BURHAN

Résumé : Chute verticale d'un solide

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/chute-verticale-d-un-solide/resume

Chapitre	Semestre
Chute verticale d'un solide	Semestre 2

Axe vertical et forces sur un solide qui tombe

Remarque : La deuxième loi de Newton, outil de tout le chapitre

Rappel : dans un référentiel galiléen, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$. Pour une chute verticale, prends le référentiel terrestre, supposé galiléen. Ajoute un axe vertical $(O;\vec{k})$ et écris son sens : vers le bas, sauf indication contraire.

À retenir : Trois forces au plus dans une chute verticale

- Le **poids** $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g$.
- La **poussée d'Archimède** $\vec{F}_A$, verticale vers le haut.
- La **force de frottement fluide** $\vec{f}$, opposée à la vitesse.

En chute libre, il ne reste que le poids.

Propriété : Poussée d'Archimède

Un solide immergé dans un fluide au repos de masse volumique ρ_f subit de la part du fluide une force verticale, dirigée vers le haut, appelée **poussée d'Archimède** $\vec{F}_A$. Sa valeur est égale au poids du fluide déplacé :

$$F_A = \rho_f\, V\, g,$$

où V est le volume immergé du solide. Pour un solide plein de masse volumique ρ_s totalement immergé, le rapport $\dfrac{F_A}{P}$ vaut $\dfrac{\rho_f}{\rho_s}$.

Exemple

Données. Un galet de granite a pour masse volumique $\rho_s = 2{,}7\times10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Eau : $1{,}00\times10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; air : $1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Galet dans l'eau.

$$\frac{F_A}{P} = \frac{1{,}00\times10^{3}}{2{,}7\times10^{3}} \approx 0{,}37$$

La poussée dépasse le tiers du poids.

Même galet dans l'air. Le rapport devient $\dfrac{1{,}2}{2{,}7\times10^{3}}\approx 4{,}4\times10^{-4}$: la poussée est négligeable.

Attention : Comparer les masses volumiques avant de négliger la poussée

Dans l'air, la poussée d'Archimède est en général négligeable devant le poids d'un solide compact. Dans un liquide, le rapport $\dfrac{\rho_f}{\rho_s}$ va de quelques centièmes à quelques dixièmes. Calcule-le avant de retirer $\vec{F}_A$ du bilan.

Chute libre et mouvement rectiligne uniformément varié

Définition : Chute libre verticale

Un solide est en **chute libre** lorsqu'il n'est soumis qu'à son **poids**. Si sa vitesse initiale est nulle ou verticale, le mouvement de son centre d'inertie G est rectiligne et vertical : c'est une **chute libre verticale**.

Dans l'air, la chute libre est un **modèle** : il convient lorsque la poussée d'Archimède et le frottement de l'air sont négligeables devant le poids, pour un solide dense et compact qui tombe sur une faible hauteur.

Définition : Mouvement rectiligne uniformément varié

Un point mobile est en **mouvement rectiligne uniformément varié** lorsque sa trajectoire est une droite et que son vecteur accélération est **constant** et non nul, de même direction que la trajectoire.

Sur un axe $(O;\vec{i})$ porté par la trajectoire, la coordonnée a_x de l'accélération est alors une constante. Le mouvement est **uniformément accéléré** quand $a_x\,v_x>0$ et **uniformément retardé** quand $a_x\,v_x<0$.

Propriété : Équations horaires d'un mouvement rectiligne uniformément varié

Pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération a_x constante, de vitesse initiale v_{0x} et d'abscisse initiale x_0 à l'instant $t=0$:

$$v_x(t)=a_x\,t+v_{0x},$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\,a_x\,t^2+v_{0x}\,t+x_0.$$

Entre deux instants quelconques, la vitesse et l'abscisse vérifient aussi, indépendamment du temps :

$$v_x^2-v_{0x}^2=2\,a_x\,(x-x_0).$$

Propriété : Équation différentielle et équations horaires de la chute libre verticale

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, rapporté à un axe vertical $(O;\vec{k})$ **orienté vers le bas**, le centre d'inertie G d'un solide en chute libre verticale vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g.$$

Son mouvement est rectiligne uniformément varié, d'accélération $a_z = g$ indépendante de la masse. Avec $v_z(0) = v_{0z}$ et $z(0) = z_0$:

$$v_z(t) = g\,t + v_{0z},$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0.$$

Exemple

Situation. Une noix se détache d'une branche, à $h = 4{,}9\,\mathrm{m}$ du sol, sans vitesse initiale. L'air est négligé ; l'axe est vertical, vers le bas, d'origine la branche.

Durée. La condition $\frac{1}{2}\,g\,t^2 = h$ donne :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 4{,}9}{9{,}80}}$$

$$t = 1{,}0\,\mathrm{s}$$

Vitesse au sol.

$$v_z = g\,t = 9{,}80 \times 1{,}0$$

$$v_z \approx 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Méthode : Résoudre une question de chute libre

1. **Repère** : origine des dates, origine et sens de l'axe ; $a_z = g$ vers le bas, $a_z = -g$ vers le haut.
2. **Équations** : écris $v_z(t)$ et $z(t)$ avec les valeurs initiales, signes compris.
3. **Condition** : traduis la question, par exemple $z = h$ pour l'arrivée ou $v_z = 0$ au sommet.
4. **Résolution** : tire la date, puis la vitesse. Sans la date, passe par la relation entre v_z^2 et z.

Attention : La masse ne change pas une chute libre

Deux billes de masses différentes, lâchées ensemble d'une même hauteur, touchent le sol en même temps si l'air est négligeable. La masse se simplifie dans la deuxième loi. Un objet léger qui traîne en route subit l'effet de l'air, pas celui de sa masse seule.

Attention : Le signe de g suit le sens de l'axe

Sur un axe orienté vers le haut, $a_z = -g$. Sur un axe orienté vers le bas, un lancer vers le haut donne $v_{0z} < 0$. Choisis l'axe une fois pour toutes, puis écris chaque signe avec lui.

Frottement fluide et équation du mouvement

Définition : Force de frottement fluide : deux modèles

Un solide en mouvement dans un fluide subit une **force de frottement fluide** $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse de son centre d'inertie. Pour un mouvement vertical selon $(O;\vec{k})$ avec $v_z > 0$, on retient l'un de deux modèles :

- aux faibles vitesses, $\vec{f} = -k\,v_z\,\vec{k}$, de valeur $f = k\,v$;
- aux vitesses plus grandes, $\vec{f} = -k\,v_z^2\,\vec{k}$, de valeur $f = k\,v^2$.

Le coefficient k est positif ; il dépend de la forme et de la taille du solide, et du fluide. Son unité est $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ dans le premier modèle et $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ dans le second.

À retenir : Unité du coefficient de frottement

Une équation aux dimensions fixe l'unité de k. Avec $f = k\,v$, on divise des $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ par des $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$: il reste des $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Avec $f = k\,v^2$, il reste des $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. La constante $B = \dfrac{k}{m}$ s'exprime alors en s^{-1} ou en m^{-1}.

Propriété : Équation différentielle de la chute verticale avec frottement

Un solide de masse m et de volume V tombe verticalement dans un fluide de masse volumique ρ_f, avec $m > \rho_f\,V$. Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, avec un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté vers le bas, la coordonnée v de la vitesse de son centre d'inertie vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n,$$

avec $n = 1$ ou $n = 2$ selon le modèle de frottement, et les constantes positives

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_f\,V}{m}\right), \qquad B = \frac{k}{m}.$$

Méthode : Mettre en équation une chute avec frottement

1. **Système et référentiel** : le solide, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
2. **Axe** : $(O;\vec{k})$ vertical, sens écrit, gardé jusqu'à la fin.
3. **Bilan** : $\vec{P}$, puis $\vec{F}_A$ dans un liquide, puis $\vec{f}$ opposée à la vitesse ; fais un schéma.

4. **Loi** : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$, projetée sur l'axe.
5. **Forme finale** : divise par m, isole $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, nomme A et B avec leurs unités.

Exemple

Bille d'aluminium dans une huile. $m = 5{,}4\,\mathrm{g}$, $V = 2{,}0\,\mathrm{cm}^3$, $\rho_f = 9{,}0 \times 10^2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $f = k\,v$, avec $k = 0{,}27\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.

Poussée. La masse d'huile déplacée vaut :

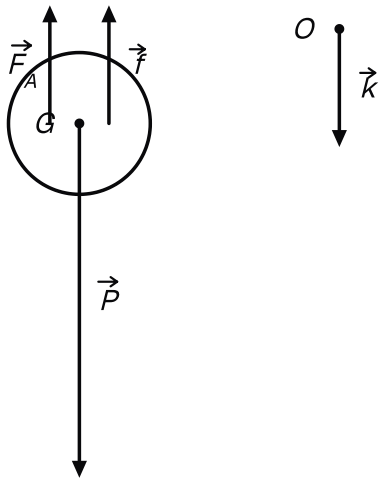
$$\rho_f\,V = 900 \times 2{,}0 \times 10^{-6}$$
$$\rho_f\,V = 1{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$

C'est le tiers de m, donc :

$$A = 9{,}80 \times \frac{2}{3}$$
$$A \approx 6{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Frottement. $B = \dfrac{k}{m} = \dfrac{0{,}27}{5{,}4 \times 10^{-3}} = 50\,\mathrm{s^{-1}}$.

Quand le frottement égale la poussée, chacune de ces deux forces vaut le tiers du poids : c'est l'instant du schéma ci-dessous.



Forces sur la bille d'aluminium quand le frottement égale la poussée

Vitesse limite, temps caractéristique et régimes

Propriété : Vitesse limite et temps caractéristique

Pour un solide lâché sans vitesse initiale, dont la vitesse vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n$:

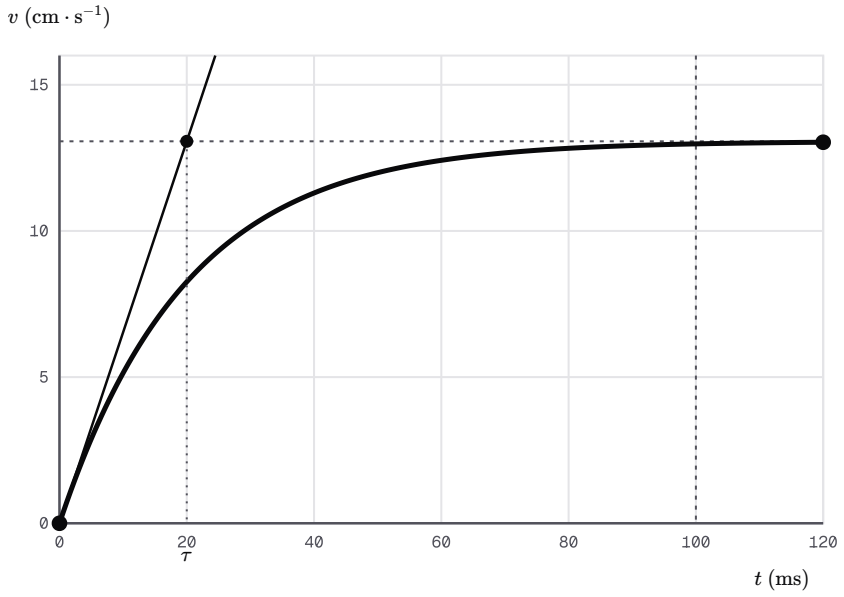
- la **vitesse limite** v_ℓ, atteinte en **régime permanent**, est la vitesse pour laquelle l'accélération s'annule :

$$v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} ;$$

- la tangente à l'origine de la courbe $v(t)$ a pour pente A et coupe l'asymptote $v = v_\ell$ à l'instant

$$\tau = \frac{v_\ell}{A},$$

appelé **temps caractéristique** ; il donne l'ordre de grandeur de la durée du **régime initial** (ou transitoire), et le régime permanent n'est atteint qu'après plusieurs τ. Dans le modèle linéaire ($n = 1$), $\tau = \dfrac{1}{B} = \dfrac{m}{k}$.



Vitesse de la bille d'aluminium au cours de sa chute dans l'huile

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ 0,653333 ; elle coupe la droite y ≈ 13,0667 en x ≈ 20.

Exemple

Pour la bille d'aluminium, $v_\ell = \dfrac{A}{B} = \dfrac{6{,}5}{50} \approx 0{,}13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\tau = \dfrac{1}{B} = 0{,}020\,\mathrm{s}$. La courbe ci-dessus est la sienne : le régime permanent s'installe en un dixième de seconde environ.

Méthode : Lire la courbe de vitesse d'une chute freinée

1. **Régimes** : d'abord le régime initial, où la vitesse croît ; puis le régime permanent, où elle ne varie plus.
2. **Vitesse limite** : ordonnée de l'asymptote horizontale.

3. **Temps caractéristique** : abscisse du point où la tangente à l'origine rencontre cette asymptote.
4. **Accélération initiale** : $a_0 = A = \dfrac{v_\ell}{\tau}$.
5. **Écriture** : chaque lecture avec $\approx$ et une unité.

Attention : Une vitesse limite indépendante du départ

La vitesse limite ne dépend que de A, B et n. Lancé vers le bas plus vite que v_ℓ, un solide ralentit : le frottement dépasse alors le poids diminué de la poussée. Son accélération est opposée à sa vitesse.

Attention : Le temps caractéristique ne clôt pas le régime initial

À $t = \tau$, dans le modèle linéaire, la vitesse ne vaut qu'environ $63\,\%$ de v_ℓ. Compte environ 5τ avant de considérer le régime permanent comme atteint.

Solution exponentielle du modèle linéaire

À retenir : L'exponentielle, outil admis

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ est un outil de mathématiques admis. Elle vaut 1 en 0 et a pour dérivée $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. La solution du modèle linéaire est donnée, puis vérifiée en la reportant dans l'équation. On ne la cherche pas par une méthode générale.

Propriété : Solution du modèle linéaire vérifiée par substitution

Dans le modèle linéaire, l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v$ avec $v(0) = 0$ admet pour solution :

$$v(t) = v_\ell \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right),$$

avec $v_\ell = \dfrac{A}{B}$ et $\tau = \dfrac{1}{B}$. À l'instant $t = \tau$, la vitesse atteint environ $63\,\%$ de v_ℓ ; à $t = 5\tau$, plus de $99\,\%$.

Méthode : Vérifier une solution proposée

1. **Dérive** la fonction proposée.
2. **Calcule** $A - B\,v$ avec cette même fonction.
3. **Compare** les deux membres pour tout t, en utilisant $B\,v_\ell = A$ et $B = \dfrac{1}{\tau}$.
4. **Contrôle** la valeur initiale $v(0) = 0$.

Exemple

Pour la bille d'aluminium, $\tau = 20\,\mathrm{ms}$ et, sans arrondi, $v_\ell \approx 0{,}1307\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. À cette date :

$$v = (1 - \mathrm{e}^{-1})\, v_\ell$$
$$v \approx 0{,}632 \times 0{,}1307$$
$$v \approx 8{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

À $t = 5\tau = 0{,}10\,\mathrm{s}$, la vitesse dépasse $99\,\%$ de v_ℓ.

Résolution approchée par la méthode d'Euler

Définition : Méthode d'Euler

La **méthode d'Euler** calcule une solution approchée de l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n$ à partir de la condition initiale $v_0 = v(0)$, avec un **pas** Δt choisi petit devant τ. Aux instants $t_i = i\,\Delta t$:

$$a_i = A - B\,v_i^n,$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t.$$

Chaque étape assimile la courbe $v(t)$ à sa tangente sur un intervalle de durée Δt : la suite (v_i) approche la solution d'autant mieux que le pas est petit.

Méthode : Construire un tableau d'Euler

1. **Données** : A, B, n, la vitesse initiale v_0 et le pas Δt.
2. **Accélération** : $a_i = A - B\,v_i^n$.
3. **Vitesse suivante** : $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.
4. **Itération** : une ligne t_i, v_i, a_i par pas.
5. **Contrôle** : compare à une mesure ou à la solution exacte, puis juge le pas.

Exemple

Bille d'aluminium : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6{,}5 - 50\,v$, pas $\Delta t = 4{,}0\,\mathrm{ms}$, $v_0 = 0$.

t_i (ms)	v_i ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	a_i ($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)
0	0	$6{,}5$
$4{,}0$	$0{,}026$	$5{,}2$
$8{,}0$	$0{,}047$	$4{,}2$

La solution exacte donne $v \approx 0{,}043\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à $8{,}0\,\mathrm{ms}$. La méthode surestime la vitesse : le pas vaut ici le cinquième de τ.

Attention : Une valeur d'Euler reste approchée

Chaque pas suit la tangente au lieu de la courbe : l'écart s'accumule. Un pas trop grand devant τ peut même faire dépasser v_ℓ. Réduis le pas pour rapprocher les valeurs calculées de la solution.

Mesures d'une chute et choix du modèle

À retenir : Mesurer une vitesse limite au laboratoire

Lâche le solide dans une éprouvette remplie du fluide. Filme la chute, ou chronomètre le passage entre deux repères éloignés. Place le premier repère assez bas pour que la vitesse soit déjà constante. La distance divisée par la durée donne v_ℓ. Répète la mesure pour estimer sa dispersion.

Méthode : Choisir entre frottement linéaire et quadratique

1. **Régime permanent** : $A - B\,v_\ell^{\,n} = 0$, d'où $k = \dfrac{m\,A}{v_\ell^{\,n}}$.
2. **Deux essais** : deux solides de même forme et de même taille, de masses différentes.
3. **Test** : calcule k avec $n = 1$, puis avec $n = 2$. Le bon modèle donne deux valeurs voisines, à l'incertitude près.
4. **Unité** : vérifie celle de k par une équation aux dimensions.

Exemple

Mesures dans l'air. Deux balles de mousse de même rayon, $1{,}7\,\mathrm{cm}$, l'une lestée : $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{g}$ et $v_{\ell 1} = 9{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $m_2 = 8{,}0\,\mathrm{g}$ et $v_{\ell 2} = 18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Poussée. Chaque balle déplace environ $2{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg}$ d'air, à peu près $1\,\%$ de m_1. On la néglige : $A = g$.

Modèle linéaire. $k = \dfrac{m\,g}{v_\ell}$ vaut $2{,}2 \times 10^{-3}$, puis $4{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$: il est rejeté.

Modèle quadratique. $k = \dfrac{m\,g}{v_\ell^{\,2}} \approx 2{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ pour les deux balles : il convient.

Gestes et formules de la chute verticale

Méthode : Quel geste pour quelle question ?

- **Durée ou vitesse d'une chute libre** : équations horaires, avec $a_z = g$ ou $a_z = -g$.
- **Hauteur atteinte sans la date** : relation entre v_z^2 et z.
- **Équation du mouvement** : système, référentiel, axe, bilan, deuxième loi projetée.
- **Vitesse limite** : accélération nulle, ou asymptote de la courbe.
- **Temps caractéristique** : tangente à l'origine, ou $\tau = \dfrac{1}{B}$ dans le modèle linéaire.

- **Valeurs approchées pas à pas** : méthode d'Euler.
- **Modèle de frottement** : le même k pour deux masses.

Vitesse en chute libre

$$v_z = g\,t + v_{0z}$$

Position en chute libre

$$z = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0$$

Relation sans la date

$$v_z^2 - v_{0z}^2 = 2\,a_z\,(z - z_0)$$

Poussée d'Archimède

$$F_A = \rho_f\,V\,g$$

Équation du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n$$

Constante A

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_f\,V}{m}\right)$$

Constante B

$$B = \frac{k}{m}$$

Vitesse limite

$$v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n}$$

Temps caractéristique

$$\tau = \frac{v_\ell}{A}$$

Modèle linéaire

$$v = v_\ell\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Méthode d'Euler

$$v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$$

> **À retenir : Rédiger une étude de chute**
>
> Commence par le système, le référentiel et l'axe orienté. Fais le bilan des forces avec un schéma. Cite la deuxième loi avant de projeter. Donne chaque lecture graphique avec ≈. Écris chaque résultat avec son unité et des chiffres significatifs adaptés aux données.