$

Le discriminant vaut $0{,}5774^2 + 4 \times 0{,}02904 \times 2{,}00$, soit $0{,}5657$. La solution positive est :

$$x = \frac{0{,}5774 + \sqrt{0{,}5657}}{2 \times 0{,}02904}$$
$$x = 22{,}9\,\text{m}$$

Le ballon tombe à $22{,}9\,\text{m}$ du pied de la butte, plus loin que les $19{,}9\,\text{m}$ d'un tir depuis le sol.

Vérifie : Durée du vol depuis la butte

Combien de temps dure le vol du ballon tiré depuis la butte ?

A. $1{,}53\,\text{s}$

Faux.

Faux. C'est la durée d'un vol qui revient à l'altitude de lancement.

B. $0{,}765\,\text{s}$

Faux.

Faux. C'est la date du sommet.

C. $3{,}05\,\text{s}$

Faux.

Faux. La distance horizontale se divise par $v_0 \cos\theta$, pas par $v_0 \sin\theta$.

D. $1{,}76\,\text{s}$

Juste.

Oui. Le mouvement horizontal est uniforme : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$.

Correction

Le mouvement horizontal est uniforme : $x = v_0 \cos\theta \; t$.

$$t = \frac{22{,}89}{15{,}0 \times \cos 30{,}0^\circ}$$
$$t = 1{,}76\,\mathrm{s}$$

Force de Lorentz et règle de la main droite

Faisceau d'électrons et aimant

Une expérience. Dans une ampoule qui contient un gaz sous faible pression, un canon à électrons émet un faisceau d'électrons. Le gaz s'illumine sur leur passage : le faisceau est rectiligne. On approche le pôle nord d'un aimant : le faisceau se courbe. On éloigne l'aimant : il redevient rectiligne. Les électrons ont une vitesse $v = 2{,}00 \times 10^{7}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, donnée par le constructeur du canon.

Devine : L'aimant retourné

On retourne l'aimant : le pôle sud approche le faisceau à la place du pôle nord. Que fait le faisceau ?

A. Il se courbe dans l'autre sens.
Juste.
Oui. Le champ magnétique change de sens : la déviation aussi.

B. Il redevient rectiligne.
Faux.
Faux. L'aimant crée toujours un champ magnétique au niveau du faisceau.

C. Il se courbe dans le même sens.
Faux.
Faux. Le sens de la déviation dépend du sens du champ magnétique.

D. Les électrons s'arrêtent.
Faux.
Faux. La force magnétique courbe la trajectoire sans arrêter les électrons.

Correction
Le sens de la déviation change avec le sens du champ magnétique de l'aimant. Une force agit sur des charges en mouvement dans un champ magnétique : c'est la force de Lorentz. Ses caractéristiques forment une loi admise, décrite par l'énoncé ci-dessous.

Le champ magnétique. Un aimant, ou une bobine parcourue par un courant, crée un champ magnétique $\vec{B}$, exprimé en tesla (T). Ordres de grandeur : $5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ pour le champ terrestre, $10^{-3}\,\mathrm{T}$ entre deux bobines de laboratoire, 10^{-2} à $10^{-1}\,\mathrm{T}$ près d'un aimant droit, environ $1\,\mathrm{T}$ dans un appareil d'imagerie médicale. Le champ est **uniforme** dans une région où il a même direction, même sens et même valeur. Un champ perpendiculaire à une figure est dit sortant ou entrant.

Caractéristiques de la force de Lorentz

Propriété : Force de Lorentz

Une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit la **force de Lorentz** $\vec{F}$ dont les caractéristiques sont :

- **direction** : perpendiculaire à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$;
- **sens** : donné par la **règle de la main droite** : le pouce dans le sens de $q\,\vec{v}$, l'index dans le sens de $\vec{B}$, le majeur indique le sens de $\vec{F}$;
- **valeur** : $F = |q|\,v\,B\,\sin\beta$, où β est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Pour $q > 0$, $q\,\vec{v}$ a le sens de $\vec{v}$; pour $q < 0$, le sens opposé. Si $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, $F = |q|\,v\,B$. L'unité du champ magnétique est le tesla (T).

Exemple : Force subie par un électron du faisceau

On place le faisceau entre deux bobines : le champ y est uniforme, $B = 1{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{T}$, perpendiculaire à la vitesse $v = 2{,}00 \times 10^{7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La charge d'un électron vaut $q = -e$, avec $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$. Avec $\beta = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} F &= |q|\,v\,B \\ F &= 1{,}60 \times 10^{-19} \\ &\quad \times 2{,}00 \times 10^{7} \\ &\quad \times 1{,}00 \times 10^{-3} \\ F &= 3{,}20 \times 10^{-15}\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

La valeur s'écrit avec $|q|$: le signe de la charge ne compte que pour le sens.

Vérifie : Une vitesse parallèle au champ

Un électron se déplace dans le sens de $\vec{B}$, parallèlement au champ. Que vaut la force de Lorentz ?

A. Elle est maximale.

Faux.

Faux. Elle est maximale pour une vitesse perpendiculaire au champ.

B. Elle vaut $e\,v\,B$, dans le sens de $\vec{B}$.

Faux.

Faux. La force est perpendiculaire à $\vec{B}$; ici sa valeur est nulle.

C. Elle est nulle.

Juste.

Oui. $\beta = 0$ et $\sin 0 = 0$.

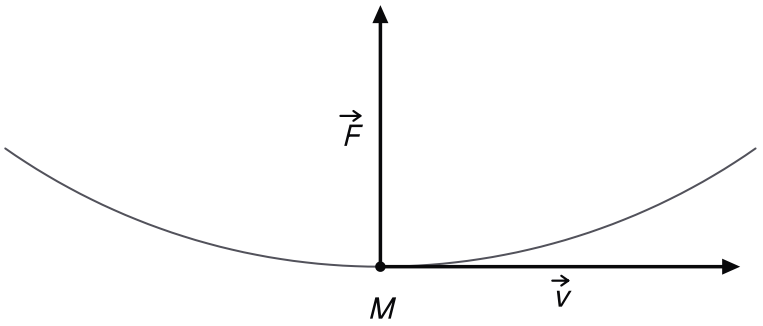
Correction

La valeur est $F = |q|\, v\, B \sin\beta$ avec $\beta = 0$: $\sin 0 = 0$, donc $F = 0$. Un électron qui se déplace selon le champ n'est pas dévié.

Le sens par la règle de la main droite

Méthode : Orienter la force de Lorentz avec la main droite

1. **Repérer** le signe de la charge et orienter $q\,\vec{v}$: sens de $\vec{v}$ si $q > 0$, sens opposé si $q < 0$.
2. **Placer** la main droite : le pouce selon $q\,\vec{v}$, l'index selon $\vec{B}$.
3. **Lire** le sens de la force sur le majeur, tendu perpendiculairement aux deux autres doigts.
4. **Vérifier** sur la trajectoire observée : la force pointe vers l'intérieur de la courbure.



Électron du faisceau dans un champ magnétique sortant de la figure : vitesse vers la droite, force vers le haut.

Attention : La force de Lorentz ne change pas la valeur de la vitesse

✗ « L'aimant augmente la vitesse des électrons du faisceau. »

✓ Toujours perpendiculaire à la vitesse, la force de Lorentz ne fait que dévier la particule : la valeur de sa vitesse reste la même. Pour une charge négative, le pouce suit $q\,\vec{v}$, de sens opposé à $\vec{v}$: appliquer la règle à $\vec{v}$ donnerait le sens contraire.

Charges positives et négatives

À toi : Sens de la force sur un électron, champ entrant

Un électron se déplace vers la droite de la figure. Le champ magnétique est perpendiculaire à la figure, **entrant**. Détermine le sens de la force de Lorentz. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par le signe de la charge et le vecteur $q\,\vec{v}$.
Indice 2
Pouce selon $q\,\vec{v}$, vers la gauche ; index vers l'intérieur de la figure.
Indice 3
Point délicat : pour une charge négative, le pouce est opposé à $\vec{v}$, pas dans son sens.

Réponse
Vecteur $q\,\vec{v}$. $q = -e < 0$: $q\,\vec{v}$ est dirigé vers la gauche.

Main droite. Pouce vers la gauche, index vers l'intérieur de la figure : le majeur pointe vers le bas.

Conclusion. La force de Lorentz est dirigée vers le bas de la figure : la trajectoire de l'électron se courbe vers le bas.

Vérifie : Sens de la force sur un proton

Un proton monte verticalement dans la figure ; le champ magnétique est **sortant**. Quel est le sens de la force de Lorentz ?

A. Vers la gauche.
Faux.
Faux. C'est le sens obtenu pour un électron, ou en inversant un doigt.

B. Vers la droite.
Juste.
Oui. $q > 0$: pouce vers le haut, index vers le lecteur, majeur vers la droite.

C. Vers le haut.
Faux.
Faux. La force est perpendiculaire à la vitesse.

D. Vers le lecteur.
Faux.
Faux. La force est perpendiculaire au champ.

Correction
Le proton est positif : $q\,\vec{v}$ a le sens de $\vec{v}$, vers le haut. Pouce vers le haut, index vers le lecteur : le majeur indique la droite. La force de Lorentz est dirigée vers la droite.

Trouve l'erreur : Une valeur de force négative

Pour un électron, un élève écrit $F = q\,v\,B = -3{,}20 \times 10^{-15}\ \text{N}$. Quelle est son erreur ?

A. L'unité doit être le tesla.

Faux.

Faux. Une force s'exprime en newtons.

B. Il manque un facteur $\sin 90^\circ$.

Faux.

Faux. $\sin 90^\circ = 1$: le calcul numérique ne change pas.

C. Il manque la masse de l'électron.

Faux.

Faux. La masse n'intervient pas dans la valeur de la force de Lorentz.

D. Une valeur de force est positive : on emploie $|q|$.

Juste.

Oui. Le signe de q sert au sens, par la règle de la main droite.

Correction

La valeur d'une force est positive : $F = |q|\,v\,B$, soit $F = 3{,}20 \times 10^{-15}\ \text{N}$. Le signe de la charge ne fixe que le sens : pour l'électron, le pouce est opposé à $\vec{v}$.

Particule chargée dans un champ magnétique uniforme : rayon et déflexion

Mouvement circulaire uniforme d'un proton

Devine : Trajectoire d'un proton dans un champ uniforme

Un proton entre dans un champ magnétique uniforme, avec une vitesse perpendiculaire au champ. Quelle trajectoire suit-il ?

A. Une parabole, comme un projectile.

Faux.

Faux. La force de Lorentz tourne avec la vitesse : elle n'est pas constante comme le poids.

B. Un cercle, parcouru à vitesse constante.

Juste.

Oui. La force reste perpendiculaire à la vitesse et garde la même valeur.

C. Une droite.

Faux.

Faux. La force n'est pas nulle : elle courbe la trajectoire.

D. Une spirale qui se resserre.

Faux.

Faux. La force ne ralentit pas le proton : le rayon ne diminue pas.

Correction

La force de Lorentz est perpendiculaire à la vitesse : la valeur de la vitesse ne change pas. Sa valeur $|q|\,v\,B$ reste donc constante. Une force de valeur constante, toujours perpendiculaire à la vitesse, impose un mouvement circulaire uniforme.

Rappel : dans la base de Frenet, $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$, où ρ est le rayon de courbure. Pourquoi est-ce vrai ? La démonstration de l'énoncé suivant applique la deuxième loi de Newton à la particule, son poids étant négligé, puis projette l'accélération dans cette base.

Propriété : Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse m et de charge q entre en O, avec une vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\vec{B}$, dans une région où règne un champ magnétique **uniforme** $\vec{B}$. Si elle n'est soumise qu'à la force de Lorentz, son mouvement est **plan, circulaire et uniforme**, dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ qui contient $\vec{v}_0$, de rayon

$$r = \frac{m\,v_0}{|q|\,B}.$$

Démonstration

Étape 1. Système et référentiel : le système est la particule ; le référentiel terrestre est supposé galiléen. Son poids est négligé devant la force de Lorentz.

Étape 2. Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$: l'accélération a la direction de la force de Lorentz.

Étape 3. Mouvement plan : la force de Lorentz est perpendiculaire à $\vec{B}$: la coordonnée de $\vec{a}$ selon $\vec{B}$ est nulle. La coordonnée initiale de la vitesse selon $\vec{B}$ est nulle aussi : elle le reste, et la particule demeure dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ qui contient $\vec{v}_0$.

Étape 4. Mouvement uniforme : la force est perpendiculaire à $\vec{v}$ à chaque instant : dans la base de Frenet, $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. La valeur de la vitesse reste v_0.

Étape 5. Rayon constant : l'accélération est normale : $a_N = \dfrac{v_0^2}{\rho} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{|q|\,v_0\,B}{m}$, car $\vec{v}$ reste perpendiculaire à $\vec{B}$. Donc $\rho = \dfrac{m\,v_0}{|q|\,B}$, constant.

Étape 6. Conclusion : une trajectoire plane parcourue à vitesse de valeur constante, de rayon de courbure constant, est un cercle : le mouvement est circulaire uniforme, de rayon $r = \dfrac{m\,v_0}{|q|\,B}$.

À retenir : Une force normale, une vitesse de valeur constante

Dans la démonstration, la force est normale à chaque instant : $a_T = 0$ et la vitesse garde la valeur v_0. L'accélération normale $\dfrac{v_0^2}{\rho} = \dfrac{|q|\, v_0\, B}{m}$ fixe un rayon de courbure constant. Une trajectoire plane de rayon de courbure constant est un cercle : ce dernier point est admis.

Vérifie : Doubler la valeur du champ

D'après le rayon $r = \dfrac{m\, v_0}{|q|\, B}$, que devient le rayon si l'on double la valeur du champ ?

A. Il double.

Faux.

Faux. B est au dénominateur.

B. Il est divisé par deux.

Juste.

Oui. r est inversement proportionnel à B.

C. Il ne change pas.

Faux.

Faux. Le champ fixe la force, donc la courbure.

D. Il est divisé par quatre.

Faux.

Faux. B n'est pas élevé au carré.

Correction

Dans $r = \dfrac{m\, v_0}{|q|\, B}$, le champ est au dénominateur, sans puissance. Doubler B divise r par deux : la trajectoire se resserre.

Rayon d'une trajectoire et séparation d'ions

Exemple : Rayon de la trajectoire d'un proton

Un proton ($m_p = 1{,}00728\,\mathrm{u}$, $q = e$) entre à $v_0 = 2{,}00 \times 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans un champ $B = 0{,}200\,\mathrm{T}$ perpendiculaire à sa vitesse.

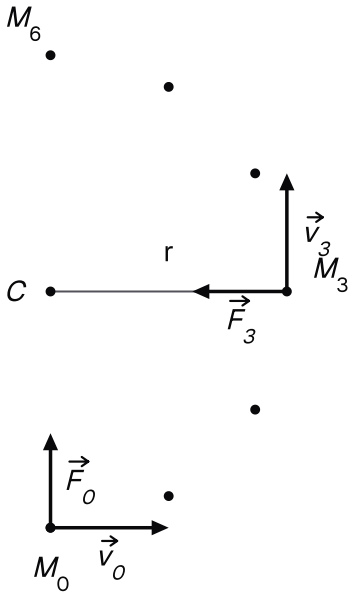
Conversion.

$$\begin{aligned} m_p &= 1{,}00728 \\ &\quad \times 1{,}66054 \times 10^{-27} \\ m_p &= 1{,}67263 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Rayon.

$$r = \frac{m_p\, v_0}{e\, B}$$
$$r = \frac{1{,}67263 \times 10^{-27}}{1{,}60 \times 10^{-19}} \times \frac{2{,}00 \times 10^{6}}{0{,}200}$$
$$r = 0{,}105\ \text{m}$$

Le proton décrit un cercle de $10{,}5\ \text{cm}$ de rayon.



Trajectoire circulaire d'un proton dans un champ magnétique entrant : vitesse et force en deux positions, rayon r.

Attention : Négliger le poids d'une particule : un calcul le justifie

✗ « Le poids d'une particule est négligeable, sans autre justification. »

✓ On compare les deux forces. Pour le proton précédent :

$$F = e\, v_0\, B$$
$$F = 6{,}40 \times 10^{-14}\ \text{N}$$
$$P = m_p\, g$$
$$P = 1{,}64 \times 10^{-26}\ \text{N}$$

Le rapport $\frac{F}{P}$ vaut environ 4×10^{12} : le poids se néglige. Pour un solide de taille courante, c'est l'inverse : le poids ne se néglige pas.

À toi : Séparer deux ions du potassium

Des ions potassium K^{+} de masses $m_1 = 38{,}96\,\mathrm{u}$ et $m_2 = 40{,}96\,\mathrm{u}$ entrent avec la même vitesse $v_0 = 1{,}00 \times 10^{5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans un champ $B = 0{,}500\,\mathrm{T}$. Après un demi-cercle, ils frappent une plaque détectrice. Calcule la distance entre leurs deux points d'impact. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Chaque ion décrit un demi-cercle : il frappe la plaque à la distance $2\,r$ de son point d'entrée.

Indice 2

La distance cherchée vaut $2\,(r_2 - r_1)$, avec $r = \dfrac{m\,v_0}{e\,B}$ pour chaque ion.

Indice 3

Point délicat : convertis la différence de masse, $2{,}00\,\mathrm{u}$, en kilogrammes.

Réponse

Différence de masse.

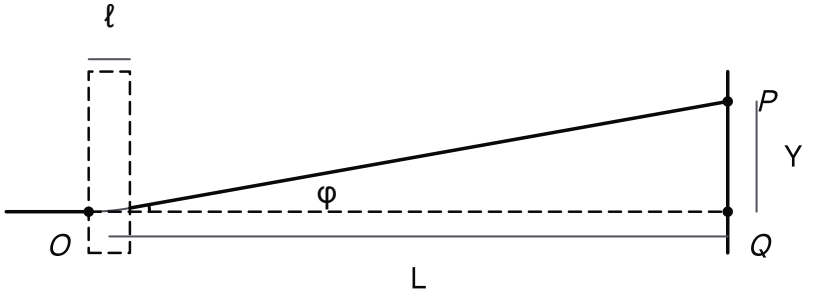
$$\begin{aligned}\Delta m &= 2{,}00 \\ &\quad \times 1{,}66054 \times 10^{-27} \\ \Delta m &= 3{,}321 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

Écart des impacts.

$$\begin{aligned}2\,(r_2 - r_1) &= \frac{2\,\Delta m\,v_0}{e\,B} \\ &= \frac{2 \times 3{,}321 \times 10^{-27}}{1{,}60 \times 10^{-19}} \\ &\quad \times \frac{1{,}00 \times 10^{5}}{0{,}500} \\ &= 8{,}30 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux ions frappent la plaque à $8{,}30\,\mathrm{mm}$ l'un de l'autre : le champ les sépare.

Sortie de la zone et déflexion



Déflexion magnétique d'un électron : arc de cercle dans la zone de largeur ℓ, puis droite jusqu'à l'écran. Champ sortant dans la zone.

Sortie de la zone. On reprend le faisceau d'électrons ($m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 2{,}00 \times 10^{7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). Il traverse une zone de champ uniforme sortant, $B = 1{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$, de largeur $\ell = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Le rayon vaut $r = 0{,}114\,\mathrm{m}$, plus grand que ℓ : l'électron décrit un arc, puis ressort.

Hors du champ, le poids étant négligé, aucune force n'agit : il file en ligne droite, dévié de l'angle φ tel que $\sin\varphi = \dfrac{\ell}{r} = 0{,}176$, soit $\varphi = 10{,}1°$. Pourquoi est-ce vrai ? La démonstration de l'énoncé suivant suit cette figure.

Propriété : Déflexion magnétique

Une particule de charge q et de masse m traverse, avec la vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\vec{B}$, une zone de champ magnétique uniforme de largeur ℓ, puis atteint un écran perpendiculaire à sa direction initiale. Si l'angle de déviation φ est petit, la **déflexion magnétique** Y, distance sur l'écran entre le point d'impact et le point atteint sans champ, vaut :

$$Y \approx \frac{|q|\,B\,\ell\,L}{m\,v_0},$$

où L est la distance entre le milieu de la zone de champ et l'écran. La déflexion est proportionnelle à B.

Démonstration

Étape 1. Arc de cercle dans la zone : dans la zone de champ, la trajectoire est un arc de cercle de rayon $r = \dfrac{m\,v_0}{|q|\,B}$, tangent en O à la direction initiale. À la sortie, la particule a tourné de l'angle φ tel que $\sin\varphi = \dfrac{\ell}{r}$.

Étape 2. Droite hors de la zone : hors du champ, la particule n'est soumise à aucune force (poids négligé) : son mouvement est rectiligne uniforme, selon la tangente à l'arc au point de sortie.

Étape 3. Point de concours : cette tangente coupe la direction initiale en un point situé à la distance $r\tan\dfrac{\varphi}{2}$ du point de sortie. Pour φ petit, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\tan\dfrac{\varphi}{2} \approx \dfrac{\varphi}{2}$ et $r\varphi \approx \ell$: ce point est pratiquement au milieu I de la zone.

Étape 4. Déflexion : vue de I, la particule part en ligne droite avec l'angle φ : $Y = L\tan\varphi \approx L\,\varphi \approx L\,\dfrac{\ell}{r}$. En remplaçant r :

$$Y \approx \frac{|q|\,B\,\ell\,L}{m\,v_0}.$$

Calculer une déflexion sur un écran

Exemple : Déflexion du faisceau d'électrons sur l'écran

L'écran est à $L = 30{,}0\,\mathrm{cm}$ du milieu de la zone. L'angle φ est petit : l'énoncé s'applique.

$$
\begin{aligned}
Y &\approx \frac{e\,B\,\ell\,L}{m_e\,v_0} \\
Y &\approx \frac{1{,}60\times10^{-19}}{9{,}11\times10^{-31}} \\
&\quad\times\frac{1{,}00\times10^{-3}}{2{,}00\times10^{7}} \\
&\quad\times 0{,}0200 \\
&\quad\times 0{,}300 \\
Y &\approx 5{,}27\times10^{-2}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Le spot se déplace de $5{,}27\,\mathrm{cm}$ sur l'écran. Le calcul exact, sur la figure, donne $5{,}35\,\mathrm{cm}$: l'écart reste faible tant que φ est petit.

Méthode : Rayon, déviation et déflexion : la démarche

1. **Vérifier** les hypothèses : champ uniforme, $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\vec{B}$, poids négligeable devant la force de Lorentz.
2. **Calculer** le rayon $r = \dfrac{m\,v_0}{|q|\,B}$ en unités SI : masse en kg, charge en C, champ en T.
3. **Comparer** r à la largeur ℓ de la zone. Si $\ell < r$, la particule ressort, déviée de l'angle φ tel que $\sin\varphi = \dfrac{\ell}{r}$.
4. **Calculer** la déflexion $Y \approx \dfrac{|q|\,B\,\ell\,L}{m\,v_0}$ si φ est petit.

À retenir : Savoir-faire des mouvements plans

- étudier un solide sur un plan : forces, projections, accélération, réaction, distance d'arrêt ;
- exploiter un enregistrement ou un document de trajectoire ;
- établir les équations horaires d'un projectile, sa flèche et sa portée ;
- trouver le sens de la force de Lorentz et le rayon d'une trajectoire circulaire ;
- calculer une déflexion magnétique.

Le chapitre suivant applique la deuxième loi de Newton aux satellites et aux planètes.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Mouvements plans » (2bac · pc · physique-chimie)