BURHAN

Dipôle RC

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/dipole-rc/cours

Chapitre	Semestre
Dipôle RC	Semestre 1

Le condensateur, ses armatures et leurs charges

Une DEL qui brille sans pile

Un petit circuit relie une pile, un condensateur et une diode électroluminescente (DEL). La DEL brille. On retire la pile : la DEL reste allumée environ une seconde, puis s'éteint peu à peu.

Rien d'autre n'est branché sur la DEL. Le composant qui l'alimente encore est le condensateur. Ce chapitre explique ce qu'il garde en réserve, et à quel rythme il le rend.

Devine : Ce qui alimente encore la DEL

Après le retrait de la pile, qu'est-ce qui fait encore circuler un courant dans la DEL ?

A. Le condensateur, qui rend les charges accumulées

Juste.

Oui. Pendant que la pile était branchée, le condensateur a accumulé des charges. Il les fait circuler dans la DEL quand la pile disparaît.

B. La DEL, qui garde en mémoire sa lumière

Faux.

Non : une DEL n'emmagasine rien. Elle s'éteint dès qu'aucun courant ne la traverse.

C. Les fils, où le courant continue par inertie

Faux.

Non : sans dipôle qui fournit de l'énergie, le courant cesse presque aussitôt dans un fil.

Indice 1

Cherche le seul composant qui n'est ni la pile, ni la DEL, ni un fil.

Correction

Le condensateur. Il a accumulé des charges pendant que la pile était branchée. Quand la pile est retirée, il les fait circuler dans la DEL, qui brille encore un court instant.

Constitution et symbole du condensateur

Un condensateur est formé de deux plaques conductrices, les armatures, placées face à face. Un isolant les sépare : air, plastique ou céramique. Dans un modèle courant, deux longues feuilles d'aluminium et un film isolant sont enroulés en cylindre.

Dans un schéma, son symbole est formé de deux traits parallèles, un par armature. Aucun courant ne traverse l'isolant : les charges s'accumulent sur les armatures.

Définition : Condensateur et charge du condensateur

Un **condensateur** est un dipôle formé de deux conducteurs, les **armatures** A et B, séparés par un isolant.

Lorsqu'il est chargé, ses armatures portent des charges opposées :

$$q_B = -q_A$$

La **charge du condensateur** est la charge $q = q_A$ de l'armature A, celle par laquelle entre le courant orienté. Elle s'exprime en coulombs (C).

Exemple : les charges des deux armatures

Après une charge, l'armature A d'un condensateur porte $q_A = 6{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$. L'armature B porte la charge opposée :

$$q_B = -6{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

La charge du condensateur est $q = q_A$. Le condensateur entier reste neutre : $q_A + q_B = 0$.

Vérifie : Le signe de la charge de l'armature B

Un condensateur a pour charge $q = -2{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$. Quelle est la charge q_B de son armature B ?

A. $q_B = -2{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$

Faux.

Non : c'est la charge de l'armature A, puisque $q = q_A$.

B. $q_B = 2{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$

Juste.

Oui : $q_B = -q_A = -q$. Ici, q_B est positive.

C. $q_B = 0$, car l'ensemble est neutre

Faux.

Non : c'est la somme $q_A + q_B$ qui est nulle, pas chaque charge.

Indice 1

Les deux armatures portent des charges opposées.

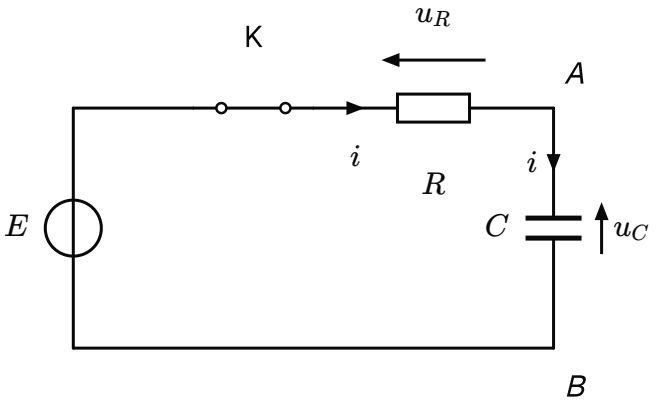
Correction

La charge du condensateur est celle de l'armature A : $q_A = -2{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$. L'armature B porte la charge opposée, $q_B = 2{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$.

Orienter le circuit en convention récepteur

Pour écrire les relations du circuit, on oriente d'abord le courant. On choisit un sens positif, ici vers l'armature A. L'intensité i est positive si le courant réel circule dans ce sens.

En **convention récepteur**, la flèche de la tension d'un dipôle est opposée à celle du courant. La tension $u_C = u_{AB}$ est donc fléchée vers A. La tension u_R du résistor est fléchée de la même façon.



Dipôle RC série alimenté par un générateur : courant orienté vers l'armature A, tensions en convention récepteur.

Définition : Intensité du courant et charge en convention récepteur

Le condensateur est orienté en **convention récepteur** : le courant d'intensité i entre par l'armature A et la tension $u_C = u_{AB}$ est fléchée vers A.

L'intensité est le débit de charge reçu par l'armature A :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

avec q en coulombs, t en secondes et i en ampères. Si $i > 0$, la charge q augmente ; si $i < 0$, elle diminue.

Exemple : la charge reçue pendant une durée

Un courant d'intensité constante $i = 3{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}$ entre par l'armature A pendant $\Delta t = 2{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$. La charge q augmente de :

$$\begin{aligned} \Delta q &= i\,\Delta t \\ &= 3{,}0 \times 10^{-3} \times 2{,}0 \times 10^{-3} \\ &= 6{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

Avec $i > 0$, la charge q augmente bien.

Le signe de la charge et le sens du courant

Attention : Le sens du courant fixe le signe de la charge

La relation $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ suppose que q est la charge de l'armature par laquelle **entre** le courant orienté.

Si tu dérives la charge de l'autre armature, un signe moins apparaît.

✗ « $i = \dfrac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}t}$ », avec i orienté vers A.

✓ $i = -\dfrac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}t}$, car $q_B = -q_A$.

À toi : charge reçue et signe de l'intensité

Le courant est orienté vers l'armature A. Pendant $5{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$, l'intensité vaut $i = -1{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}$.

1. La charge q augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?
2. De combien varie-t-elle ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'intensité est le débit de charge reçu par l'armature A.

Indice 2

Pour une intensité constante, $\Delta q = i\,\Delta t$.

Indice 3

Point délicat : le signe de i se garde dans le calcul. Il donne le sens de variation de q.

Réponse

1. L'intensité est négative : la charge q diminue.
2. La variation de charge vaut :

$$\begin{aligned}\Delta q &= i\,\Delta t \\ &= -1{,}2 \times 10^{-3} \\ &\quad \times 5{,}0 \times 10^{-3} \\ &= -6{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}\end{aligned}$$

La charge diminue de $6{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$.

Relation entre charge et tension : la capacité

Mesurer la charge sous plusieurs tensions

On charge un même condensateur sous plusieurs tensions u_C. Pour chaque tension, un coulombmètre mesure la charge q de l'armature A :

u_C (V)	q (μC)
$1{,}0$	$0{,}47$
$2{,}0$	$0{,}94$
$3{,}0$	$1{,}41$
$4{,}0$	$1{,}88$

Ces mesures sont fictives, mais réalistes.

Devine : Ce que montre le tableau de mesures

Calcule le quotient $\dfrac{q}{u_C}$ pour chaque ligne du tableau. Que constates-tu ?

A. Le quotient augmente avec la tension

Faux.
Non : $\dfrac{1{,}88}{4{,}0}$ donne la même valeur que $\dfrac{0{,}47}{1{,}0}$.

B. Le quotient diminue avec la tension

Faux.
Non : $\dfrac{0{,}94}{2{,}0}$ donne la même valeur que $\dfrac{0{,}47}{1{,}0}$.

C. Le quotient garde la même valeur

Juste.
Oui : il vaut $0{,}47\,\mu\mathrm{C}$ par volt à chaque ligne. La charge est proportionnelle à la tension.

Indice 1

Divise la charge par la tension, ligne par ligne.

Correction

Le quotient vaut $0{,}47\,\mu\mathrm{C}$ par volt à chaque ligne : q est proportionnelle à u_C. Ce coefficient est propre au condensateur : c'est sa capacité.

La capacité et ses unités

Propriété : Relation entre charge et tension : capacité

La charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension entre ses bornes, en convention récepteur :

$$q = C\,u_C$$

Le coefficient $C > 0$ est la **capacité** du condensateur. Elle s'exprime en farads (F), le plus souvent en sous-multiples :

- $1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$;

- $1\,\mathrm{nF} = 10^{-9}\,\mathrm{F}$;
- $1\,\mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}$.

Exemple : la charge du condensateur de référence

Ce cours suit un montage de référence. Il associe un condensateur de capacité $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$, un résistor de résistance $R = 2{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et un générateur de tension $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$.

Chargé sous $u_C = 6{,}0\,\mathrm{V}$, le condensateur porte :

$$\begin{aligned} q &= C\,u_C \\ &= 1{,}0 \times 10^{-6} \times 6{,}0 \\ &= 6{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Le farad est une très grande unité. Les condensateurs courants vont du picofarad au millifarad. Pour convertir, remplace le préfixe par sa puissance de dix :

$$470\,\mathrm{nF} = 4{,}70 \times 10^{-7}\,\mathrm{F}$$

$$22\,\mathrm{pF} = 2{,}2 \times 10^{-11}\,\mathrm{F}$$

Vérifie : Convertir des microfarads en nanofarads

Un condensateur porte l'indication $0{,}47\,\mu\mathrm{F}$. Quelle est sa capacité en nanofarads ?

A. $47\,\mathrm{nF}$

Faux.
Non : $47\,\mathrm{nF}$ vaut $4{,}7 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}$, dix fois moins.

B. $470\,\mathrm{nF}$

Juste.
Oui : $0{,}47 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 470 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}$.

C. $4\,700\,\mathrm{nF}$

Faux.
Non : cela fait $4{,}7\,\mu\mathrm{F}$, dix fois plus.

Indice 1
$1\,\mu\mathrm{F} = 1\,000\,\mathrm{nF}$.

Correction
$0{,}47\,\mu\mathrm{F} = 0{,}47 \times 1\,000\,\mathrm{nF} = 470\,\mathrm{nF}$.

Les chiffres significatifs d'un résultat

Remarque : Chiffres significatifs d'un résultat

Une donnée écrite $1{,}0\,\mu\mathrm{F}$ a deux chiffres significatifs. Une donnée écrite $12{,}0\,\mathrm{V}$ en a trois.

Règle. Un résultat calculé garde autant de chiffres significatifs que la donnée la moins précise. L'écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$, rend ce nombre visible.

Toutes les applications numériques du chapitre suivent cette règle.

Exemple : arrondir une charge calculée

Un condensateur de capacité $C = 2{,}2\,\mu\mathrm{F}$ est chargé sous $u_C = 12{,}0\,\mathrm{V}$. La capacité a deux chiffres significatifs : le résultat en garde deux.

$$\begin{aligned} q &= C\,u_C \\ &= 2{,}2 \times 10^{-6} \times 12{,}0 \\ &= 2{,}6 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

La calculatrice affiche $2{,}64 \times 10^{-5}$: le troisième chiffre n'est pas significatif.

Intensité et variation de la tension

Pourquoi est-ce vrai ? L'intensité est le débit de charge, et la charge suit la tension. Quand u_C varie vite, la charge varie vite : l'intensité est grande. Quand u_C ne varie plus, aucune charge n'arrive : l'intensité est nulle.

Propriété : Intensité et tension aux bornes du condensateur

En convention récepteur, pour un condensateur de capacité C constante :

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

L'intensité est nulle lorsque la tension u_C ne varie plus.

Démonstration

Étape 1 (définition de l'intensité). En convention récepteur, l'intensité est le débit de charge reçu par l'armature A : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Étape 2 (relation entre charge et tension). À chaque instant, $q = C\,u_C$, et la capacité C ne dépend pas du temps.

Étape 3 (dérivation). La dérivée d'une constante fois une fonction est la constante fois la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Si u_C est constante, sa dérivée est nulle et $i = 0$.

À retenir : Pourquoi la capacité sort de la dérivée

On part de $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et l'on remplace q par $C\,u_C$. La capacité ne dépend pas du temps : elle sort de la dérivée. C'est cette constance de C qui donne la relation.

Vérifie : Intensité pour une tension qui croît régulièrement

La tension aux bornes d'un condensateur de $1{,}0\,\mu\mathrm{F}$ croît régulièrement, avec $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 5{,}0 \times 10^{2}\,\mathrm{V\cdot s^{-1}}$. Quelle est l'intensité du courant ?

A. $i = 5{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$

Juste.

Oui : $i = 1{,}0 \times 10^{-6} \times 5{,}0 \times 10^{2} = 5{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$.

B. $i = 5{,}0 \times 10^{2}\,\mathrm{A}$

Faux.

Non : la dérivée de la tension doit être multipliée par la capacité.

C. $i = 2{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{A}$

Faux.

Non : tu as divisé la capacité par la dérivée au lieu de les multiplier.

Indice 1

Applique la relation entre l'intensité et la tension aux bornes du condensateur.

Correction

$$\begin{aligned} i &= C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ &= 1{,}0 \times 10^{-6} \times 5{,}0 \times 10^{2} \\ &= 5{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

À toi : un condensateur dont la tension ne varie plus

Un condensateur de capacité $C = 3{,}3\,\mu\mathrm{F}$ est chargé sous $u_C = 9{,}0\,\mathrm{V}$. Cette tension ne varie plus.

1. Calcule la charge q du condensateur.
2. Quelle est l'intensité du courant qui entre par l'armature A ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Convertis la capacité en farads.

Indice 2

Une tension constante a une dérivée nulle.

Indice 3

Point délicat : garde deux chiffres significatifs, ceux des deux données.

Réponse

1. Charge du condensateur :

$$\begin{aligned} q &= C\,u_C \\ &= 3{,}3 \times 10^{-6} \times 9{,}0 \\ &= 3{,}0 \times 10^{-5}\ \text{C} \end{aligned}$$

2. La tension ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $i = 0$. Le condensateur garde sa charge.

Mesurer une capacité par une charge à courant constant

Le montage à courant constant

Au laboratoire, on veut mesurer la capacité d'un condensateur dont l'indication est effacée. On le charge avec un **générateur idéal de courant**. Il impose une intensité I constante, quelle que soit la tension à ses bornes.

Un interrupteur K, monté en parallèle sur le condensateur, sert à le décharger avant la mesure. Un voltmètre mesure u_C.

Devine : L'allure de la courbe à courant constant

L'interrupteur est ouvert à $t = 0$, le condensateur étant déchargé. Quelle allure prévois-tu pour la courbe de u_C en fonction du temps ?

A. Une courbe qui monte puis se stabilise

Faux.

Non : avec une intensité constante, la charge augmente sans cesse, au même rythme.

B. Une droite qui passe par l'origine

Juste.

Oui : $q = I\,t$ est proportionnelle au temps, et $u_C = \dfrac{q}{C}$ aussi.

C. Une droite horizontale, à tension fixe

Faux.

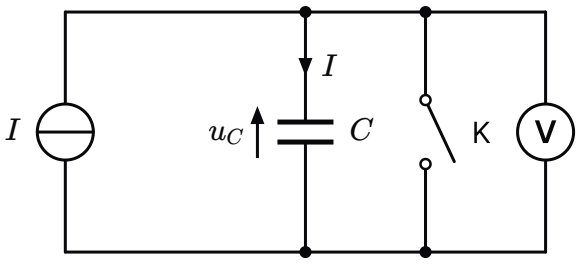
Non : la charge augmente, donc la tension aussi.

Indice 1

Pendant une durée t, la charge reçue vaut $q = I\,t$.

Correction

La charge reçue vaut $q = I\,t$, proportionnelle au temps. La tension vaut $u_C = \dfrac{I}{C}\,t$: la courbe est une droite qui passe par l'origine, de coefficient directeur $\dfrac{I}{C}$.



Charge à courant constant : générateur idéal de courant, condensateur, interrupteur de décharge et voltmètre.

Protocole et mesures

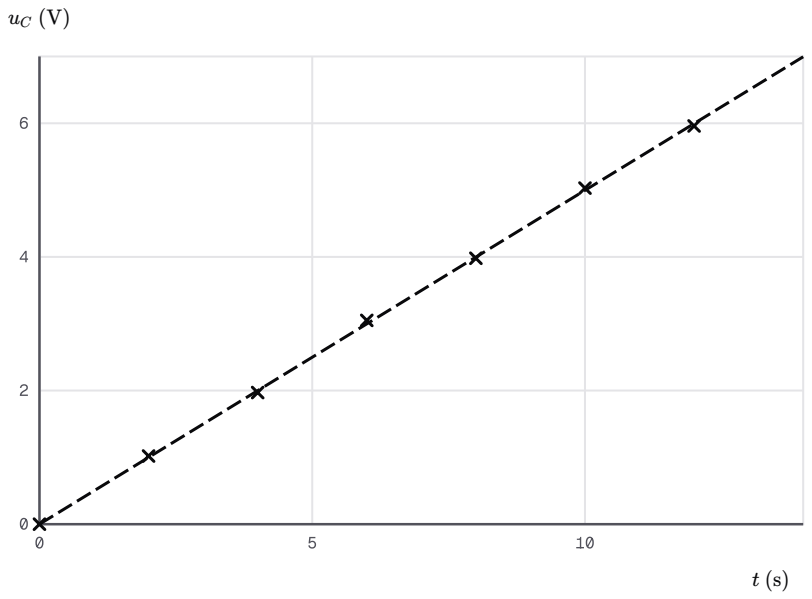
Protocole.

1. Fermer K pour décharger le condensateur, puis régler le générateur sur $I = 5{,}0\,\mu\text{A}$.
2. Ouvrir K et déclencher le chronomètre au même instant, pris pour $t = 0$.
3. Relever u_C toutes les $2{,}0\,\text{s}$, sans dépasser la tension maximale indiquée sur le condensateur.

Un groupe obtient les mesures suivantes :

t (s)	u_C (V)
0	$0{,}00$
$2{,}0$	$1{,}02$
$4{,}0$	$1{,}97$
$6{,}0$	$3{,}05$
$8{,}0$	$3{,}98$
$10{,}0$	$5{,}03$
$12{,}0$	$5{,}96$

Sur la figure, chaque mesure est une croix. La droite tracée passe au plus près de toutes les croix.



Charge à courant constant : mesures de u_C en fonction du temps et droite de modélisation passant par l'origine.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 7 points : y = a x, avec a ≈ 0,4997.

Exploiter la droite de modélisation

Vérifie : Le coefficient directeur de la droite

La droite de modélisation passe par l'origine et par le point $(12{,}0\,\text{s};\,6{,}0\,\text{V})$. Quel est son coefficient directeur k ?

A. $k = 2{,}0\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

Faux.

Non : c'est le quotient inversé, $\dfrac{12{,}0}{6{,}0}$.

B. $k = 6{,}0\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

Faux.

Non : $6{,}0\,\text{V}$ est une ordonnée, pas un coefficient directeur.

C. $k = 0{,}50\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

Juste.

Oui : $k = \dfrac{6{,}0}{12{,}0} = 0{,}50\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$.

Indice 1

Le coefficient directeur est le quotient de l'ordonnée par l'abscisse d'un point de la droite.

Correction

$k = \dfrac{6{,}0\,\text{V}}{12{,}0\,\text{s}} = 0{,}50\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$. La droite de la figure, calculée sur toutes les mesures, a un coefficient très voisin.

Méthode : Déterminer une capacité par une charge à courant constant

1. **Exprimer la charge.** Le condensateur est déchargé à $t = 0$ et l'intensité I est constante : $q = I\,t$.
2. **Exprimer la tension.** $u_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{I}{C}\,t$: la courbe de $u_C(t)$ est une droite qui passe par l'origine.
3. **Lire la pente.** Trace la droite de modélisation et lis son coefficient directeur k, en $\mathrm{V \cdot s^{-1}}$.
4. **Calculer.** $C = \dfrac{I}{k}$, avec I en ampères. Arrondis selon les chiffres significatifs des données.

Exemple : la capacité tirée de la pente

Avec $I = 5{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{A}$ et $k = 0{,}50\,\mathrm{V \cdot s^{-1}}$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{I}{k} \\ &= \frac{5{,}0 \times 10^{-6}}{0{,}50} \\ &= 1{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Le condensateur a une capacité de $10\,\mu\mathrm{F}$.

Le calcul à partir d'une seule mesure

Exemple : la capacité tirée d'une seule mesure

À $t = 10{,}0\,\mathrm{s}$, le condensateur a reçu la charge :

$$\begin{aligned} q &= I\,t \\ &= 5{,}0 \times 10^{-6} \times 10{,}0 \\ &= 5{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

La tension mesurée vaut alors $5{,}03\,\mathrm{V}$, d'où :

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{u_C} \\ &= \frac{5{,}0 \times 10^{-5}}{5{,}03} \\ &= 9{,}9 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Remarque : Pourquoi préférer la droite à un seul point

Une mesure isolée porte son erreur de lecture. La droite de modélisation passe au plus près de tous les points : elle compense une partie de ces erreurs. Ici, les deux résultats restent très proches.

À toi : durée de charge à courant constant

Le même condensateur, de capacité $C = 1{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{F}$, est déchargé puis chargé sous $I = 5{,}0\,\mu\mathrm{A}$.

Au bout de combien de temps la tension atteint-elle $u_C = 3{,}0\,\mathrm{V}$?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord la charge qui correspond à $u_C = 3{,}0\,\mathrm{V}$.
Indice 2
La charge reçue vaut $q = I\,t$.
Indice 3
Point délicat : convertis $5{,}0\,\mu\mathrm{A}$ en ampères avant de diviser.

Réponse
La charge à atteindre vaut :

$$\begin{aligned} q &= C\,u_C \\ &= 1{,}0 \times 10^{-5} \times 3{,}0 \\ &= 3{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Avec $q = I\,t$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{q}{I} \\ &= \frac{3{,}0 \times 10^{-5}}{5{,}0 \times 10^{-6}} \\ &= 6{,}0\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

C'est cohérent avec le tableau : $u_C = 3{,}05\,\mathrm{V}$ à $t = 6{,}0\,\mathrm{s}$.

Associer des condensateurs en parallèle et en série

Deux condensateurs en parallèle

Deux condensateurs sont **en parallèle** lorsqu'ils sont branchés entre les deux mêmes points M et N. Ils ont donc la même tension u. Chacun porte la charge que lui donne sa capacité.

Devine : Deux condensateurs identiques côte à côte

Deux condensateurs de $1{,}0\,\mu\mathrm{F}$ sont montés en parallèle et chargés sous la même tension. À quel condensateur unique l'ensemble équivaut-il ?

A. Un condensateur de $0{,}50\,\mu\mathrm{F}$
Faux.
Non : c'est le résultat d'un montage en série de deux condensateurs identiques.

B. Un condensateur de $1{,}0\,\mu\mathrm{F}$
Faux.

Non : l'ensemble porte deux fois plus de charge qu'un seul condensateur, sous la même tension.

C. Un condensateur de $2{,}0\ \mu\mathrm{F}$

Juste.

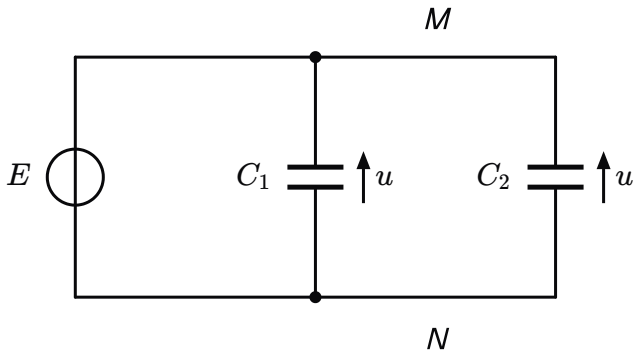
Oui : sous la même tension, l'ensemble porte deux fois la charge d'un condensateur.

Indice 1

Compare la charge totale de l'ensemble à celle d'un seul condensateur.

Correction

Sous la tension u, chaque condensateur porte $1{,}0 \times 10^{-6}\,u$. L'ensemble porte $2{,}0 \times 10^{-6}\,u$: il se comporte comme un condensateur de $2{,}0\ \mu\mathrm{F}$.



Deux condensateurs associés en parallèle entre les points M et N, alimentés par un générateur.

Un coulombmètre mesure les charges sous une même tension $u = 5{,}0\ \mathrm{V}$, avec $C_1 = 1{,}0\ \mu\mathrm{F}$ et $C_2 = 2{,}2\ \mu\mathrm{F}$:

Montage	q (μC)
C_1 seul	$5{,}0$
C_2 seul	11
C_1 et C_2 en parallèle	16

La charge de l'ensemble est la somme des deux charges.

Capacité équivalente en parallèle

Propriété : Condensateurs associés en parallèle

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 montés en parallèle se comportent comme un condensateur unique de capacité

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

La capacité équivalente est supérieure à chacune des deux capacités.

Démonstration

Étape 1 (même tension). Les deux condensateurs sont branchés entre les deux mêmes points : ils ont la même tension u.

Étape 2 (charges). D'après la relation entre charge et tension, $q_1 = C_1\,u$ et $q_2 = C_2\,u$.

Étape 3 (charge totale). Les armatures reliées au même point portent ensemble la charge $q = q_1 + q_2$: c'est la charge que reçoit le dipôle équivalent. Donc

$$q = (C_1 + C_2)\,u$$

Le montage se comporte comme un condensateur de capacité $C_1 + C_2$, supérieure à C_1 et à C_2.

À retenir : Pourquoi les capacités s'additionnent en parallèle

Les deux condensateurs ont la même tension u. Leurs charges $C_1\,u$ et $C_2\,u$ s'additionnent sur les armatures reliées. La charge totale vaut donc $(C_1 + C_2)\,u$: c'est celle d'un condensateur unique de capacité $C_1 + C_2$.

Exemple : deux capacités qui s'additionnent

Avec $C_1 = 1{,}0\,\mu\text{F}$ et $C_2 = 2{,}2\,\mu\text{F}$ en parallèle :

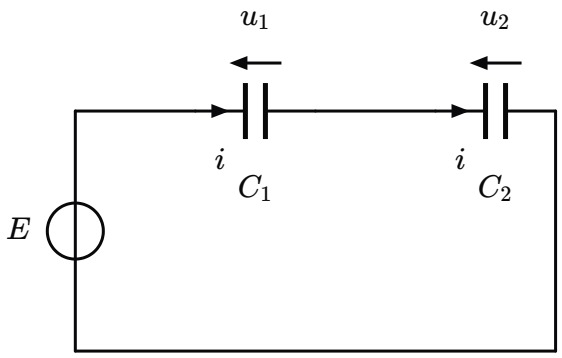
$$\begin{aligned} C_{\text{eq}} &= C_1 + C_2 \\ &= 1{,}0 + 2{,}2 \\ &= 3{,}2\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

La capacité équivalente dépasse chacune des deux.

Deux condensateurs en série

Deux condensateurs sont **en série** lorsqu'ils se suivent sur une même branche, sans autre fil entre eux. Le même courant les traverse. Leurs tensions u_1 et u_2 s'ajoutent pour donner la tension de l'ensemble.

Sous $E = 6{,}0\,\text{V}$, avec les deux mêmes condensateurs, un voltmètre donne $u_1 = 4{,}1\,\text{V}$ et $u_2 = 1{,}9\,\text{V}$. Le plus petit condensateur prend la plus grande tension. Les charges $C_1\,u_1$ et $C_2\,u_2$ valent toutes deux environ $4\,\mu\text{C}$.



Deux condensateurs associés en série, avec les tensions u_1 et u_2 fléchées.

Propriété : Condensateurs associés en série

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2, initialement déchargés et montés en série, se comportent comme un condensateur unique de capacité C_{eq} telle que

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

La capacité équivalente est inférieure à chacune des deux capacités.

Démonstration

Étape 1 (même charge). En série, le même courant d'intensité i traverse les deux condensateurs : $\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = i$. La différence $q_1 - q_2$ a une dérivée nulle : elle est constante. Elle est nulle au départ, car les condensateurs sont déchargés ; donc $q_1 = q_2 = q$ à chaque instant.

Étape 2 (loi d'additivité des tensions). La tension aux bornes de l'association est $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 = \frac{q}{C_1}$ et $u_2 = \frac{q}{C_2}$.

Étape 3 (capacité équivalente). On obtient

$$u = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

C'est la relation $u = \frac{q}{C_{\text{eq}}}$ d'un condensateur unique. Comme $\frac{1}{C_{\text{eq}}} > \frac{1}{C_1}$, on a $C_{\text{eq}} < C_1$, et de même $C_{\text{eq}} < C_2$.

À retenir : Pourquoi les inverses s'additionnent en série

Le même courant traverse les deux condensateurs, déchargés au départ : ils portent la même charge q. La loi d'additivité des tensions donne $u = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$. Ce sont donc les inverses des capacités qui s'additionnent.

Exemple : deux capacités en série

Pour deux condensateurs, la relation donne $C_{\text{eq}} = \dfrac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2}$. Avec $C_1 = 1{,}0\,\mu\text{F}$ et $C_2 = 2{,}2\,\mu\text{F}$ en série :

$$\begin{aligned} C_{\text{eq}} &= \frac{1{,}0 \times 2{,}2}{1{,}0 + 2{,}2} \\ &= 0{,}69\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

La capacité équivalente est plus petite que chacune des deux.

Choisir un montage

Méthode : Calculer une capacité équivalente

1. **Reconnaître le montage.** En parallèle, les condensateurs sont branchés entre les mêmes points. En série, ils se suivent sur la même branche.
2. **Choisir la relation.** En parallèle, additionne les capacités. En série, additionne leurs inverses.
3. **Calculer** avec toutes les capacités dans la même unité.
4. **Contrôler.** En parallèle, C_{eq} dépasse chaque capacité. En série, elle est plus petite que chacune.

Attention : Ne transpose pas la règle des résistors

Pour les résistors, ce sont les résistances en **série** qui s'additionnent. Pour les condensateurs, c'est le contraire : les capacités s'additionnent en **parallèle**.

✗ « En série, $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$. »

✓ En série, $\dfrac{1}{C_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$.

Intérêt de chaque montage. Le montage en parallèle donne une capacité plus grande : il emmagasine plus de charge sous la même tension. Le montage en série donne une capacité plus petite. Mais la tension se partage entre les condensateurs : chacun supporte une tension plus faible que celle du générateur.

À toi : obtenir une capacité donnée

Tu disposes d'un condensateur de $4{,}7\,\mu\text{F}$ et d'un condensateur de $2{,}2\,\mu\text{F}$. Quelles capacités peux-tu obtenir en les associant ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Deux montages sont possibles : en parallèle et en série.

Indice 2

En parallèle, les capacités s'additionnent.

Indice 3

Point délicat : en série, le résultat est plus petit que la plus petite des deux capacités.

Réponse

En parallèle :

$$\begin{aligned} C_{\text{eq}} &= 4{,}7 + 2{,}2 \\ &= 6{,}9\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

En série :

$$\begin{aligned} C_{\text{eq}} &= \frac{4{,}7 \times 2{,}2}{4{,}7 + 2{,}2} \\ &= 1{,}5\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

Le montage en série donne bien moins que $2{,}2\,\mu\text{F}$.

Équation différentielle de la charge

Soumettre le dipôle RC à un échelon de tension

On relie le dipôle RC de référence à un générateur de tension $E = 6{,}0\,\text{V}$ par un interrupteur à deux positions.

En position 1, la tension aux bornes du dipôle passe, à $t = 0$, de 0 à E : il reçoit un **échelon de tension**. Le condensateur, déchargé au départ, se charge.

En position 2, le générateur est retiré du circuit : le condensateur se décharge dans le résistor.

Devine : La tension du résistor juste après la fermeture

Le condensateur est déchargé. Juste après le passage en position 1, que vaut la tension u_R aux bornes du résistor ?

A. $u_R = E$, car u_C vaut encore 0

Juste.

Oui : la tension du condensateur n'a pas eu le temps de varier. Toute la tension E se retrouve aux bornes du résistor.

B. $u_R = 0$, car le courant n'a pas démarré

Faux.

Non : le courant démarre dès la fermeture. C'est la tension du condensateur qui part de 0.

C. $u_R = \dfrac{E}{2}$, partagée avec u_C

Faux.

Non : au départ, le condensateur n'a encore aucune charge, donc aucune tension.

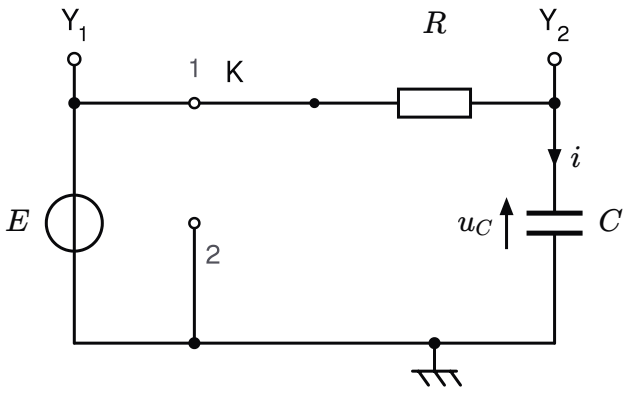
Indice 1

Le condensateur est déchargé : que vaut u_C juste après la fermeture ?

Correction

Juste après la fermeture, $u_C = 0$: le condensateur n'a encore reçu aucune charge. La loi d'additivité des tensions donne $u_R + u_C = E$, donc $u_R = E$. Le courant démarre aussitôt, avec $i = \dfrac{E}{R}$.

On s'appuie ici sur une propriété admise pour l'instant : la tension u_C ne saute pas au basculement. C'est la **continuité de la tension aux bornes du condensateur**, établie plus loin, dans la section « Intensité du courant et décharge du condensateur ».



Montage d'étude de la charge et de la décharge : interrupteur à deux positions et entrées d'oscilloscope.

Établir l'équation de la charge

Pourquoi est-ce vrai ? L'équation de la charge combine trois relations déjà connues : la loi d'additivité des tensions, la loi d'Ohm et la relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Toutes s'écrivent en convention récepteur, avec i orienté vers l'armature A.

Vérifie : La loi d'additivité des tensions pendant la charge

En position 1, pour $t \geq 0$, quelle relation relie les tensions du circuit ?

A. $u_R - u_C = E$

Faux.

Non : les deux dipôles sont en série et fléchés dans le même sens. Leurs tensions s'ajoutent.

B. $u_R + u_C = E$

Juste.

Oui : la tension E du générateur égale la somme des tensions du résistor et du condensateur.

C. $u_R + u_C = 0$

Faux.
Non : c'est la relation de la décharge, quand le générateur est retiré.

Indice 1
Parcours la maille : le générateur d'un côté, le résistor et le condensateur de l'autre.

Correction
La loi d'additivité des tensions donne $u_R + u_C = E$ pour $t \geq 0$. En décharge, sans générateur, elle devient $u_R + u_C = 0$.

Propriété : Équation différentielle de la charge d'un dipôle RC

Un dipôle RC série (résistor de résistance R, condensateur de capacité C) est soumis, à partir de $t = 0$, à un **échelon de tension** : la tension à ses bornes passe de 0 à la valeur constante E.

En convention récepteur, pour $t \geq 0$, la tension u_C vérifie l'équation différentielle

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

et la charge vérifie $R\,\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{C} = E$.

Démonstration

Étape 1 (orientation). On oriente le courant d'intensité i vers l'armature A ; les tensions u_R et u_C sont fléchées en convention récepteur.

Étape 2 (loi d'additivité des tensions). Pour $t \geq 0$, la tension aux bornes du dipôle RC vaut E :

$$u_R + u_C = E$$

Étape 3 (loi d'Ohm). Pour le résistor, $u_R = R\,i$.

Étape 4 (relation du condensateur). D'après la relation entre intensité et tension aux bornes du condensateur, $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

Étape 5 (équation). En remplaçant u_R par $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on obtient l'équation annoncée. Avec $u_C = \dfrac{q}{C}$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, la même loi donne l'équation en q.

À retenir : Trois lois réunies en une seule équation

On écrit la loi d'additivité des tensions, $u_R + u_C = E$. On remplace u_R par $R\,i$ grâce à la loi d'Ohm, puis i par $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Il ne reste qu'une inconnue : la fonction u_C.

Exemple : l'équation du montage de référence

Avec $R = 2{,}0 \times 10^{3}\,\Omega$ et $C = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$:

$$\begin{aligned} RC &= 2{,}0 \times 10^{3} \times 1{,}0 \times 10^{-6} \\ &= 2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

L'équation de la charge s'écrit donc, pour $t \geq 0$:

$$2{,}0 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 6{,}0$$

avec u_C en volts et t en secondes.

La méthode et l'équation vérifiée par la charge

Méthode : Établir l'équation différentielle d'un circuit RC

1. **Orienter.** Choisis le sens de i, vers l'armature A, et flèche u_R et u_C en convention récepteur.
2. **Additionner les tensions.** Écris $u_R + u_C = E$ en charge, ou $u_R + u_C = 0$ en décharge.
3. **Remplacer.** Écris $u_R = R\,i$, puis $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
4. **Mettre en forme.** Range l'équation pour que $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ soit égal à une constante.
5. **Équation en q.** Remplace plutôt i par $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et u_C par $\dfrac{q}{C}$.

Exemple : l'équation vérifiée par la charge

Pour le montage de référence, la même loi donne, pour $t \geq 0$:

$$R\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E$$

Au tout début de la charge, $q = 0$. L'équation donne alors $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{R}$, soit :

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{R} \\ &= \frac{6{,}0}{2{,}0 \times 10^{3}} \\ &= 3{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

À toi : l'équation avec un autre résistor

Dans le montage de référence, le résistor est remplacé par un résistor de $4{,}7\,\mathrm{k}\Omega$. Le condensateur reste le même.

1. Écris l'équation différentielle vérifiée par u_C pendant la charge.
2. Calcule le coefficient de $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La forme de l'équation ne dépend pas des valeurs de R et de C.
Indice 2
Le coefficient de la dérivée est le produit RC.
Indice 3
Point délicat : convertis les kiloohms en ohms et les microfarads en farads.

Réponse

1. Pour $t \geq 0$: $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$, avec $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$.
2. Le coefficient vaut :

$$\begin{aligned} RC &= 4{,}7 \times 10^{3} \\ &\quad \times 1{,}0 \times 10^{-6} \\ &= 4{,}7 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Solution de l'équation : tension et charge

La fonction exponentielle, outil admis

Devine : Le rythme de la charge

L'équation de la charge s'écrit aussi $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E - u_C$. Comment évolue la dérivée de u_C à mesure que u_C se rapproche de E ?

A. Elle reste la même pendant toute la charge

Faux.
Non : elle est proportionnelle à $E - u_C$, qui diminue.

B. Elle augmente quand u_C approche E

Faux.
Non : l'écart $E - u_C$ diminue, donc la dérivée aussi.

C. Elle diminue et tend vers zéro

Juste.
Oui : la dérivée est proportionnelle à l'écart $E - u_C$, qui tend vers 0.

Indice 1
Isole la dérivée dans l'équation.

Correction
La dérivée vaut $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E - u_C}{RC}$. Elle est grande au départ, quand $u_C = 0$. Elle diminue à mesure que u_C approche E : la courbe monte vite, puis de plus en plus lentement.

Il faut donc une fonction dont la dérivée est proportionnelle à elle-même. La fonction exponentielle a cette propriété. Ici, c'est un **outil de mathématiques admis** : le chapitre n'utilise que les propriétés suivantes.

Propriété : Outil de mathématiques admis : la fonction exponentielle

La fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$, est **admise** dans ce chapitre avec les propriétés suivantes.

- Pour tout réel x, $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $e^{a+b} = e^a\, e^b$.
- Pour une constante k, la fonction $t \mapsto e^{kt}$ a pour dérivée $t \mapsto k\, e^{kt}$.
- e^{-x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- Pour $y > 0$, l'équation $e^x = y$ a une seule solution, notée $\ln y$.
- Valeurs utiles : $e^{-1} \approx 0{,}37$ et $e^{-5} \approx 0{,}0067$.

Exemple : deux calculs avec l'outil admis

Avec $k = -\dfrac{1}{\tau}$, la dérivée de $t \mapsto e^{-t/\tau}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}$.

Avec la valeur utile $e^{-1} \approx 0{,}37$:

$$1 - e^{-1} \approx 0{,}63$$

Ces deux résultats servent dans toute la suite du chapitre.

La tension pendant la charge

Pourquoi est-ce vrai ? On ne résout pas l'équation par une méthode générale. On propose une forme $u_C(t) = A\, e^{-\alpha t} + B$, puis on la substitue dans l'équation. L'égalité doit être vraie à chaque instant : cela fixe les constantes.

Propriété : Expression de la tension lors de la charge

Le condensateur étant déchargé à $t = 0$, la tension à ses bornes est, pour $t \geq 0$,

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

avec $\tau = RC$. La charge vaut $q(t) = C\,E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$; elle tend vers $C\,E$.

Démonstration

Étape 1 (forme proposée). On cherche une solution de la forme $u_C(t) = A\, e^{-\alpha t} + B$, où A, B et $\alpha > 0$ sont des constantes, A non nulle.

Étape 2 (substitution). D'après la dérivée de $t \mapsto e^{kt}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\alpha A\, e^{-\alpha t}$. L'équation différentielle de la charge devient, pour tout $t \geq 0$:

$$A\,(1 - RC\,\alpha)\,e^{-\alpha t} = E - B$$

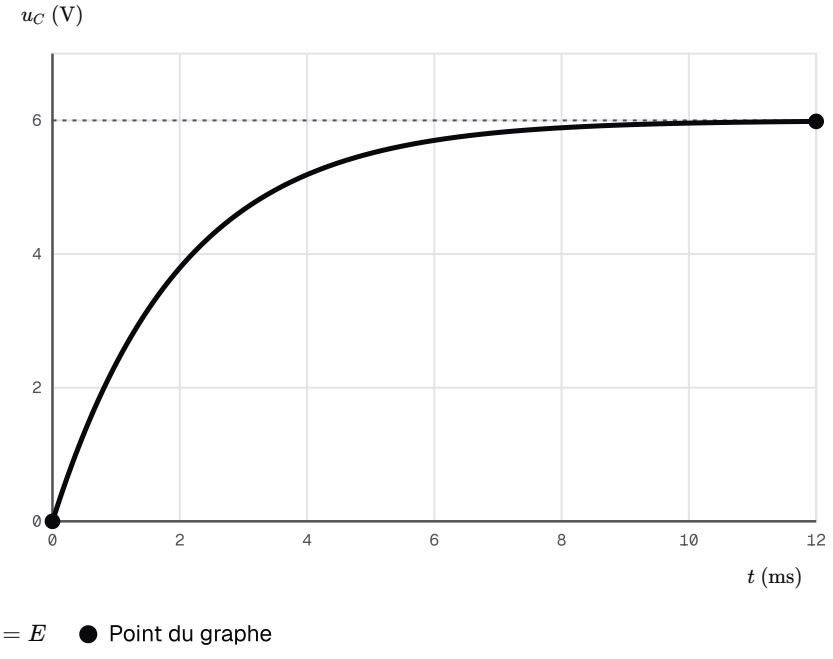
Le membre de droite est constant. Le membre de gauche varie avec t, sauf s'il est nul. Donc $1 - RC\,\alpha = 0$ et $B = E$, soit $\alpha = \dfrac{1}{RC}$.

Étape 3 (condition initiale). Le condensateur est déchargé : $u_C(0) = 0$, donc $A + E = 0$ et $A = -E$.

Étape 4 (conclusion). On obtient $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = RC$. Avec $q = C\,u_C$, on en déduit $q(t)$; comme $e^{-t/\tau}$ tend vers 0, $q(t)$ tend vers $C\,E$.

À retenir : Identifier les constantes par substitution

La substitution donne une égalité entre un terme qui varie avec t et une constante. Elle n'est vraie pour tout t que si ce terme est nul : d'où $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ et $B = E$. La condition initiale $u_C(0) = 0$ donne ensuite $A = -E$.



Charge du condensateur : la tension u_C croît et tend vers la tension E du générateur.

Vérifier une solution et calculer

Méthode : Vérifier une solution proposée et trouver ses constantes

1. **Dériver** la forme proposée, par exemple $u_C(t) = A\,e^{-t/\tau} + B$.

2. **Substituer** la fonction et sa dérivée dans l'équation différentielle.
3. **Identifier.** L'égalité doit être vraie pour tout $t \geq 0$: le terme en exponentielle et le terme constant donnent séparément τ et B.
4. **Condition initiale.** Par la continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_C(0)$ est la tension d'avant le basculement. Elle donne A.

Exemple : la tension après deux constantes de temps

Pour le montage de référence, $\tau = RC = 2{,}0\,\text{ms}$. À $t = 4{,}0\,\text{ms}$, soit 2τ :

$$\begin{aligned} u_C &= E\left(1 - e^{-2}\right) \\ &= 6{,}0 \times (1 - 0{,}135) \\ &= 5{,}2\,\text{V} \end{aligned}$$

La valeur de e^{-2} se lit à la calculatrice.

Vérifie : La charge finale du condensateur

Pour le montage de référence, vers quelle valeur tend la charge $q(t)$?

A. $3{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C}$
Faux.
Non : c'est la charge sous $3{,}0\,\text{V}$, la moitié de E.

B. $6{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C}$
Juste.
Oui : q tend vers $C\,E = 6{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C}$.

C. $6{,}0 \times 10^{-3}\,\text{C}$
Faux.
Non : la capacité est en microfarads, soit $10^{-6}\,\text{F}$.

Indice 1
Le terme $e^{-t/\tau}$ tend vers 0.

Correction
$q(t) = C\,E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ tend vers $C\,E$, car $e^{-t/\tau}$ tend vers 0. Ici :

$$\begin{aligned} C\,E &= 1{,}0 \times 10^{-6} \times 6{,}0 \\ &= 6{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C} \end{aligned}$$

À toi : un condensateur déjà un peu chargé

Le condensateur du montage de référence porte déjà une tension de $2{,}0\ \mathrm{V}$ quand l'interrupteur passe en position 1. On propose $u_C(t) = A\,e^{-t/\tau} + B$, avec $\tau = RC$.

Trouve A et B.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La substitution dans l'équation de la charge donne B, comme pour un condensateur déchargé.
Indice 2
À $t = 0$, $u_C(0) = A + B$.
Indice 3
Point délicat : par la continuité de la tension aux bornes du condensateur, la condition initiale est ici $u_C(0) = 2{,}0\ \mathrm{V}$, et non 0.

Réponse
La substitution donne $B = E = 6{,}0\ \mathrm{V}$, quelle que soit la condition initiale.

À $t = 0$, $A + B = 2{,}0$, donc :

$$\begin{aligned} A &= 2{,}0 - 6{,}0 \\ &= -4{,}0\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

Ainsi $u_C(t) = 6{,}0 - 4{,}0\,e^{-t/\tau}$, en volts.

Constante de temps et régimes transitoire et permanent

Une durée propre au dipôle RC

Dans la solution, le temps n'apparaît qu'à travers le quotient $\dfrac{t}{RC}$. Le produit RC fixe donc le rythme de la charge. Pour le montage de référence, il vaut $2{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$.

Devine : L'unité du produit RC

Une exponentielle ne s'applique qu'à un nombre sans unité. Quelle est alors l'unité du produit RC ?

A. Le volt, comme une tension
Faux.
Non : $\dfrac{t}{RC}$ serait alors en secondes par volt.

B. La seconde, comme le temps
Juste.
Oui : $\dfrac{t}{RC}$ est sans unité, donc RC s'exprime comme t, en secondes.

C. Le coulomb, comme une charge
Faux.
Non : $\dfrac{t}{RC}$ serait alors en secondes par coulomb.

Indice 1

Le quotient $\dfrac{t}{RC}$ doit être sans unité.

Correction

Le quotient $\dfrac{t}{RC}$ est sans unité : RC a donc l'unité d'un temps, la seconde. L'énoncé suivant l'établit par une équation aux dimensions.

Propriété : Constante de temps du dipôle RC

La grandeur $\tau = RC$ est la **constante de temps** du dipôle RC. Elle a la dimension d'un temps : avec R en ohms et C en farads, τ est en secondes.

Lors de la charge :

- $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63\,E$;
- la tangente à l'origine à la courbe de u_C coupe la droite $u = E$ à l'instant $t = \tau$;
- à $t = 5\tau$, $u_C \approx 0{,}99\,E$: le **régime transitoire** dure environ 5τ, puis le **régime permanent** $u_C = E$ est pratiquement atteint.

Démonstration

Étape 1 (équation aux dimensions). La loi d'Ohm donne $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$. La relation $q = C\,u$ donne $[C] = \dfrac{[Q]}{[U]}$, et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ donne $[Q] = [I]\,[T]$. Donc

$$[R\,C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

Étape 2 (valeur à τ). D'après l'expression de la tension lors de la charge, $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right)$, et $1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

Étape 3 (tangente à l'origine). On a $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau}$, qui vaut $\dfrac{E}{\tau}$ en $t = 0$. La tangente à l'origine a pour équation $u = \dfrac{E}{\tau}\,t$; elle atteint $u = E$ pour $t = \tau$.

Étape 4 (durée du régime transitoire). $u_C(5\tau) = E\left(1 - e^{-5}\right)$, et $1 - e^{-5} \approx 0{,}993$.

À retenir : Pourquoi le produit RC est une durée

Trois relations donnent les dimensions : la loi d'Ohm pour R, $q = C\,u$ pour C, et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ pour la charge. Leur produit se simplifie en un temps. Les valeurs à τ et à 5τ viennent de l'expression de u_C. La tangente vient de sa dérivée en 0, égale à $\dfrac{E}{\tau}$.

Exemple : les repères du montage de référence

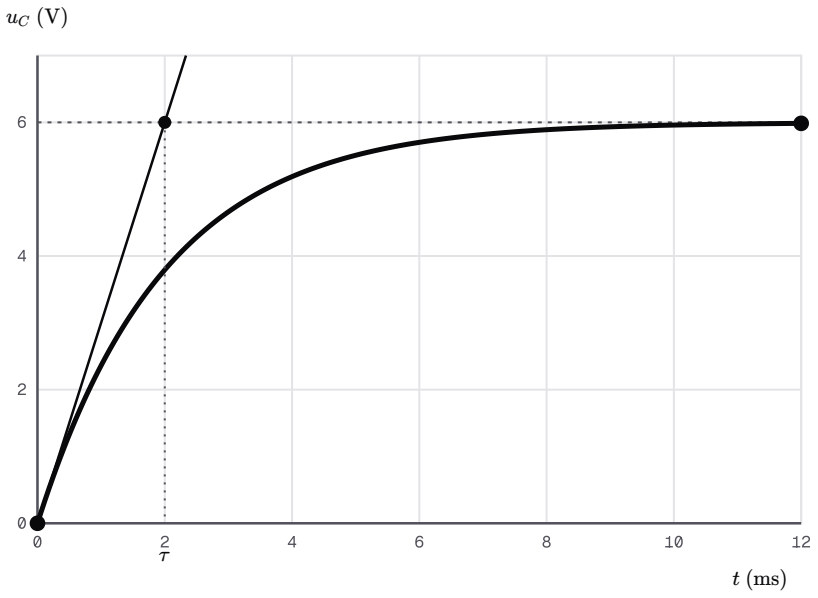
$$\begin{aligned}\tau &= RC \\ &= 2{,}0 \times 10^{3} \times 1{,}0 \times 10^{-6} \\ &= 2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{s}\end{aligned}$$

À $t = \tau = 2{,}0\,\text{ms}$:

$$\begin{aligned}u_C &\approx 0{,}63\,E \\ &\approx 0{,}63 \times 6{,}0 \\ &\approx 3{,}8\,\text{V}\end{aligned}$$

La charge est pratiquement terminée vers $5\tau = 10\,\text{ms}$.

Lire la constante de temps sur une courbe



Charge du condensateur : tangente à l'origine et lecture de la constante de temps.

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ 3 ; elle coupe la droite y = 6 en x ≈ 2.

Méthode : Déterminer graphiquement la constante de temps

1. **Tracer la tangente à l'origine** à la courbe de $u_C(t)$.
2. **Lire l'intersection.** En charge, repère l'instant où elle coupe la droite $u = E$. En décharge, repère l'instant où elle coupe l'axe des temps. Cet instant est τ.
3. **Ou lire à 63 %.** En charge, τ est l'instant où $u_C = 0{,}63\,E$. En décharge, c'est l'instant où $u_C = 0{,}37\,E$.
4. **Conclure.** Donne τ avec l'unité de l'axe des temps. Compare-la à RC si R et C sont connus.

Attention : 63 % en charge, 37 % en décharge

À l'instant τ, la tension a parcouru 63 % du chemin vers sa valeur finale. En charge, $u_C(\tau) \approx 0{,}63\,E$. En décharge, $u_C(\tau) \approx 0{,}37\,E$.

✗ « Sur une courbe de décharge, τ se lit à $0{,}63\,E$. »

✓ Sur une courbe de décharge, τ se lit à $0{,}37\,E$.

Vérifie : Lire la constante de temps à 63 %

Sur une courbe de charge, la tension se stabilise vers $6{,}0\ \text{V}$. Elle atteint $3{,}8\ \text{V}$ à $t = 2{,}0\ \text{ms}$. Quelle est la constante de temps ?

A. $\tau \approx 2{,}0\ \text{ms}$

Juste.
Oui : $3{,}8\ \text{V}$ représente environ $0{,}63\,E$.

B. $\tau \approx 10\ \text{ms}$

Faux.
Non : $10\ \text{ms}$ correspond plutôt à 5τ, la fin pratique de la charge.

C. $\tau \approx 1{,}0\ \text{ms}$

Faux.
Non : rien n'est lu à cet instant. La constante de temps se lit à $0{,}63\,E$.

Indice 1
Calcule $0{,}63\,E$ et compare-le à $3{,}8\ \text{V}$.

Correction
$0{,}63 \times 6{,}0 \approx 3{,}8\ \text{V}$: la tension atteint $0{,}63\,E$ à $t = 2{,}0\ \text{ms}$. Donc $\tau \approx 2{,}0\ \text{ms}$.

Régime transitoire et régime permanent

Pendant le **régime transitoire**, u_C et i varient. Il dure environ 5τ. Ensuite, le **régime permanent** est pratiquement atteint : $u_C = E$ et l'intensité est nulle. Le condensateur chargé se comporte alors comme un interrupteur ouvert.

Exemple : l'écart restant après cinq constantes de temps

À $t = 5\tau$, l'écart entre E et u_C vaut $E\,e^{-5}$. Pour le montage de référence :

$$\begin{aligned} E\,e^{-5} &\approx 6{,}0 \times 0{,}0067 \\ &\approx 4{,}0 \times 10^{-2}\ \text{V} \end{aligned}$$

C'est moins de 1 % de E : un voltmètre courant ne distingue plus u_C de E.

Vérifie : L'intensité en régime permanent

Le condensateur du montage de référence est en charge depuis $50\,\text{ms}$. Que vaut l'intensité du courant ?

A. $i = 3{,}0\,\text{mA}$

Faux.

Non : c'est l'intensité juste après la fermeture, quand $u_C = 0$.

B. $i = 1{,}5\,\text{mA}$

Faux.

Non : l'intensité ne s'arrête pas à la moitié de sa valeur initiale. Elle tend vers 0.

C. $i \approx 0$

Juste.

Oui : $50\,\text{ms}$ dépasse largement $5\tau = 10\,\text{ms}$. La tension ne varie plus, donc $i \approx 0$.

Indice 1

Compare la durée écoulée à 5τ.

Correction

Après $50\,\text{ms}$, soit bien plus que $5\tau = 10\,\text{ms}$, le régime permanent est atteint. La tension u_C ne varie plus, donc $i = C\,\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t} \approx 0$.

À toi : choisir un résistor pour une constante de temps

Avec le condensateur de $1{,}0\,\mu\text{F}$, on veut une constante de temps $\tau = 5{,}0\,\text{ms}$.

1. Quelle résistance faut-il ?
2. Au bout de combien de temps la charge est-elle pratiquement terminée ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole R dans $\tau = RC$.

Indice 2

Le régime transitoire dure environ 5τ.

Indice 3

Point délicat : exprime τ en secondes et C en farads avant de diviser.

Réponse

1. Résistance nécessaire :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\tau}{C} \\ &= \frac{5{,}0 \times 10^{-3}}{1{,}0 \times 10^{-6}} \\ &= 5{,}0 \times 10^{3}\,\Omega \end{aligned}$$

2. La charge est pratiquement terminée après $5\tau = 25\,\text{ms}$.

Intensité du courant et décharge du condensateur

L'intensité pendant la charge

Devine : Le moment où l'intensité est la plus grande

La courbe de u_C est la plus raide à l'origine. À quel moment de la charge l'intensité est-elle la plus grande ?

A. Juste après la fermeture

Juste.

Oui : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est maximale là où la pente de u_C est maximale, à l'origine.

B. À l'instant $t = \tau$

Faux.

Non : à cet instant, la pente de u_C a déjà diminué.

C. À la fin de la charge

Faux.

Non : en fin de charge, u_C ne varie plus et l'intensité est nulle.

Indice 1

L'intensité suit la pente de la courbe de u_C.

Correction

L'intensité vaut $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: elle est maximale quand la pente de u_C l'est, juste après la fermeture. Elle diminue ensuite et tend vers 0.

Pourquoi est-ce vrai ? L'intensité vaut $C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: elle suit la pente de la courbe de charge. Cette pente vaut $\dfrac{E}{\tau}$ à l'origine, puis elle diminue. Avant la fermeture, aucun courant ne circule.

Propriété : Intensité lors de la charge ; continuité de la tension u_C

Lors de la charge, pour $t > 0$:

$$i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$$

L'intensité passe brusquement de 0, avant $t = 0$, à $\dfrac{E}{R}$: elle est **discontinue** en $t = 0$. La tension u_C est, elle, une fonction **continue** du temps.

Démonstration

Étape 1 (expression de i). D'après la relation entre intensité et tension, $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Avec l'expression de la tension lors de la charge :

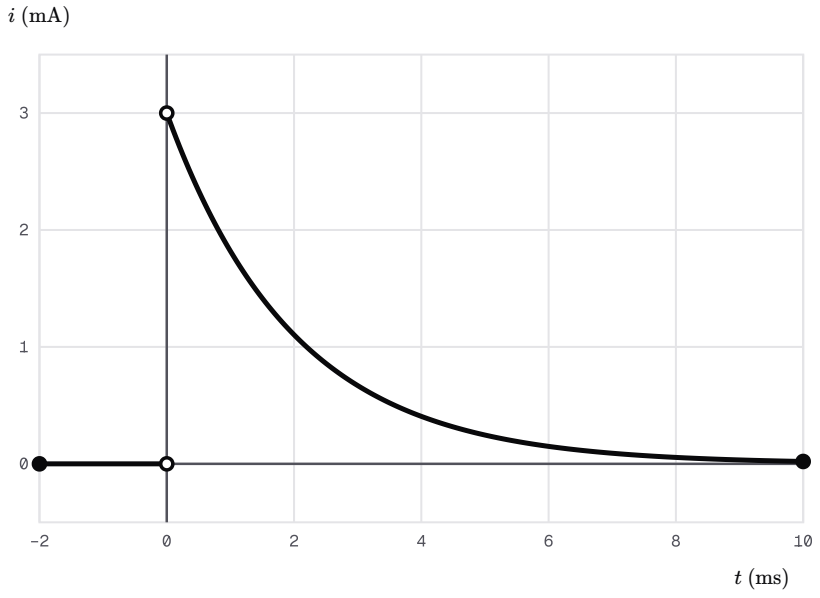
$$i(t) = C \times \frac{E}{RC}\,e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$$

Étape 2 (discontinuité de i). Avant $t = 0$, le circuit est ouvert : $i = 0$. Juste après, i est voisine de $\dfrac{E}{R}$, qui n'est pas nulle.

Étape 3 (continuité de u_C). Dans le circuit, $|i| = \dfrac{|u_R|}{R}$ et la tension u_R reste finie : l'intensité est bornée. Si u_C variait d'une quantité Δu non nulle pendant une durée Δt aussi petite qu'on veut, l'intensité moyenne $C\,\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ dépasserait toute borne. C'est impossible : u_C ne subit aucun saut.

À retenir : Intensité initiale et continuité de la tension

On dérive l'expression de u_C pendant la charge et on multiplie par C : $C \times \dfrac{E}{RC} = \dfrac{E}{R}$. La continuité de u_C vient de ce que l'intensité reste bornée : un saut de tension exigerait une intensité infinie.



$i(t)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Intensité du courant pendant la charge : nulle avant la fermeture, puis décroissante à partir de E/R.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 3.

Une tension continue, une intensité discontinue

Exemple : l'intensité initiale du montage de référence

Juste après la fermeture :

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{R} \\ &= \frac{6{,}0}{2{,}0 \times 10^{3}} \\ &= 3{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

soit $3{,}0\,\mathrm{mA}$. La tension du résistor vaut $u_R = R\,i = E\,e^{-t/\tau}$: elle décroît de $6{,}0\,\mathrm{V}$ vers 0.

Attention : La tension du condensateur ne saute pas, l'intensité si

Quand l'interrupteur bascule, la tension u_C reste celle d'avant le basculement. Seule l'intensité varie brusquement.

✗ « Juste après la fermeture, $u_C = E$. »

✓ Juste après la fermeture, $u_C = 0$ et $i = \dfrac{E}{R}$.

Vérifie : La tension juste après le passage en décharge

Le condensateur est chargé sous $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$. Juste après le passage en position 2, que vaut u_C ?

A. $u_C = 0$
Faux.
Non : le condensateur ne peut pas perdre sa charge en un instant.

B. $u_C = 3{,}0\,\mathrm{V}$
Faux.
Non : aucune charge n'a encore eu le temps de partir.

C. $u_C = 6{,}0\,\mathrm{V}$
Juste.
Oui : u_C est continue. Elle vaut encore E juste après le basculement.

Indice 1
La tension du condensateur ne fait aucun saut.

Correction
La tension u_C est continue : juste après le basculement, elle vaut encore $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$. C'est l'intensité qui change brusquement.

La décharge dans un résistor

En position 2, le générateur est retiré : le condensateur chargé est relié au résistor seul. Le courant circule alors en sens inverse, et la tension u_C décroît vers 0. L'oscilloscope permet de suivre cette décroissance.

Propriété : Décharge du condensateur dans un résistor

Un condensateur de capacité C, chargé sous la tension E, est relié à partir de $t = 0$ à un résistor de résistance R seul. En convention récepteur, pour $t \geq 0$:

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$u_C(t) = E\,e^{-t/\tau}$$

et, pour $t > 0$, $i(t) = -\dfrac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$: le courant circule dans le sens opposé au sens orienté. À $t = \tau$, $u_C = E\,e^{-1} \approx 0{,}37\,E$.

Démonstration

Étape 1 (loi d'additivité des tensions). Le générateur ne fait plus partie du circuit : $u_R + u_C = 0$.

Étape 2 (équation). Avec $u_R = R\,i$ et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on obtient $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$.

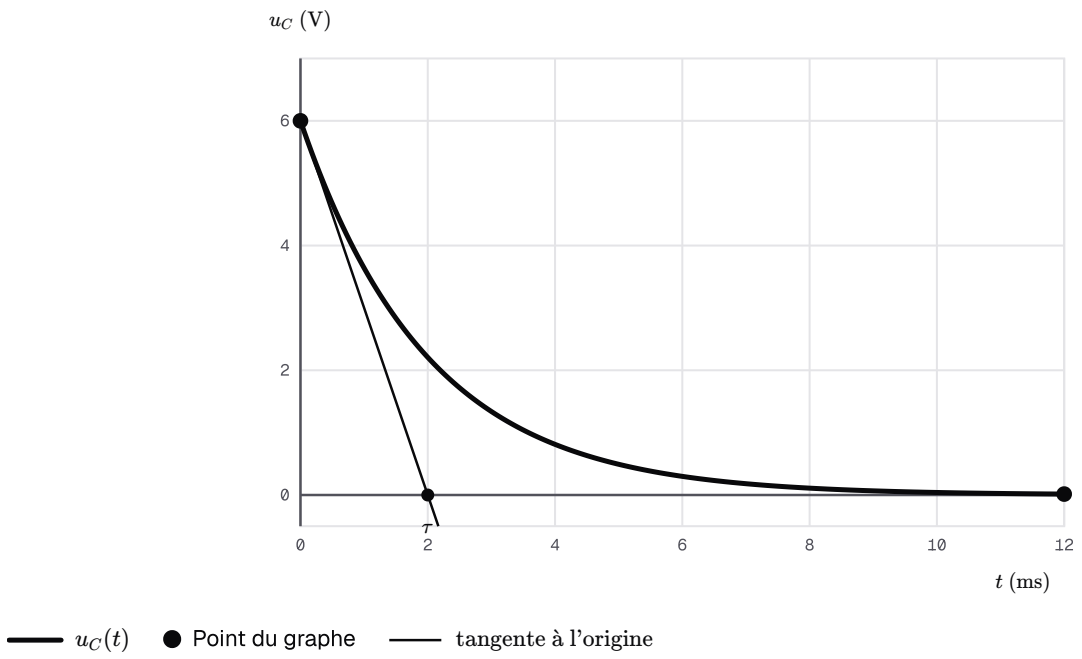
Étape 3 (substitution). Pour $u_C(t) = A\,e^{-\alpha t} + B$, la substitution donne, pour tout $t \geq 0$, $A\,(1 - RC\,\alpha)\,e^{-\alpha t} = -B$; donc $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ et $B = 0$.

Étape 4 (condition initiale). La tension u_C est continue : juste après le basculement, elle vaut encore E. Donc $A = E$ et $u_C(t) = E\,e^{-t/\tau}$.

Étape 5 (intensité). $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C \times \left(-\dfrac{E}{RC}\right) e^{-t/\tau} = -\dfrac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$, négative.

À retenir : La décharge par la même substitution

Sans générateur, la loi d'additivité des tensions donne $u_R + u_C = 0$. La même substitution fixe $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ et $B = 0$. La continuité de u_C donne $u_C(0) = E$, donc $A = E$.



Décharge du condensateur : tension u_C et tangente à l'origine qui coupe l'axe des temps.

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ −3 ; elle coupe la droite y = 0 en x ≈ 2.

Le sens du courant pendant la décharge

Exemple : la décharge du montage de référence

Juste après le basculement, le courant circule en sens opposé au sens orienté :

$$\begin{aligned} i &= -\frac{E}{R} \\ &= -3{,}0 \times 10^{-3}\ \text{A} \end{aligned}$$

À $t = \tau = 2{,}0\ \text{ms}$:

$$\begin{aligned} u_C &\approx 0{,}37\,E \\ &\approx 0{,}37 \times 6{,}0 \\ &\approx 2{,}2\ \text{V} \end{aligned}$$

Vérifie : Le signe de l'intensité pendant la décharge

Pendant la décharge, le courant reste orienté vers l'armature A. Quel est le signe de i ?

A. Négatif, car la charge q diminue

Juste.

Oui : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ est négative quand q diminue. Le courant réel sort par l'armature A.

B. Positif, car un courant circule toujours

Faux.

Non : le signe de i compare le sens réel au sens orienté. Ici, ils sont opposés.

C. Nul, car le générateur est retiré

Faux.

Non : le condensateur chargé fait circuler un courant dans le résistor.

Indice 1

Relie le signe de i au sens de variation de q.

Correction

La charge q de l'armature A diminue : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} < 0$. Le courant réel circule dans le sens opposé au sens orienté.

À toi : la décharge après deux constantes de temps

Le condensateur du montage de référence se décharge dans le résistor.

1. Calcule u_C à $t = 4{,}0\,\mathrm{ms}$.
2. Calcule l'intensité i au même instant.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

$4{,}0\,\mathrm{ms}$ vaut 2τ.

Indice 2

Utilise $u_C(t) = E\,e^{-t/\tau}$, et la calculatrice pour e^{-2}.

Indice 3

Point délicat : l'intensité de décharge est négative. Garde le signe.

Réponse

1. Tension :

$$\begin{aligned} u_C &= E\,e^{-2} \\ &= 6{,}0 \times 0{,}1353 \\ &= 0{,}81\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

2. Intensité :

$$\begin{aligned} i &= -\frac{E}{R}\,e^{-2} \\ &= -3{,}0 \times 10^{-3} \\ &\quad \times 0{,}1353 \\ &= -4{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Visualiser la réponse et l'influence de R, C et E

Brancher un oscilloscope sur le montage

Devine : Où placer la masse de l'oscilloscope

Dans le montage d'étude, où faut-il placer la masse pour visualiser à la fois E et u_C ?

A. Entre le résistor et le condensateur

Faux.

Non : la voie Y_1 ne mesurerait plus E. Reliée à la masse du générateur, elle court-circuiterait même le condensateur.

B. Au point commun au générateur et au condensateur

Juste.

Oui : les deux tensions ont alors une borne commune, la masse.

C. N'importe où, l'oscilloscope s'adapte

Faux.

Non : les deux voies partagent la même masse. Une masse mal placée fausse une mesure.

Indice 1

Les deux tensions à observer doivent avoir une borne commune.

Correction

La masse se place au point commun au générateur et au condensateur. La voie Y_1 mesure alors E, et la voie Y_2 mesure u_C.

Un oscilloscope mesure des tensions par rapport à sa **masse**. Ses deux voies ont la même masse. Pour observer E et u_C en même temps, la masse doit être le point commun au générateur et au condensateur.

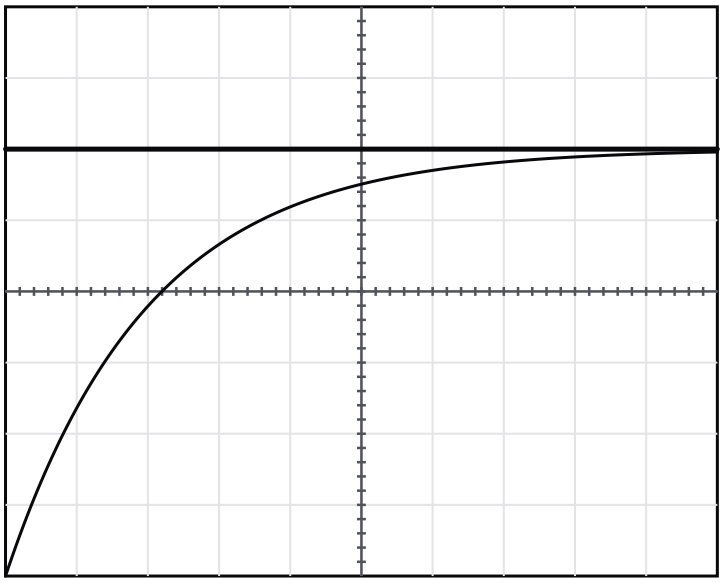
On branche alors la voie Y_1 aux bornes du générateur, et la voie Y_2 aux bornes du condensateur. Un système d'acquisition relié à un ordinateur se branche de la même façon.

Enregistrer la charge sous un échelon

Remarque : Protocole : enregistrer une charge, puis changer un paramètre

Pour étudier l'influence d'un paramètre, on n'en change qu'un à la fois.

1. Basculer K en position 2 pour décharger entièrement le condensateur.
2. Régler E, choisir R et C, puis régler les sensibilités et le balayage de l'oscilloscope.
3. Basculer K en position 1 en déclenchant l'enregistrement : cet instant est $t = 0$.
4. Relever la courbe de u_C et y lire τ.
5. Changer un seul paramètre, par exemple R, puis recommencer à l'étape 1.



Voie Y_1 : 1 V/div, zéro 4 divisions au-dessous du centre

Voie Y_2 : 1 V/div, zéro 4 divisions au-dessous du centre Balayage : 1 ms/div

Oscillogramme de la charge, enregistrement déclenché à t = 0 au bord gauche de l'écran : voie Y1, tension du générateur ; voie Y2, tension du condensateur.

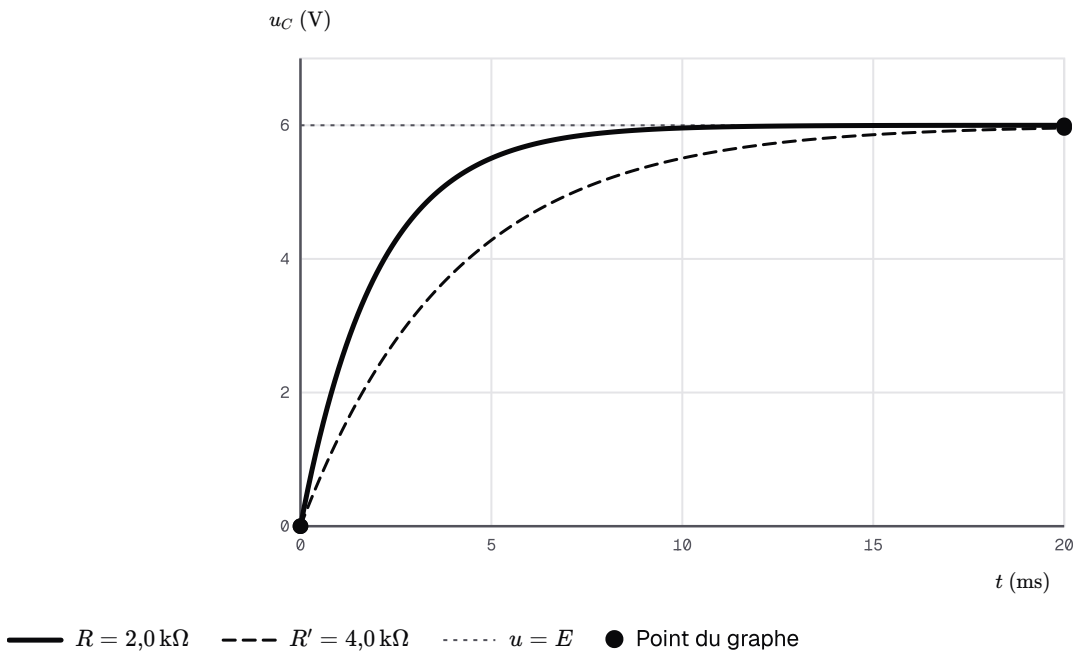
Exemple : lire l'oscillogramme

Les deux voies ont une sensibilité de $1\,\mathrm{V}$ par division, avec leur zéro en bas de l'écran. Le balayage vaut $1\,\mathrm{ms}$ par division.

La voie Y_1 est à 6 divisions : $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$. La voie Y_2 atteint $3{,}8$ divisions, soit $0{,}63\,E$, après 2 divisions horizontales. Donc $\tau \approx 2{,}0\,\mathrm{ms}$, en accord avec RC.

Influence de R et de C

La constante de temps vaut $\tau = RC$. Si l'on double R, ou si l'on double C, τ double : la charge est deux fois plus lente. La tension finale reste E, car elle ne dépend ni de R ni de C.



Influence de la résistance : deux courbes de charge, même tension E, constantes de temps différentes.

Vérifie : Reconnaître la courbe du plus grand résistor

Le condensateur est celui du montage de référence. Sur la figure, quelle courbe correspond au résistor de $4{,}0\,\mathrm{k\Omega}$?

A. La courbe en tirets, avec $\tau = 4{,}0\,\mathrm{ms}$

Juste.

Oui : $\tau = 4{,}0 \times 10^{3} \times 1{,}0 \times 10^{-6} = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$. La charge est plus lente.

B. La courbe en trait plein, avec $\tau = 4{,}0\,\mathrm{ms}$

Faux.

Non : la courbe en trait plein est la plus rapide, donc celle de la plus petite constante de temps.

C. La courbe en tirets, avec $\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}$

Faux.

Non : doubler R double τ, au lieu de la diviser par deux.

Indice 1

Plus τ est grande, plus la charge est lente.

Correction

La courbe en tirets monte le plus lentement : c'est celle de la plus grande constante de temps, $\tau = 4{,}0\,\mathrm{ms}$.

Exemple : changer de condensateur

Avec $R = 2{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et un condensateur de $2{,}2\,\mu\mathrm{F}$:

$$\begin{aligned}\tau &= RC \\ &= 2{,}0 \times 10^{3} \times 2{,}2 \times 10^{-6} \\ &= 4{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

La charge est pratiquement terminée après $5\tau \approx 22\,\mathrm{ms}$.

Influence de la tension E

Changer E ne change pas τ : la charge garde la même durée. Mais la tension finale prend la nouvelle valeur de E. L'intensité initiale $\dfrac{E}{R}$ change dans le même rapport.

Vérifie : Doubler la tension du générateur

On remplace le générateur de $6{,}0\,\mathrm{V}$ par un générateur de $12\,\mathrm{V}$. Qu'est-ce qui change ?

A. La constante de temps double, la courbe s'étire

Faux.

Non : $\tau = RC$ ne dépend pas de E.

B. La tension finale et l'intensité initiale doublent

Juste.

Oui : u_C tend vers $12\,\mathrm{V}$ et i part de $6{,}0\,\mathrm{mA}$. La constante de temps reste $2{,}0\,\mathrm{ms}$.

C. Rien ne change, la courbe reste la même

Faux.

Non : la courbe monte vers $12\,\mathrm{V}$ au lieu de $6{,}0\,\mathrm{V}$.

Indice 1

Cherche où E apparaît dans $u_C(t)$ et dans $i(t)$.

Correction

La tension finale vaut $E = 12\,\mathrm{V}$. L'intensité initiale vaut :

$$\begin{aligned}i &= \frac{E}{R} \\ &= \frac{12}{2{,}0 \times 10^{3}} \\ &= 6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

La constante de temps $\tau = RC$ ne change pas.

À toi : retrouver une capacité inconnue

Avec $R = 2{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$, un condensateur inconnu donne une courbe de charge. La tension u_C y atteint $3{,}8\,\mathrm{V}$ à $t = 9{,}4\,\mathrm{ms}$.

1. Quelle est la constante de temps ?

2. Déduis-en la capacité.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compare $3{,}8\,\mathrm{V}$ à $0{,}63\,E$.
Indice 2
Isole C dans $\tau = RC$.
Indice 3
Point délicat : τ en secondes et R en ohms donnent C en farads.

Réponse
1. $0{,}63 \times 6{,}0 \approx 3{,}8\,\mathrm{V}$: la tension atteint $0{,}63\,E$ à $t = \tau$. Donc $\tau \approx 9{,}4\,\mathrm{ms}$.

2. Capacité :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\tau}{R} \\ &= \frac{9{,}4 \times 10^{-3}}{2{,}0 \times 10^{3}} \\ &= 4{,}7 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Énergie emmagasinée dans un condensateur

Le condensateur, réserve d'énergie

Revenons à la DEL qui brille après le retrait de la pile. Pendant la charge, le générateur a fourni de l'énergie au condensateur. Le condensateur l'a gardée, puis l'a rendue à la DEL. Cette énergie dépend de sa capacité et de sa tension.

Devine : Doubler la tension de charge

On charge le même condensateur sous une tension deux fois plus grande. Par combien est multipliée l'énergie emmagasinée ?

A. Par 2, comme la tension
Faux.
Non : la charge double, et elle est aussi portée sous une tension deux fois plus grande.

B. Par 4, le carré de 2
Juste.
Oui : l'énergie est proportionnelle au carré de la tension.

C. Par 1, elle ne change pas
Faux.
Non : un condensateur plus chargé emmagasine plus d'énergie.

Indice 1
La charge et la tension doublent toutes les deux.

Correction
La charge double et la tension double : l'énergie est multipliée par $2 \times 2 = 4$. L'énoncé suivant le montre : l'énergie est proportionnelle au carré de la tension.

L'expression de l'énergie emmagasinée

Pourquoi est-ce vrai ? En convention récepteur, le condensateur reçoit la puissance $p = u_C\, i$. L'énergie emmagasinée est l'accumulation de cette puissance au cours du temps. On cherche donc une fonction de u_C dont la dérivée vaut $u_C\, i$.

Propriété : Énergie emmagasinée dans un condensateur

Un condensateur de capacité C, sous la tension u_C, emmagasine l'énergie électrique

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\, C\, u_C^2$$

en joules (J), avec C en farads et u_C en volts. Avec $q = C\, u_C$, on a aussi $\mathcal{E}_e = \dfrac{q^2}{2C}$.

Démonstration
Étape 1 (puissance reçue). En convention récepteur, le condensateur reçoit la puissance électrique $p = u_C\, i$.

Étape 2 (dérivée). Avec $i = C\, \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et la dérivée de u_C^2, égale à $2\, u_C\, \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$:

$$p = C\, u_C\, \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, C\, u_C^2\right)$$

Étape 3 (énergie). La puissance est le débit d'énergie reçue : $p = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}t}$. Les fonctions $\mathcal{E}_e$ et $\dfrac{1}{2}\, C\, u_C^2$ ont la même dérivée : leur différence est constante. Un condensateur déchargé n'emmagasine aucune énergie, et $\dfrac{1}{2}\, C\, u_C^2$ est nul quand $u_C = 0$: la constante est nulle.

À retenir : L'énergie, accumulation de la puissance reçue

Avec $i = C\, \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, la puissance $u_C\, i$ est la dérivée de $\dfrac{1}{2}\, C\, u_C^2$. Deux fonctions de même dérivée diffèrent d'une constante. Un condensateur déchargé n'a aucune énergie : la constante est nulle.

Exemple : l'énergie du montage de référence

Chargé sous $E = 6{,}0\ \mathrm{V}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \frac{1}{2}\,C\,E^2 \\ &= \frac{1}{2}\times 1{,}0\times 10^{-6}\times 6{,}0^2 \\ &= 1{,}8\times 10^{-5}\,\text{J}\end{aligned}$$

C'est peu : une DEL de quelques milliwatts consomme cette énergie en quelques millisecondes. Pour que la DEL de l'introduction brille environ une seconde, il faut une capacité de l'ordre du millifarad.

Énergie échangée et puissance moyenne

Méthode : Calculer une énergie emmagasinée ou échangée

1. **Convertir.** Exprime la capacité en farads et la tension en volts.
2. **Calculer chaque état.** Applique $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\,C\,u_C^2$ au début et à la fin de l'échange.
3. **Faire la différence.** L'énergie cédée, ou reçue, est l'écart entre les deux états.
4. **Puissance moyenne.** Divise cette énergie par la durée de l'échange.

Attention : L'énergie dépend du carré de la tension

La tension intervient au carré : doubler u_C multiplie l'énergie par quatre. Pense aussi à convertir la capacité avant le calcul.

✗ « $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\times 1{,}0\times 6{,}0^2$ » pour $1{,}0\,\mu\text{F}$.

✓ $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\times 1{,}0\times 10^{-6}\times 6{,}0^2$.

Exemple : l'énergie cédée pendant une décharge partielle

Le condensateur de référence se décharge de $6{,}0\,\text{V}$ à $2{,}0\,\text{V}$. La durée Δt vérifie $6{,}0\,e^{-\Delta t/\tau} = 2{,}0$, soit $e^{\Delta t/\tau} = 3$. Le logarithme, outil admis, donne $\frac{\Delta t}{\tau} = \ln 3$, avec $\ln 3 \approx 1{,}10$:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \tau\,\ln 3 \\ &\approx 2{,}0\times 1{,}10 \\ &\approx 2{,}2\,\text{ms}\end{aligned}$$

La décharge partielle dure donc $2{,}2\,\text{ms}$. L'énergie cédée vaut :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_e &= \frac{1}{2}\,C\left(6{,}0^2 - 2{,}0^2\right) \\ &= 1{,}6\times 10^{-5}\,\text{J}\end{aligned}$$

La puissance moyenne cédée au résistor vaut :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta t} \\ &= \frac{1{,}6 \times 10^{-5}}{2{,}2 \times 10^{-3}} \\ &= 7{,}3 \times 10^{-3}\ \text{W} \end{aligned}$$

Vérifie : L'énergie après une constante de temps

Pendant la charge, à $t = \tau$, $u_C \approx 0{,}63\,E$. Quelle fraction de l'énergie finale le condensateur a-t-il alors emmagasinée ?

A. Environ 63 % de l'énergie finale
Faux.
Non : l'énergie suit le carré de la tension, pas la tension.

B. Environ 37 % de l'énergie finale
Faux.
Non : c'est la fraction de tension qui reste à gagner.

C. Environ 40 % de l'énergie finale
Juste.
Oui : $0{,}63^2 \approx 0{,}40$.

Indice 1
L'énergie est proportionnelle à u_C^2.

Correction
Le rapport des énergies vaut $0{,}63^2 \approx 0{,}40$. Après une constante de temps, le condensateur a emmagasiné environ 40 % de son énergie finale.

Les gestes à maîtriser sur le dipôle RC

À retenir : Gestes à maîtriser : charge, décharge et énergie

- Flécher u_R et u_C en convention récepteur et signer les charges des armatures.
- Exploiter $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $q = C\,u_C$ et les sous-multiples du farad.
- Mesurer une capacité par une charge à courant constant.
- Calculer une capacité équivalente en série ou en parallèle.
- Établir l'équation différentielle et vérifier une solution proposée.
- Lire τ par la tangente à l'origine ou à 63 %, en charge comme en décharge.
- Brancher un oscilloscope et prévoir l'influence de R, de C et de E.

- Calculer une énergie emmagasinée ou échangée.

À toi : l'énergie d'un autre condensateur

Un condensateur de $4{,}7\ \mu\mathrm{F}$ est chargé sous $9{,}0\ \mathrm{V}$, puis déchargé entièrement dans un résistor.

1. Calcule l'énergie emmagasinée.
2. Quelle énergie le résistor reçoit-il pendant la décharge ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Convertis $4{,}7\ \mu\mathrm{F}$ en farads.
Indice 2
Applique $\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2}\,C\,u_C^2$.
Indice 3
Point délicat : à la fin de la décharge, $u_C = 0$. Toute l'énergie a quitté le condensateur.

Réponse
1. Énergie emmagasinée :
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \frac{1}{2} \times 4{,}7 \times 10^{-6} \\ &\quad \times 9{,}0^2 \\ &= 1{,}9 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$
2. L'énergie finale est nulle. Le résistor reçoit donc $1{,}9 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}$, qu'il cède au milieu extérieur par transfert thermique.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dipôle RC » (2bac · pc · physique-chimie)