BURHAN

Chute verticale d'un solide : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/chute-verticale-d-un-solide/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Chute verticale d'un solide	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

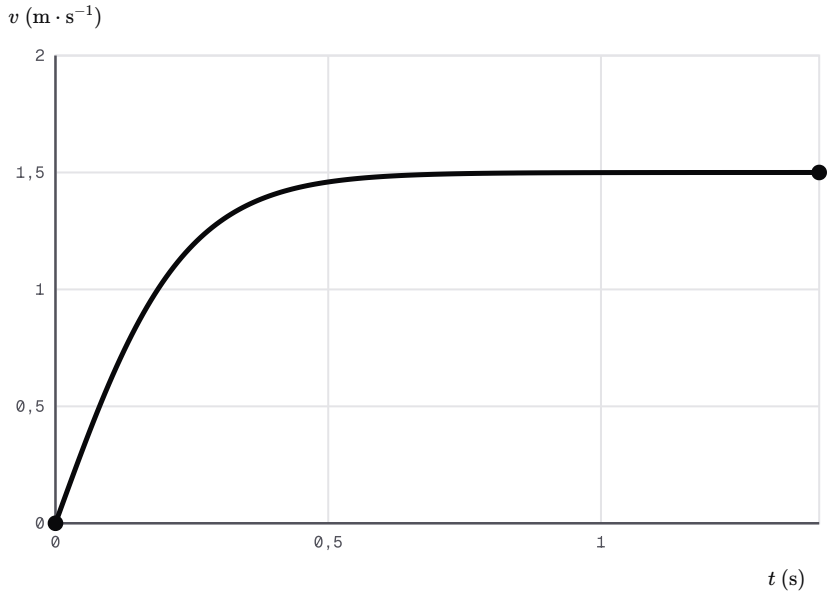
Descente d'une sonde lestée en mer : équation du mouvement et méthode d'Euler

Pour mesurer la température de l'eau en profondeur, on laisse descendre verticalement dans la mer une sonde lestée, munie d'ailettes, lâchée sans vitesse initiale juste sous la surface.

Référentiel d'étude : terrestre, supposé galiléen ; axe vertical $(O;\vec{k})$ vers le bas ; point étudié : le centre d'inertie G de la sonde.

Données. Masse de la sonde $m = 12{,}0\,\text{kg}$; volume $V = 4{,}00\times10^{-3}\,\text{m}^3$; masse volumique de l'eau de mer $\rho_f = 1{,}03\times10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. L'eau exerce sur la sonde qui descend une force de frottement $\vec{f} = -k\,v^{2}\,\vec{k}$.

Document. La vitesse v de la sonde, enregistrée par un capteur embarqué, en fonction du temps.



Document : vitesse de la sonde mesurée par son capteur

A.1. 1 pts

Partie A : mise en équation et exploitation du document.

Faire le bilan des forces exercées sur la sonde, puis montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^2$, avec $A = g\left(1 - \dfrac{\rho_f\,V}{m}\right)$ et $B = \dfrac{k}{m}$.

INDICE

Outil : trois forces, dont la poussée d'Archimède de l'eau ; projette la deuxième loi de Newton sur l'axe vers le bas.

CORRIGÉ

Système et référentiel. La sonde ; référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan. Le poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$; la poussée $\vec{F}_A = -\rho_f\,V\,g\,\vec{k}$; le frottement $\vec{f} = -k\,v^2\,\vec{k}$.

Deuxième loi. $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$; en projection, $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - \rho_f\,V\,g - k\,v^2$.

Conclusion. En divisant par m, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^2$, avec A et B comme annoncé.

A.2. 0,75 pts

Calculer la constante A.

INDICE

Outil : calcule d'abord la masse d'eau déplacée $\rho_f\,V$, puis compare-la à m.

CORRIGÉ

Masse d'eau déplacée.

$$\begin{aligned}\rho_f\,V &= 1{,}03 \times 10^{3} \\ &\quad \times 4{,}00 \times 10^{-3} \\ \rho_f\,V &= 4{,}12\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

Constante A.

$$\begin{aligned}A &= 9{,}80 \times \left(1 - \frac{4{,}12}{12{,}0}\right) \\ A &\approx 6{,}44\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

Conclusion. $A \approx 6{,}44\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: la poussée réduit d'un tiers environ l'accélération initiale.

A.3. 0,75 pts

Déterminer sur le document la vitesse limite v_ℓ et le temps caractéristique τ, en précisant la méthode employée.

INDICE

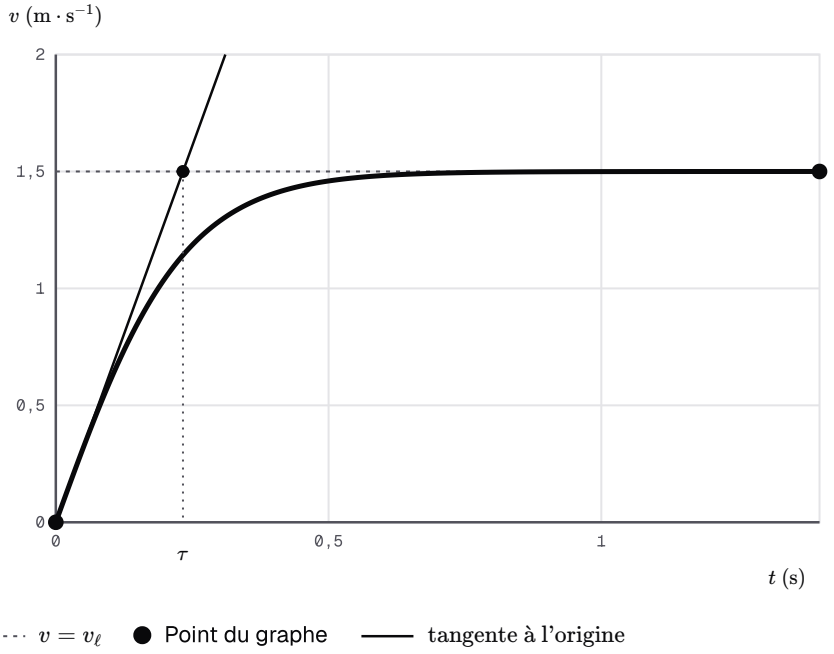
Outil : l'asymptote horizontale donne v_ℓ ; la tangente à l'origine la coupe à la date τ.

CORRIGÉ

Vitesse limite. La courbe tend vers l'horizontale $v_\ell \approx 1{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Temps caractéristique. On trace la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote au point d'abscisse $\tau \approx 0{,}23\,\mathrm{s}$ (figure ci-dessous).

Conclusion. Lectures graphiques : $v_\ell \approx 1{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\tau \approx 0{,}23\,\mathrm{s}$.



Lecture de la vitesse limite et du temps caractéristique de la sonde

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ 6,43534 ; elle coupe la droite y = 1,5 en x ≈ 0,233088.

A.4. 1 pts

Montrer que la lecture de τ est cohérente avec la valeur de A, puis en déduire B et le coefficient k.

INDICE

Début : la pente de la tangente à l'origine vaut A.

CORRIGÉ

Cohérence. La tangente à l'origine, de pente A, atteint v_ℓ à la date $\tau = \dfrac{v_\ell}{A} = \dfrac{1{,}50}{6{,}44} \approx 0{,}233\,\mathrm{s}$, en accord avec la lecture.

Constante B. En régime permanent, $A - B\,v_\ell^2 = 0$:

$$B = \frac{A}{v_\ell^2} = \frac{6{,}44}{1{,}50^2}$$
$$B \approx 2{,}86\,\mathrm{m^{-1}}$$

Coefficient.

$$k = m\,B = 12{,}0 \times 2{,}86$$
$$k \approx 34{,}3\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$$

Conclusion. $B \approx 2{,}86\,\mathrm{m^{-1}}$ et $k \approx 34{,}3\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

B.1. 0,75 pts

Partie B : solution approchée par la méthode d'Euler. On admet que la vitesse de la sonde vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6{,}44 - 2{,}86\,v^2$, en unités du système international, avec $v(0) = 0$. On prend le pas $\Delta t = 0{,}050\,\mathrm{s}$.

Montrer que la méthode d'Euler donne $v_1 \approx 0{,}322\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à la date $t_1 = 0{,}050\,\mathrm{s}$.

INDICE

Outil : $a_0 = 6{,}44 - 2{,}86\,v_0^2$, puis $v_1 = v_0 + a_0\,\Delta t$.

CORRIGÉ

Accélération initiale. Comme $v_0 = 0$, $a_0 = 6{,}44\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

$$v_1 = 0 + 6{,}44 \times 0{,}050$$
$$v_1 \approx 0{,}322\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Conclusion. Le premier pas donne $v_1 \approx 0{,}322\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

B.2. 0,75 pts

Calculer v_2 et v_3, puis présenter les résultats dans un tableau (t_i, v_i, a_i).

INDICE

Outil : à chaque ligne, $a_i = 6{,}44 - 2{,}86\,v_i^2$ et $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.

CORRIGÉ

Deuxième pas.

$$\begin{aligned} a_1 &= 6{,}44 \\ &\quad - 2{,}86 \times 0{,}322^2 \\ a_1 &\approx 6{,}14\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \\ v_2 &= 0{,}322 \\ &\quad + 6{,}14 \times 0{,}050 \\ v_2 &\approx 0{,}629\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

t_i (s)	v_i ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	a_i ($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)
0	0	$6{,}44$
$0{,}050$	$0{,}322$	$6{,}14$
$0{,}100$	$0{,}629$	$5{,}31$
$0{,}150$	$0{,}895$	$4{,}15$

Conclusion. La méthode d'Euler donne $v_2 \approx 0{,}629\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_3 \approx 0{,}895\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

B.3. 1 pts

Le capteur indique $v \approx 0{,}85\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à la date $t = 0{,}150\,\mathrm{s}$. Comparer à v_3, expliquer l'écart et proposer une modification du calcul pour le réduire.

INDICE

Début : calcule l'écart relatif. **Point délicat :** compare le pas au temps caractéristique de la chute, $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$, avec $v_\ell = \sqrt{\dfrac{6{,}44}{2{,}86}}$.

CORRIGÉ

Écart. $\dfrac{0{,}895 - 0{,}85}{0{,}85} \approx 5\,\%$: la méthode surestime la vitesse.

Explication. Chaque pas suit la tangente, plus raide que la courbe. Ici $v_\ell = \sqrt{\dfrac{6{,}44}{2{,}86}} \approx 1{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, donc :

$$\tau = \frac{v_\ell}{A} = \frac{1{,}50}{6{,}44}$$
$$\tau \approx 0{,}233\,\mathrm{s}$$

Le pas vaut environ le cinquième de τ : il n'est pas assez petit pour une bonne précision, d'où cet écart visible.

Modification. On reprend le calcul avec un pas plus petit, par exemple $\Delta t = 0{,}010\,\mathrm{s}$, à l'aide d'un tableur.

Conclusion. L'écart vient d'un pas trop grand devant τ ; un pas cinq fois plus petit rapproche les valeurs de la mesure.

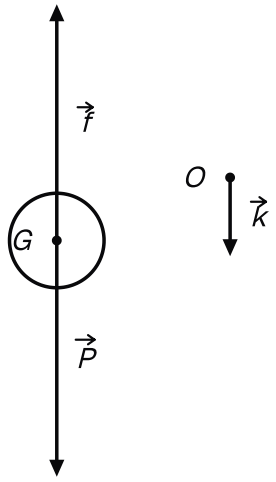
Exercice 2 — 6 pts

Colis largué d'un hélicoptère : modèle de chute libre, puis chute avec parachute

Un hélicoptère en vol stationnaire, à $H = 120\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol, largue un colis de ravitaillement sans vitesse initiale.

Le centre d'inertie G du colis est repéré sur un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté vers le bas, d'origine le point de largage, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La date $t = 0$ est celle du largage ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document. Forces exercées sur le colis muni de son parachute, lorsque sa vitesse est devenue constante.



Document : forces sur le colis et son parachute à vitesse constante

A.1. — 0,75 pts

Partie A : modèle de la chute libre. On suppose d'abord que le parachute ne s'ouvre pas et que l'action de l'air est négligeable.

Montrer que le mouvement de G est rectiligne uniformément accéléré, d'accélération $a_z = g$.

INDICE

Outil : la deuxième loi de Newton avec le seul poids ; la vitesse initiale est nulle.

CORRIGÉ

Deuxième loi. Système : le colis, soumis à son seul poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$. Donc $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, soit $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Projection. $\vec{g} = g\,\vec{k}$, donc $a_z = g$, constante et positive.

Conclusion. Lâché sans vitesse, le colis suit la verticale avec une accélération constante de même sens que sa vitesse : son mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

A.2. 0,75 pts

Écrire les équations horaires $v_z(t)$ et $z(t)$ du mouvement.

INDICE

Outil : les primitives de $a_z = g$, avec $v_z(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

CORRIGÉ

Vitesse. $v_z(t) = g\,t$, car $v_z(0) = 0$.

Position. $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, car $z(0) = 0$.

Conclusion. En unités du système international, $v_z = 9{,}80\,t$ et $z = 4{,}90\,t^2$.

A.3. 0,75 pts

Calculer la durée t_s de la chute jusqu'au sol.

INDICE

Outil : le sol est atteint quand $z(t_s) = H$.

CORRIGÉ

Condition. $\dfrac{1}{2}\,g\,t_s^2 = H$, avec $t_s > 0$:

$$t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$
$$t_s = \sqrt{\frac{2 \times 120}{9{,}80}}$$
$$t_s \approx 4{,}95\,\mathrm{s}$$

Conclusion. Dans ce modèle, le colis touche le sol au bout d'environ $4{,}95\,\mathrm{s}$.

A.4. 0,75 pts

Calculer la vitesse du colis à son arrivée au sol dans ce modèle. Ce modèle est-il réaliste ?

INDICE

Début : $v_z = g\,t_s$. **Point délicat :** convertis en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et demande-toi si l'air peut rester négligeable à cette vitesse.

CORRIGÉ

Vitesse. $v_z = 9{,}80 \times 4{,}95 \approx 48{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit environ $175\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Critique. Le frottement de l'air croît avec la vitesse : à près de $50\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, il n'est plus négligeable devant le poids d'un colis.

Conclusion. La chute libre surestime la vitesse d'arrivée : ce modèle n'est valable qu'au début de la chute.

B.1. 1 pts

Partie B : chute avec parachute. Le parachute s'ouvre dès le largage. Le colis équipé a une masse $m = 25{,}0\,\mathrm{kg}$. L'air exerce sur lui un frottement de valeur $f = k\,v^2$, avec $k = 11{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$; la poussée d'Archimède de l'air est négligée.

Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\,v^2$.

INDICE

Outil : deux forces, le poids et le frottement opposé à la vitesse ; projette la deuxième loi sur l'axe vers le bas.

CORRIGÉ

Bilan. Système : le colis équipé, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$ et $\vec{f} = -k\,v^2\,\vec{k}$.

Deuxième loi. $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$, soit en projection $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - k\,v^2$.

Conclusion. Après division par m, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\,v^2$.

B.2. 0,75 pts

Le document représente les forces lorsque la vitesse est constante. Justifier que leurs flèches ont la même longueur, puis montrer que la vitesse limite vaut $v_\ell = \sqrt{\dfrac{m\,g}{k}}$ et la calculer.

INDICE

Outil : à vitesse constante, l'accélération est nulle, donc la somme des forces aussi.

CORRIGÉ

Document. À vitesse constante, $\vec{a}_G = \vec{0}$: $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$. Les deux forces ont la même valeur, d'où deux flèches de même longueur.

Vitesse limite. $m\,g = k\,v_\ell^2$, donc :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{25{,}0 \times 9{,}80}{11{,}0}}$$
$$v_\ell \approx 4{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Conclusion. Sous son parachute, le colis descend au plus à environ $4{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

B.3. 0,75 pts

Montrer que le temps caractéristique de cette chute s'écrit $\tau = \dfrac{v_\ell}{g}$, puis le calculer.

INDICE

Outil : à $t = 0$, la vitesse est nulle : la pente de la tangente à l'origine de $v(t)$ vaut g.

CORRIGÉ

Tangente à l'origine. À $t = 0$, $v = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$: la tangente a pour équation $v = g\,t$. Elle atteint v_ℓ à la date τ telle que $g\,\tau = v_\ell$.

$$\tau = \frac{v_\ell}{g} = \frac{4{,}72}{9{,}80}$$
$$\tau \approx 0{,}482\,\mathrm{s}$$

Conclusion. Le temps caractéristique vaut environ $0{,}482\,\mathrm{s}$: la vitesse limite est presque atteinte en $2{,}5\,\mathrm{s}$.

B.4. 0,5 pts

Estimer la durée de la descente avec parachute et la comparer à la durée de chute du modèle de la partie A, $t_s \approx 4{,}95\,\mathrm{s}$.

INDICE

Début : le régime initial ne dure que quelques secondes. **Ensuite :** suppose que le colis parcourt presque toute la hauteur $H = 120\,\mathrm{m}$ à la vitesse limite.

CORRIGÉ

Régime initial. Il dure de l'ordre de $5\tau \approx 2{,}4\,\mathrm{s}$, pendant lesquelles le colis parcourt moins de $12\,\mathrm{m}$.

Durée. Presque toute la hauteur est donc parcourue à v_ℓ : $t \approx \dfrac{H}{v_\ell} = \dfrac{120}{4{,}72} \approx 25\,\mathrm{s}$.

Comparaison. La descente dure environ cinq fois plus longtemps qu'en chute libre.

Conclusion. Avec parachute, le colis met de l'ordre de $25\,\mathrm{s}$ à descendre et arrive à moins de $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

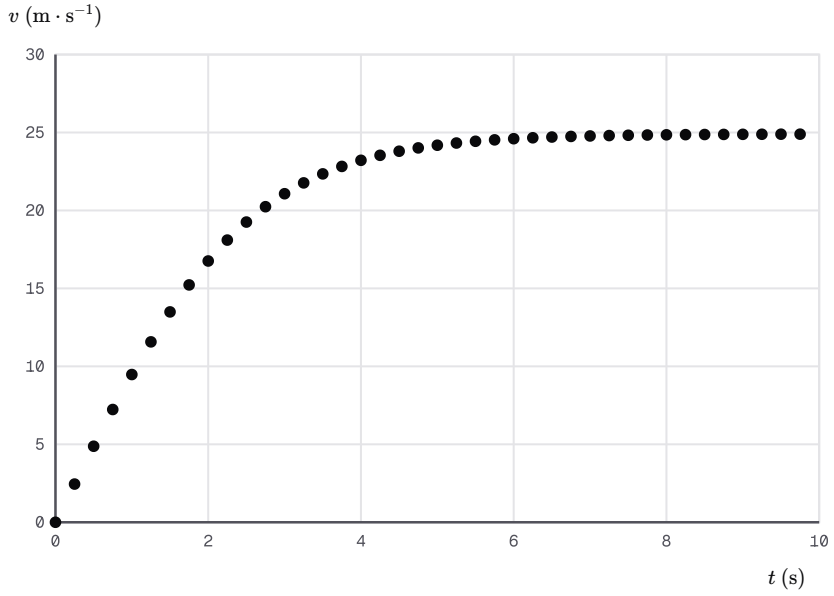
Exercice 3 6 pts

Chute d'un grêlon : vitesse limite et valeurs approchées par la méthode d'Euler

Un grêlon sphérique tombe verticalement d'un nuage. On le suit depuis un point où sa vitesse est nulle. Le référentiel terrestre est supposé galiléen et l'axe vertical, orienté vers le bas.

Données. Masse du grêlon $m = 3{,}80\,\text{g}$; volume $V = 4{,}20\,\text{cm}^3$; masse volumique de l'air $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. L'air exerce un frottement de valeur $f = k\,v^2$, avec $k = 6{,}00\times10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

Document. Valeurs approchées de la vitesse du grêlon, calculées par un tableur avec la méthode d'Euler et un pas de $0{,}25\,\text{s}$.



Document : vitesse du grêlon calculée par un tableur, pas d'un quart de seconde

A.1. 0,5 pts

Partie A : vitesse limite du grêlon.

Comparer la poussée d'Archimède exercée par l'air au poids du grêlon. Peut-on la négliger ?

INDICE

Outil : le rapport $\dfrac{F_A}{P} = \dfrac{\rho_{\text{air}}\, V}{m}$, avec V en mètres cubes et m en kilogrammes.

CORRIGÉ

Masse d'air déplacée.

$$\begin{aligned} \rho_{\text{air}}\, V &= 1{,}2 \\ &\quad \times 4{,}20 \times 10^{-6} \\ \rho_{\text{air}}\, V &\approx 5{,}0 \times 10^{-6}\ \text{kg} \end{aligned}$$

Rapport.

$$\begin{aligned} \frac{F_A}{P} &= \frac{5{,}0 \times 10^{-6}}{3{,}80 \times 10^{-3}} \\ \frac{F_A}{P} &\approx 1{,}3 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Conclusion. La poussée vaut à peu près un millième du poids : on peut la négliger.

A.2. 1 pts

Montrer que la vitesse du grêlon vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\, v^2$.

INDICE

Outil : deuxième loi de Newton avec le poids et le frottement, projetée sur l'axe vers le bas.

CORRIGÉ

Bilan. Système : le grêlon ; référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : $\vec{P} = m\, g\, \vec{k}$ et $\vec{f} = -k\, v^2\, \vec{k}$, la poussée étant négligée.

Projection de la deuxième loi. $m\, \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\, g - k\, v^2$.

Conclusion. En divisant par m : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\, v^2$.

A.3. 0,75 pts

Calculer la vitesse limite v_ℓ du grêlon, en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ puis en $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

INDICE

Outil : en régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

CORRIGÉ

Régime permanent. $g - \dfrac{k}{m}\,v_\ell^2 = 0$. Le poids vaut :

$$\begin{aligned} m\,g &= 3{,}80\times10^{-3} \\ &\quad\times 9{,}80 \\ m\,g &\approx 3{,}72\times10^{-2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} v_\ell &= \sqrt{\frac{m\,g}{k}} \\ v_\ell &= \sqrt{\frac{3{,}72\times10^{-2}}{6{,}00\times10^{-5}}} \\ v_\ell &\approx 24{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conversion. $v_\ell \approx 24{,}91\times 3{,}6 \approx 89{,}7\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Conclusion. Le grêlon tombe au plus à environ $24{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, près de $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

A.4. 0,5 pts

Montrer que la grandeur $\tau = \dfrac{v_\ell}{g}$ a la dimension d'un temps, puis calculer ce temps caractéristique.

INDICE

Outil : une équation aux dimensions sur le quotient d'une vitesse par une accélération.

CORRIGÉ

Dimension. $\dfrac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}} = \mathrm{s}$: τ est un temps.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{24{,}9}{9{,}80} \\ \tau &\approx 2{,}54\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. Le temps caractéristique de la chute vaut environ $2{,}54\,\mathrm{s}$.

B.1. 0,75 pts

Partie B : méthode d'Euler. On admet que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}80 - 1{,}58 \times 10^{-2}\, v^2$, en unités du système international, avec $v(0) = 0$. On prend le pas $\Delta t = 0{,}50\,\mathrm{s}$.

Montrer que $v_1 = 4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis calculer v_2.

INDICE

Outil : $a_i = 9{,}80 - 1{,}58 \times 10^{-2}\, v_i^2$, puis $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.

CORRIGÉ

Premier pas. $a_0 = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, donc $v_1 = 9{,}80 \times 0{,}50 = 4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Deuxième pas.

$$\begin{aligned} a_1 &= 9{,}80 - 1{,}58 \times 10^{-2} \\ &\quad \times 4{,}90^2 \\ a_1 &\approx 9{,}42\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} v_2 &= 4{,}90 + 9{,}42 \times 0{,}50 \\ v_2 &\approx 9{,}61\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. $v_1 = 4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_2 \approx 9{,}61\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

B.2. 0,75 pts

Calculer v_3 et v_4, et présenter les résultats dans un tableau (t_i, v_i, a_i).

INDICE

Outil : continue le même calcul en gardant les valeurs non arrondies d'une ligne à l'autre.

CORRIGÉ

Tableau.

t_i (s)	v_i ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	a_i ($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)
0	0	$9{,}80$
$0{,}50$	$4{,}90$	$9{,}42$
$1{,}0$	$9{,}61$	$8{,}34$
$1{,}5$	$13{,}8$	$6{,}80$
$2{,}0$	$17{,}2$	$5{,}14$

Conclusion. La méthode donne $v_3 \approx 13{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_4 \approx 17{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$.

B.3. `0,75 pts`

Lire sur le document la vitesse à $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$ et la comparer à v_4. Lequel des deux calculs est le plus fiable ? Justifier.

INDICE

Début : repère le point d'abscisse $2{,}0\,\mathrm{s}$. **Ensuite :** compare les deux pas au temps caractéristique de la chute, voisin de $2{,}5\,\mathrm{s}$.

CORRIGÉ

Lecture. Le document donne $v \approx 16{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$.

Comparaison. $v_4 \approx 17{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: l'écart vaut environ $0{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit $2\,\%$ à $3\,\%$.

Fiabilité. Le tableur emploie un pas deux fois plus petit, plus petit devant le temps caractéristique : ses valeurs suivent mieux la solution.

Conclusion. Le calcul du tableur est le plus fiable ; un pas de $0{,}50\,\mathrm{s}$ surestime légèrement la vitesse.

B.4. 1 pts

On note $A = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $B = 1{,}58\times10^{-2}\,\mathrm{m^{-1}}$ et $v_\ell = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$. Calculer v_ℓ.

Montrer que, pour tout i, $v_{i+1} - v_\ell = c_i\,(v_i - v_\ell)$, avec $c_i = 1 - B\,\Delta t\,(v_i + v_\ell)$.

En déduire que, avec le pas $\Delta t = 0{,}50\,\mathrm{s}$, une valeur v_i comprise entre 0 et v_ℓ donne une valeur v_{i+1} inférieure à v_ℓ et plus proche d'elle.

INDICE

Début : écris le pas d'Euler $v_{i+1} = v_i + (A - B\,v_i^2)\,\Delta t$, remplace A par $B\,v_\ell^2$, puis factorise $v_i^2 - v_\ell^2$.

CORRIGÉ

Vitesse limite.

$$v_\ell = \sqrt{\frac{9{,}80}{1{,}58\times10^{-2}}}$$
$$v_\ell \approx 24{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Relation. Le pas d'Euler s'écrit $v_{i+1} = v_i + (A - B\,v_i^2)\,\Delta t$, avec $A = B\,v_\ell^2$. On retranche v_ℓ, puis on factorise $v_i^2 - v_\ell^2 = (v_i - v_\ell)(v_i + v_\ell)$:

$$\begin{aligned} v_{i+1} - v_\ell &= (v_i - v_\ell) \\ &\quad - B\,\Delta t\,(v_i^2 - v_\ell^2) \\ &= c_i\,(v_i - v_\ell) \end{aligned}$$

avec $c_i = 1 - B\,\Delta t\,(v_i + v_\ell)$.

Encadrement du facteur. Si $0 \le v_i \le v_\ell$, la somme $v_i + v_\ell$ est comprise entre v_ℓ et $2\,v_\ell$. Or :

$$\begin{aligned} B\,\Delta t\,v_\ell &= 1{,}58\times10^{-2}\times0{,}50 \\ &\quad\times 24{,}9 \\ &\approx 0{,}197 \end{aligned}$$

Le facteur c_i est donc compris entre $1 - 2\times0{,}197 \approx 0{,}61$ et $1 - 0{,}197 \approx 0{,}80$: il est positif et inférieur à 1.

Conséquence. L'écart $v_{i+1} - v_\ell$ garde le signe de $v_i - v_\ell$, négatif ou nul, et sa valeur absolue diminue : v_{i+1} reste sous v_ℓ et s'en rapproche.

Conclusion. De proche en proche depuis $v_0 = 0$, les valeurs d'Euler de pas $0{,}50\,\mathrm{s}$ restent sous $24{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et s'en rapprochent. Pour un pas tel que $2\,B\,\Delta t\,v_\ell > 1$, le facteur c_i pourrait devenir négatif et la suite dépasser v_ℓ.

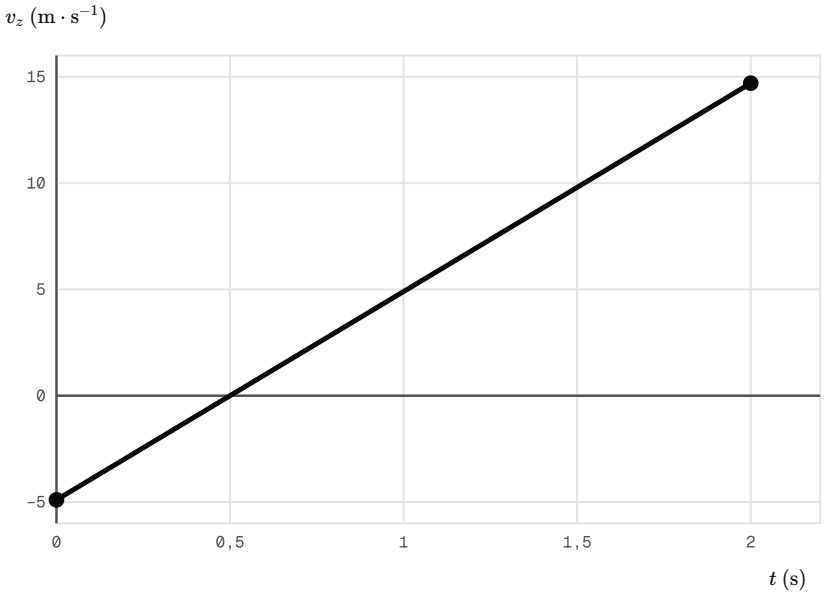
Exercice 4 6 pts

Pierre lancée au bord d'un puits : chute libre puis freinage dans l'eau

Au bord d'un puits, un enfant lance une pierre verticalement vers le haut, avec une vitesse de valeur $v_0 = 4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La pierre monte, redescend dans le puits et atteint la surface de l'eau, à $d = 9{,}80\,\mathrm{m}$ sous le point de lancer.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. On repère le centre d'inertie de la pierre sur un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté **vers le bas**, d'origine le point de lancer. La date $t = 0$ est celle du lancer ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Dans l'air, on néglige toute action autre que le poids.

Document. Coordonnée v_z de la vitesse de la pierre en fonction du temps, entre le lancer et l'arrivée à l'eau.



Document : coordonnée de la vitesse de la pierre sur l'axe orienté vers le bas

A.1. 0,75 pts

Partie A : mouvement dans l'air.

Justifier que $v_{0z} = -4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis établir par le calcul les équations horaires $v_z(t)$ et $z(t)$. Confronter l'expression de $v_z(t)$ au document.

INDICE

Outil : la vitesse initiale est dirigée vers le haut, l'axe vers le bas ; la deuxième loi avec le seul poids donne $a_z = g$.

CORRIGÉ

Vitesse initiale. Le lancer est dirigé vers le haut, en sens contraire de $\vec{k}$: $v_{0z} = -v_0 = -4{,}90\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Accélération. Seul le poids agit : $\vec{a}_G = \vec{g} = g\,\vec{k}$, donc $a_z = g$.

Équations horaires. Avec $z(0) = 0$: $v_z(t) = g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}\,t$.

Document. La droite part d'environ $-5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et s'annule vers $0{,}5\,\mathrm{s}$: sa pente vaut environ $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, en accord avec g.

Conclusion. En unités du système international, $v_z = 9{,}80\,t - 4{,}90$ et $z = 4{,}90\,t^2 - 4{,}90\,t$; la première est bien la droite du document.

A.2. 0,75 pts

Lire sur le document la date t_1 du sommet de la trajectoire, puis calculer la hauteur atteinte au-dessus du point de lancer.

INDICE

Outil : au sommet, $v_z = 0$; reporte la date dans $z(t)$ et interprète le signe obtenu.

CORRIGÉ

Lecture. La droite coupe l'axe des temps à $t_1 \approx 0{,}50\,\mathrm{s}$; le calcul $9{,}80\,t_1 - 4{,}90 = 0$ le confirme.

Position.

$$\begin{aligned} z(t_1) &= 4{,}90 \times 0{,}50^2 \\ &\quad - 4{,}90 \times 0{,}50 \\ z(t_1) &\approx -1{,}23\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Conclusion. Le signe moins indique un point situé au-dessus de O : la pierre monte d'environ $1{,}23\,\mathrm{m}$ au-dessus du point de lancer.

A.3. 0,75 pts

Montrer que la date t_e d'arrivée à la surface de l'eau vérifie $t_e^2 - t_e - 2{,}00 = 0$, puis calculer t_e.

INDICE

Outil : l'arrivée à l'eau se traduit par $z(t_e) = d$; divise ensuite par $4{,}90$.

CORRIGÉ

Équation. $z(t_e) = d$ s'écrit $4{,}90\,t_e^2 - 4{,}90\,t_e = 9{,}80$. En divisant par $4{,}90$: $t_e^2 - t_e - 2{,}00 = 0$.

Résolution. Le discriminant vaut $1 + 8{,}00 = 9{,}00$; la racine positive est :

$$t_e = \frac{1 + 3{,}00}{2}$$
$$t_e = 2{,}00\,\mathrm{s}$$

Conclusion. La pierre atteint l'eau $2{,}00\,\mathrm{s}$ après le lancer.

A.4. 0,5 pts

Calculer la vitesse de la pierre à son arrivée à la surface de l'eau, et la comparer au document.

INDICE

Outil : $v_z(t_e)$, puis le point du document d'abscisse t_e.

CORRIGÉ

Calcul.

$$v_z(t_e) = 9{,}80 \times 2{,}00 - 4{,}90$$
$$v_z(t_e) = 14{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Document. À $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$, la droite atteint bien environ $15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Conclusion. La pierre touche l'eau à $14{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, vers le bas.

B.1. 0,75 pts

Partie B : mouvement dans l'eau. La pierre, de masse $m = 0{,}150\,\mathrm{kg}$ et de volume $V = 6{,}00 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3}$, entre dans l'eau, de masse volumique $\rho_f = 1{,}00 \times 10^{3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, avec une vitesse verticale vers le bas de valeur $14{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. L'eau exerce sur elle un frottement de valeur $f = k\,v^2$, avec $k = 0{,}600\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

Calculer le rapport $\dfrac{F_A}{P}$ de la poussée d'Archimède au poids, et conclure.

INDICE

Outil : $\dfrac{F_A}{P} = \dfrac{\rho_f\,V\,g}{m\,g} = \dfrac{\rho_f\,V}{m}$.

CORRIGÉ

Masse d'eau déplacée.

$$\begin{aligned}\rho_f\,V &= 1{,}00 \times 10^{3} \\ &\quad \times 6{,}00 \times 10^{-5} \\ \rho_f\,V &= 6{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

Rapport.

$$\begin{aligned}\frac{F_A}{P} &= \frac{6{,}00 \times 10^{-2}}{0{,}150} \\ \frac{F_A}{P} &= 0{,}400\end{aligned}$$

Conclusion. Dans l'eau, la poussée vaut $40\,\%$ du poids : elle ne peut pas être négligée.

B.2. 1 pts

Montrer que, dans l'eau, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^2$, puis calculer A et B.

INDICE

Outil : trois forces ; projette la deuxième loi de Newton sur l'axe orienté vers le bas, puis divise par m.

CORRIGÉ

Bilan et loi. Système : la pierre. Forces : $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$, $\vec{F}_A = -\rho_f\,V\,g\,\vec{k}$ et $\vec{f} = -k\,v^2\,\vec{k}$. La deuxième loi projetée donne $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - \rho_f\,V\,g - k\,v^2$.

Forme. On divise par m : $A = g\left(1 - \dfrac{\rho_f\,V}{m}\right)$ et $B = \dfrac{k}{m}$.

Valeurs. $A = 9{,}80 \times 0{,}600 \approx 5{,}88\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $B = \dfrac{0{,}600}{0{,}150} = 4{,}00\,\mathrm{m^{-1}}$.

Conclusion. Dans l'eau, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 5{,}88 - 4{,}00\,v^2$, en unités du système international.

B.3. 0,75 pts

Calculer la vitesse limite de la pierre dans l'eau.

INDICE

Outil : en régime permanent, $A - B\,v_\ell^2 = 0$.

CORRIGÉ

Régime permanent.

$$v_\ell = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{5{,}88}{4{,}00}}$$
$$v_\ell \approx 1{,}21\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Conclusion. Dans l'eau, la vitesse de la pierre tend vers environ $1{,}21\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

B.4. 0,75 pts

Calculer l'accélération de la pierre juste après son entrée dans l'eau. Décrire alors l'allure de la courbe $v(t)$ dans l'eau.

INDICE

Début : remplace v par $14{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans l'équation. **Point délicat :** compare cette vitesse d'entrée à la vitesse limite.

CORRIGÉ

Accélération à l'entrée.

$$a = 5{,}88 - 4{,}00 \times 14{,}7^2$$
$$a \approx -8{,}58 \times 10^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Interprétation. L'accélération est négative, opposée à la vitesse : la pierre ralentit très fortement. Le frottement dépasse alors de loin le poids diminué de la poussée.

Allure. $v(t)$ décroît d'abord très vite depuis $14{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis de plus en plus lentement, et tend vers $1{,}21\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par valeurs supérieures.

Conclusion. Entrée plus vite que sa vitesse limite, la pierre est freinée jusqu'à cette vitesse, qu'elle ne franchit pas.

Exercice 5 6 pts

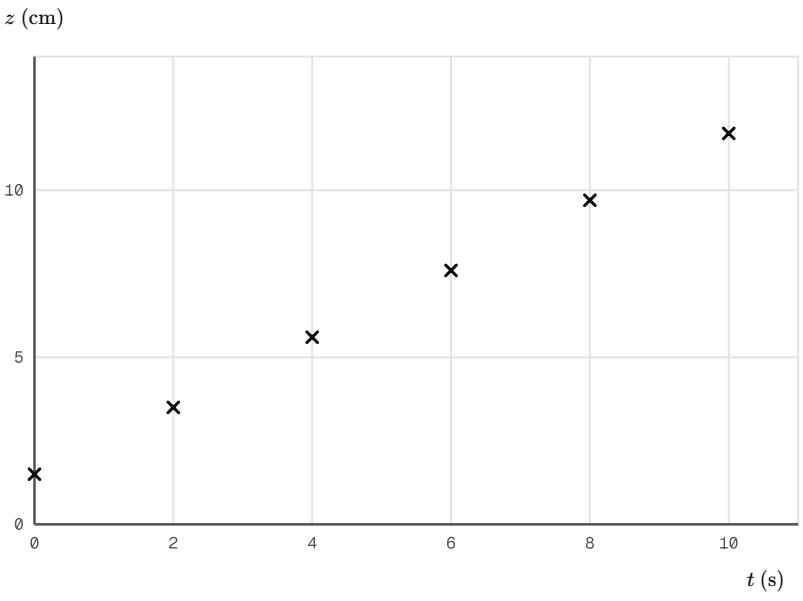
Billes de cuivre dans du miel : protocole, coefficient de frottement et validité du modèle

En travaux pratiques, on étudie la chute verticale d'une bille de cuivre dans une grande éprouvette remplie de miel liquide. On modélise le frottement du miel par une force de valeur $f = k\,v$. L'axe vertical est orienté vers le bas ; le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Données. Masse de la bille $m = 3{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$; volume $V = 3{,}35 \times 10^{-8}\,\mathrm{m^3}$; masse volumique du miel $\rho_f = 1{,}42 \times 10^{3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Document 1. Positions z de la bille, repérées par une vidéo à partir d'un trait de l'éprouvette situé sous la surface du miel.

t (s)	z (cm)
0	1,5
2	3,5
4	5,6
6	7,6
8	9,7
10	11,7



Document 1 : positions de la bille de cuivre dans le miel

A.1. 1 pts

Partie A : protocole et coefficient de frottement.

Proposer un montage et un protocole permettant d'obtenir les positions successives de la bille au cours de sa chute.

INDICE

Point délicat : l'image doit permettre de lire des positions sans erreur de parallaxe.

CORRIGÉ

Montage. Une éprouvette haute, verticale, remplie de miel ; une règle graduée fixée contre elle ; une caméra fixe, placée face à l'éprouvette, à mi-hauteur de la zone filmée.

Protocole. On lâche la bille sans vitesse au ras du miel, au centre de l'éprouvette, et on filme sa chute. Un logiciel de pointage relève ses positions image par image, à partir d'un trait de référence.

Exploitation. On trace $z(t)$ et on recommence avec plusieurs billes identiques.

Conclusion. La vidéo, la règle et le pointage donnent les positions successives de la bille à intervalles de temps connus.

A.2. 1 pts

Montrer, à l'aide du document 1, que le mouvement de la bille est rectiligne uniforme sur la portion étudiée, puis déterminer sa vitesse limite v_ℓ.

INDICE

Outil : des positions alignées en fonction du temps traduisent une vitesse constante ; la pente de la droite est cette vitesse.

CORRIGÉ

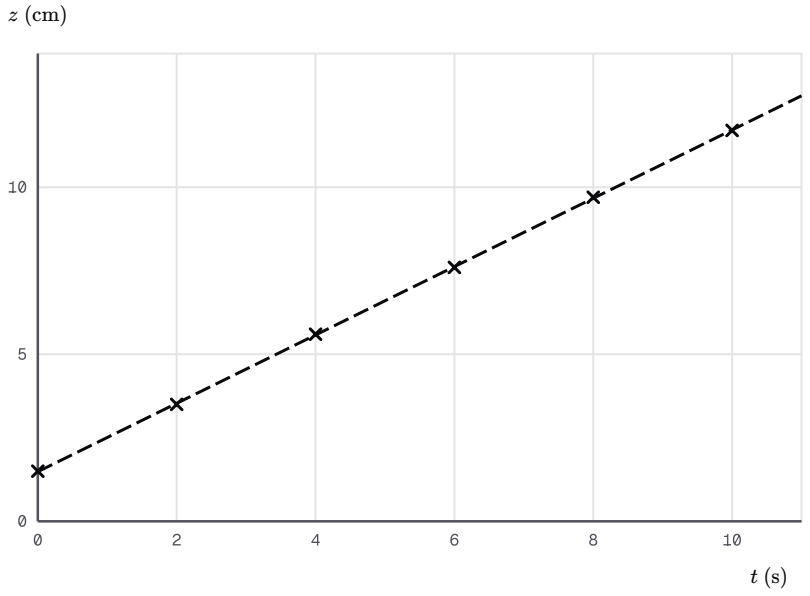
Mouvement uniforme. Pendant chaque intervalle de $2\,\mathrm{s}$, la bille parcourt environ $2{,}0\,\mathrm{cm}$: les points sont alignés et la vitesse est constante.

Pente. Sur deux points éloignés :

$$v_\ell \approx \frac{11{,}7 - 1{,}5}{10 - 0}$$
$$v_\ell \approx 1{,}02\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

La droite de modélisation de la figure ci-dessous donne la même pente.

Conclusion. La bille est en régime permanent, à $v_\ell \approx 1{,}02 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Positions de la bille et droite de modélisation

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 6 points : y = a x + b, avec a ≈ 1,023 et b ≈ 1,486.

A.3. 0,75 pts

Montrer qu'en régime permanent $k = \dfrac{(m - \rho_f\, V)\, g}{v_\ell}$.

INDICE

Outil : à vitesse constante, la somme des trois forces est nulle.

CORRIGÉ

Bilan. Poids $\vec{P}$, vers le bas ; poussée $\vec{F}_A$ et frottement $\vec{f}$, vers le haut.

Deuxième loi. En régime permanent, $\vec{a}_G = \vec{0}$: $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = \vec{0}$. Sur l'axe vers le bas, $m\,g - \rho_f\, V\, g - k\, v_\ell = 0$.

Conclusion. On en tire $k = \dfrac{(m - \rho_f\, V)\, g}{v_\ell}$.

A.4. 0,75 pts

Calculer k avec $v_\ell = 1{,}02 \times 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

INDICE

Outil : calcule d'abord la différence $m - \rho_f\, V$, en kilogrammes.

CORRIGÉ

Différence de masses.

$$\begin{aligned} \rho_f\, V &= 1{,}42 \times 10^{3} \\ &\quad \times 3{,}35 \times 10^{-8} \\ \rho_f\, V &\approx 4{,}76 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg} \end{aligned}$$

Donc $m - \rho_f\, V \approx 2{,}524 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg}$ et $(m - \rho_f\, V)\, g \approx 2{,}474 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{(m - \rho_f\, V)\, g}{v_\ell} \\ k &= \frac{2{,}474 \times 10^{-3}}{1{,}02 \times 10^{-2}} \\ k &\approx 0{,}243\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient de frottement vaut environ $0{,}243\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

B.1. 0,5 pts

Partie B : mesures répétées et validité du modèle. Un autre groupe chronomètre cinq fois la durée Δt de passage de billes identiques entre deux traits distants de $L = 15{,}0\,\text{cm}$ (document 2).

Essai	1	2	3	4	5
Δt (s)	14,6	14,9	14,5	14,8	14,7

Calculer la durée moyenne et la vitesse correspondante.

INDICE

Outil : la moyenne des cinq durées, puis $v = \dfrac{L}{\Delta t}$.

CORRIGÉ

Moyenne. La somme des cinq durées vaut $73{,}5\,\text{s}$:

$$\overline{\Delta t} = \frac{73{,}5}{5}$$
$$\overline{\Delta t} = 14{,}7\,\text{s}$$

Vitesse.

$$v = \frac{15{,}0}{14{,}7}$$
$$v \approx 1{,}02\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

Conclusion. La vitesse mesurée par ce groupe vaut environ $1{,}02\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

B.2. 0,5 pts

On estime l'incertitude sur la durée par la demi-étendue des cinq mesures. En déduire l'incertitude relative sur la vitesse.

INDICE

Outil : demi-étendue $= \dfrac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{2}$; l'incertitude relative sur v est celle sur Δt, la distance étant précise.

CORRIGÉ

Demi-étendue. $\dfrac{14{,}9 - 14{,}5}{2} = 0{,}2\,\text{s}$.

Incertitude relative. $\dfrac{0{,}2}{14{,}7} \approx 1{,}4\,\%$, soit environ $0{,}014\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ sur la vitesse.

Conclusion. Ce groupe trouve $v = 1{,}02\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, avec une incertitude relative d'environ $1{,}4\,\%$.

B.3. 0,75 pts

On admet $k = 0{,}243\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Montrer que le temps caractéristique $\tau = \dfrac{m}{k}$ est très court, et justifier que le premier trait puisse être placé à quelques centimètres sous la surface.

INDICE

Début : calcule τ, puis 5τ. **Ensuite :** majore la distance parcourue pendant le régime initial par $v_\ell \times 5\tau$, avec $v_\ell \approx 1{,}02\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

CORRIGÉ

Temps caractéristique.

$$\tau = \frac{3{,}00 \times 10^{-4}}{0{,}243}$$
$$\tau \approx 1{,}23 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

Régime initial. Il dure environ $5\tau \approx 6\,\mathrm{ms}$. La bille y parcourt moins de $1{,}02 \times 6 \times 10^{-3} \approx 6 \times 10^{-3}\,\mathrm{cm}$.

Conclusion. Le régime permanent est atteint presque dès l'entrée dans le miel : un trait à quelques centimètres sous la surface suffit.

B.4. 0,75 pts

Une bille d'un autre métal, de même diamètre, a pour masse $m' = 2{,}61 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$. On mesure sa vitesse limite : $0{,}87\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Le modèle linéaire, avec le même coefficient $k = 0{,}243\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, est-il compatible avec cette mesure ?

INDICE

Début : même forme et même taille, donc même k et même volume. **Ensuite :** prévois $v'_\ell = \dfrac{(m' - \rho_f\,V)\,g}{k}$ et compare à la mesure.

CORRIGÉ

Prévision. La masse diminuée de la masse de miel déplacée vaut :

$$\begin{aligned} m' - \rho_f\,V &\approx 2{,}61 \times 10^{-4} \\ &\quad - 4{,}76 \times 10^{-5} \\ &\approx 2{,}134 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

En régime permanent :

$$v'_\ell = \frac{(m' - \rho_f\,V)\,g}{k}$$
$$v'_\ell \approx 0{,}861\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

Comparaison. L'écart avec la mesure vaut environ $1\,\%$, du même ordre que l'incertitude relative de $1{,}4\,\%$ trouvée en B.2.

Conclusion. La prévision concorde avec la mesure, à l'incertitude près : le modèle linéaire n'est pas contredit pour ces billes.