BURHAN

Chute verticale d'un solide : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/chute-verticale-d-un-solide/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Chute verticale d'un solide	Entraînement	7

Exercice 1

Vitesse limite d'un parachutiste avant et après l'ouverture

Un parachutiste et son équipement ont une masse $m = 80\,\mathrm{kg}$. Il saute d'une montgolfière immobile et tombe verticalement, parachute fermé. L'air exerce sur lui une force de frottement de valeur $f = k\,v^2$, avec $k = 0{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$; la poussée d'Archimède de l'air est négligée.

On prend $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté vers le bas.

1.

Faire le bilan des forces, puis montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\,v^2$.

INDICE

Outil : la deuxième loi de Newton, projetée sur l'axe vers le bas ; le frottement s'oppose à la vitesse.

CORRIGÉ

Système et référentiel. Le parachutiste équipé ; référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan. Son poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$ et le frottement $\vec{f} = -k\,v^2\,\vec{k}$; la poussée est négligée.

Deuxième loi. $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$. En projection sur l'axe : $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - k\,v^2$.

Conclusion. Après division par m, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\,v^2$: c'est la forme $A - B\,v^2$.

2.

Calculer les constantes A et B de cette équation, avec leurs unités.

INDICE

Outil : ici $A = g$ et $B = \dfrac{k}{m}$; l'unité de B fait de $B\,v^2$ une accélération.

CORRIGÉ

Constante A. $A = g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Constante B.

$$B = \frac{k}{m} = \frac{0{,}25}{80}$$
$$B \approx 3{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^{-1}}$$

Conclusion. En unités du système international, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}80 - 3{,}1 \times 10^{-3}\,v^2$.

3.

Calculer la vitesse limite v_ℓ en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, puis en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

INDICE

Outil : en régime permanent, $g - \dfrac{k}{m}\, v_\ell^2 = 0$.

CORRIGÉ

Régime permanent. L'accélération s'annule : $v_\ell^2 = \dfrac{m\,g}{k}$.

$$v_\ell = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}$$
$$v_\ell = \sqrt{\frac{80 \times 9{,}80}{0{,}25}}$$
$$v_\ell = 56\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Conversion. $1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}6\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, d'où $v_\ell \approx 2{,}0 \times 10^{2}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Conclusion. Parachute fermé, la vitesse limite vaut $56\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, environ $2{,}0 \times 10^{2}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

4.

Calculer le temps caractéristique τ de cette chute et vérifier son unité.

INDICE

Outil : $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$, puis une équation aux dimensions.

CORRIGÉ

Calcul.

$$\tau = \frac{v_\ell}{g} = \frac{56}{9{,}80}$$
$$\tau \approx 5{,}7\,\mathrm{s}$$

Unité. Des $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ divisés par des $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ donnent des secondes.

Conclusion. Le temps caractéristique vaut environ $5{,}7\,\mathrm{s}$: le régime permanent s'installe en une demi-minute environ.

5.

Le parachute s'ouvre : le coefficient devient $k' = 30\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Calculer la nouvelle vitesse limite, puis décrire le mouvement juste après l'ouverture.

INDICE

Début : reprends la formule de v_ℓ avec k'. **Point délicat :** compare la vitesse au moment de l'ouverture à la nouvelle vitesse limite.

CORRIGÉ

Nouvelle vitesse limite. $v'_\ell = \sqrt{\dfrac{80 \times 9{,}80}{30}} \approx 5{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Juste après l'ouverture. La vitesse vaut encore environ $56\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, bien plus que v'_ℓ. Le frottement $k'\,v^2$ dépasse alors le poids : l'accélération est opposée à la vitesse.

Conclusion. Le parachutiste ralentit, puis descend à vitesse constante, à environ $5{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 2

Bille de plomb dans un shampooing : constantes, vitesse limite et régime initial

On lâche sans vitesse initiale une bille de plomb dans une éprouvette remplie de shampooing. Données : masse de la bille $m = 4{,}52\,\mathrm{g}$; volume $V = 0{,}400\,\mathrm{cm^3}$; masse volumique du shampooing $\rho_f = 1{,}02 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Le frottement suit le modèle linéaire $f = k\,v$, avec $k = 0{,}180\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. L'axe vertical $(O;\vec{k})$ est orienté vers le bas.

1.

Après l'inventaire des forces appliquées à la bille, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v$, avec $A = g\left(1 - \dfrac{\rho_f\,V}{m}\right)$ et $B = \dfrac{k}{m}$.

INDICE

Outil : trois forces cette fois ; projette la deuxième loi de Newton sur l'axe vers le bas.

CORRIGÉ

Système et référentiel. La bille ; référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan. Le poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$; la poussée $\vec{F}_A = -\rho_f\,V\,g\,\vec{k}$; le frottement $\vec{f} = -k\,v\,\vec{k}$.

Deuxième loi, projetée. $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - \rho_f\,V\,g - k\,v$.

Conclusion. Divisée par m, cette relation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v$, avec les expressions annoncées de A et de B.

2.

Calculer A. Quelle erreur relative commettrait-on en négligeant la poussée d'Archimède ?

INDICE

Outil : convertis m en kilogrammes et V en mètres cubes, puis compare A à g.

CORRIGÉ

Conversions. $m = 4{,}52 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ et $V = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^3}$, d'où $\dfrac{\rho_f\,V}{m} \approx 9{,}03 \times 10^{-2}$.

$$A \approx 9{,}80 \times 0{,}910$$
$$A \approx 8{,}92\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Erreur. Sans la poussée, on prendrait $A = g$: l'écart relatif vaut $\dfrac{\rho_f\,V}{m}$, soit environ $9\,\%$.

Conclusion. $A \approx 8{,}92\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; négliger la poussée donnerait g, soit une erreur relative d'environ $9\,\%$: dans ce liquide, on ne peut pas la négliger.

3.

Calculer B, puis la vitesse limite v_ℓ de la bille.

INDICE

Outil : $B = \dfrac{k}{m}$, puis $v_\ell = \dfrac{A}{B}$ dans le modèle linéaire.

CORRIGÉ

Constante B.

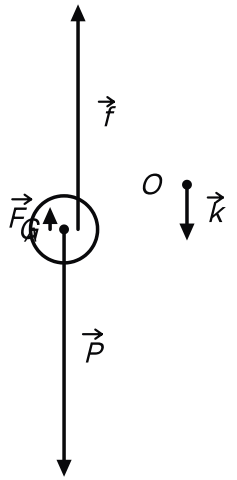
$$B = \frac{0{,}180}{4{,}52 \times 10^{-3}}$$
$$B \approx 39{,}8\,\mathrm{s^{-1}}$$

Vitesse limite.

$$v_\ell = \frac{A}{B} = \frac{8{,}92}{39{,}8}$$
$$v_\ell \approx 0{,}224\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

En régime permanent, le frottement compense le poids diminué de la poussée (figure ci-dessous).

Conclusion. La bille finit par descendre à environ $0{,}224\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Forces sur la bille de plomb en régime permanent

4.

Calculer le temps caractéristique τ. Au bout de combien de temps peut-on considérer le régime permanent comme atteint ?

INDICE

Outil : dans le modèle linéaire, $\tau = \dfrac{1}{B}$; le régime permanent s'installe après environ 5τ.

CORRIGÉ

Temps caractéristique. $\tau = \dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{39{,}8} \approx 2{,}51 \times 10^{-2}\,\text{s}$.

Régime permanent. $5\tau \approx 5 \times 2{,}51 \times 10^{-2} \approx 0{,}126\,\text{s}$.

Conclusion. Le régime initial dure à peine plus d'un dixième de seconde : la bille atteint presque aussitôt sa vitesse limite.

Exercice 3

Méthode d'Euler pour la chute d'un volant de badminton

Un volant de badminton de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$ est lâché sans vitesse initiale du haut d'une tribune. L'air exerce sur lui un frottement de valeur $f = k\,v^2$, avec $k = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$; la poussée d'Archimède est négligée et $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. L'axe vertical est orienté vers le bas.

Une vidéo de la chute donne, à la date $t = 0{,}50\,\mathrm{s}$, la vitesse mesurée $v_{\mathrm{mes}} = 4{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1.

Montrer que la vitesse du volant vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^2$, puis calculer A et B.

INDICE

Outil : la deuxième loi de Newton avec le poids et le frottement seulement.

CORRIGÉ

Équation. Système : le volant ; référentiel terrestre, supposé galiléen. La loi $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$, projetée sur l'axe vers le bas, donne $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - k\,v^2$.

Constantes. $A = g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et :

$$B = \frac{k}{m} = \frac{1{,}0 \times 10^{-3}}{5{,}0 \times 10^{-3}}$$
$$B = 0{,}20\,\mathrm{m^{-1}}$$

Conclusion. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}80 - 0{,}20\,v^2$, en unités du système international.

2.

Avec le pas $\Delta t = 0{,}10\,\text{s}$, calculer par la méthode d'Euler les vitesses v_1 à v_5. Présenter les résultats dans un tableau (t_i, v_i, a_i).

INDICE

Outil : $a_i = 9{,}80 - 0{,}20\,v_i^2$ et $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$; garde les valeurs non arrondies d'une ligne à l'autre.

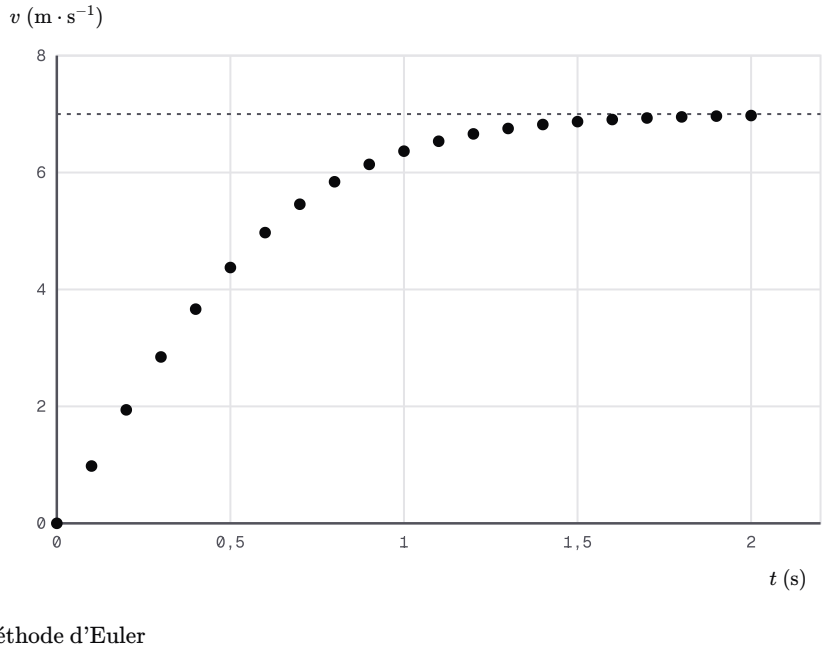
CORRIGÉ

Premier pas. $a_0 = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, donc $v_1 = 9{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}98\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pas suivants. Même calcul à chaque ligne :

t_i (s)	v_i ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	a_i ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)
0	0	9,80
0,10	0,98	9,61
0,20	1,94	9,05
0,30	2,85	8,18
0,40	3,66	7,12
0,50	4,38	5,97

Conclusion. La méthode d'Euler donne $v_5 \approx 4{,}38\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $t = 0{,}50\,\text{s}$.



Valeurs d'Euler de la vitesse du volant, pas de un dixième de seconde

3.

Comparer la valeur d'Euler v_5 à la vitesse mesurée par la vidéo, par un écart relatif.

INDICE

Outil : l'écart relatif $\dfrac{|v_5 - v_{\text{mes}}|}{v_{\text{mes}}}$.

CORRIGÉ

Écart relatif.

$$\frac{|4{,}38 - 4{,}2|}{4{,}2} \approx 4\,\%$$

Interprétation. Sur chaque pas, la méthode suit la tangente, qui monte plus vite que la courbe : elle surestime la vitesse.

Conclusion. La valeur d'Euler dépasse la mesure d'environ $4\,\%$.

4.

Avec le pas $\Delta t = 0{,}050\,\text{s}$, on obtient $v_{10} \approx 4{,}30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $t = 0{,}50\,\text{s}$. Commenter l'effet du pas, puis calculer la vitesse limite du volant.

INDICE

Début : compare les deux valeurs d'Euler à la mesure. **Ensuite :** $v_\ell = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$.

CORRIGÉ

Effet du pas. Avec un pas deux fois plus petit, l'écart à la mesure passe d'environ $0{,}18$ à $0{,}10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: la solution approchée s'améliore.

Vitesse limite. $v_\ell = \sqrt{\dfrac{9{,}80}{0{,}20}} = 7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

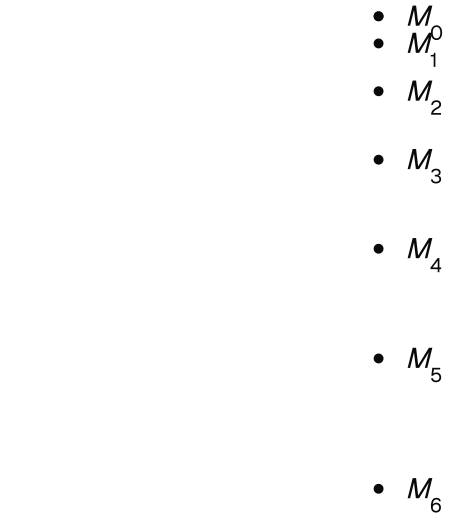
Conclusion. Plus le pas est petit devant $\tau = \dfrac{v_\ell}{A} \approx 0{,}71\,\text{s}$, meilleures sont les valeurs ; le volant tend vers $7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Exercice 4

Mesure de g sur la chronophotographie d'un écrou

On photographie la chute verticale d'un écrou en acier, à intervalles réguliers $\Delta t = 50{,}0\,\text{ms}$. L'axe vertical est orienté vers le bas, d'origine la position M_0 ; la date $t = 0$ est celle de M_0. Le tableau donne la position z_i de chaque image, à l'échelle réelle.

Position	z_i (cm)
M_0	0
M_1	$3{,}2$
M_2	$8{,}9$
M_3	$17{,}0$
M_4	$27{,}6$
M_5	$40{,}6$
M_6	$56{,}1$



Positions successives de l'écrou, toutes les cinquante millisecondes

1.

Montrer que la vitesse de l'écrou en M_2 vaut $v_2 \approx 1{,}38\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, puis calculer sa vitesse v_4 en M_4.

INDICE

Outil : $v_i \approx \dfrac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2\,\Delta t}$, avec les distances en mètres.

CORRIGÉ

Position M_2. $z_3 - z_1 = 17{,}0 - 3{,}2 = 13{,}8\,\mathrm{cm}$, et $2\,\Delta t = 0{,}100\,\mathrm{s}$:

$$v_2 \approx \frac{0{,}138}{0{,}100}$$
$$v_2 \approx 1{,}38\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Position M_4. $z_5 - z_3 = 40{,}6 - 17{,}0 = 23{,}6\,\mathrm{cm}$, d'où $v_4 \approx \dfrac{0{,}236}{0{,}100} \approx 2{,}36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Conclusion. L'écrou passe en M_2 à environ $1{,}38\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et en M_4 à environ $2{,}36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2.

Calculer l'accélération a_3 de l'écrou en M_3.

INDICE

Outil : $a_3 \approx \dfrac{v_4 - v_2}{2\,\Delta t}$.

CORRIGÉ

Accélération.

$$a_3 \approx \frac{2{,}36 - 1{,}38}{0{,}100}$$
$$a_3 \approx 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Conclusion. En M_3, l'accélération de l'écrou vaut environ $9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, vers le bas.

3.

Comparer a_3 à $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Quel modèle de chute convient à l'écrou ?

INDICE

Outil : calcule l'écart relatif, puis rappelle-toi la définition de la chute libre.

CORRIGÉ

Comparaison. $\dfrac{|a_3 - g|}{g}$ est inférieur à $1\,\%$: l'accélération mesurée est égale à g aux erreurs de mesure près.

Modèle. Seul le poids semble agir : la poussée et le frottement de l'air sont négligeables pour cet écrou dense et compact.

Conclusion. La chute libre est un bon modèle de ce mouvement.

4.

L'écrou a-t-il été lâché en M_0 ? Justifier par le calcul de sa vitesse v_0 en M_0.

INDICE

Début : en chute libre, $v_z = g\,t + v_0$. **Ensuite :** applique cette relation en M_2, à la date $t = 0{,}100\,\mathrm{s}$.

CORRIGÉ

Vitesse en M_0.

$$\begin{aligned} v_0 &= v_2 - g\,t_2 \\ v_0 &\approx 1{,}38 - 0{,}980 \\ v_0 &\approx 0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Contrôle. Avec cette vitesse, $z_1 = v_0\,\Delta t + \dfrac{1}{2}\,g\,\Delta t^2 \approx 3{,}2\,\mathrm{cm}$, comme dans le tableau.

Conclusion. En M_0, l'écrou descendait déjà à environ $0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: il a été lâché avant la première image.

Exercice 5

Balle lancée vers le haut depuis un toit : sommet et arrivée au sol

Depuis le toit d'un immeuble, à $h = 15{,}0\,\mathrm{m}$ du sol, on lance verticalement vers le haut une petite balle lestée, avec une vitesse $v_0 = 6{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On néglige l'action de l'air ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, avec un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté **vers le haut**, d'origine O au sol ; la date $t = 0$ est celle du lancer.

1.

Écrire les équations horaires $v_z(t)$ et $z(t)$ de la balle.

INDICE

Outil : sur un axe vers le haut, $a_z = -g$; ici $z(0) = h$ et $v_z(0) = v_0$.

CORRIGÉ

Accélération. Seul le poids agit : la deuxième loi donne $\vec{a}_G = \vec{g}$, d'où $a_z = -g$ sur l'axe vers le haut.

Équations horaires. $v_z(t) = -g\,t + v_0$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + h$.

Conclusion. En unités du système international, $v_z = -9{,}80\,t + 6{,}00$ et $z = -4{,}90\,t^2 + 6{,}00\,t + 15{,}0$.

2.

Calculer la date t_1 du sommet et l'altitude maximale $z_{\max}$ de la balle.

INDICE

Outil : au sommet, $v_z(t_1) = 0$; reporte ensuite t_1 dans $z(t)$.

CORRIGÉ

Date. $v_z(t_1) = 0$ donne $t_1 = \dfrac{v_0}{g} = \dfrac{6{,}00}{9{,}80} \approx 0{,}612\,\mathrm{s}$.

Altitude. En reportant $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$ dans $z(t)$:

$$\begin{aligned} z_{\max} &= h + \frac{v_0^2}{2g} \\ z_{\max} &= 15{,}0 + 1{,}84 \\ z_{\max} &\approx 16{,}8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Conclusion. La balle atteint son sommet à environ $0{,}612\,\mathrm{s}$, à $16{,}8\,\mathrm{m}$ du sol.

3.

Montrer que la date t_2 d'arrivée au sol vérifie $4{,}90\,t_2^2 - 6{,}00\,t_2 - 15{,}0 = 0$, puis calculer t_2.

INDICE

Outil : l'arrivée au sol se traduit par $z(t_2) = 0$; garde la racine positive.

CORRIGÉ

Équation. $z(t_2) = 0$ s'écrit $-4{,}90\,t_2^2 + 6{,}00\,t_2 + 15{,}0 = 0$; on multiplie par -1.

Résolution. Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} D &= 6{,}00^2 + 4 \times 4{,}90 \\ &\quad \times 15{,}0 \\ D &= 330 \end{aligned}$$

La racine positive est :

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{6{,}00 + \sqrt{330}}{9{,}80} \\ t_2 &\approx 2{,}47\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Conclusion. La balle touche le sol environ $2{,}47\,\mathrm{s}$ après le lancer.

4.

Calculer la vitesse de la balle à son arrivée au sol, puis vérifier le résultat par la relation indépendante du temps.

INDICE

Début : calcule $v_z(t_2)$. **Ensuite :** écris $v_z^2 - v_0^2 = 2\,a_z\,(0 - h)$.

CORRIGÉ

Avec la date.

$$\begin{aligned} v_z(t_2) &= -9{,}80 \times 2{,}466 \\ &\quad + 6{,}00 \\ v_z(t_2) &\approx -18{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Sans la date.

$$\begin{aligned} v_z^2 &= v_0^2 + 2\,g\,h \\ v_z^2 &= 36{,}0 + 294 = 330 \end{aligned}$$

Donc $|v_z| = \sqrt{330} \approx 18{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Conclusion. La balle arrive au sol à environ $18{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, vers le bas puisque $v_z < 0$.

Exercice 6

Choix du modèle de frottement pour des caissettes de papier empilées

Dans l'air calme d'une cage d'escalier, on lâche une caissette de papier plissé (un moule à muffin), puis des piles de deux, trois et quatre caissettes emboîtées. La forme et la taille ne changent pas : seule la masse varie. On mesure la vitesse limite de chaque pile.

Caissettes	m (g)	v_ℓ ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)
1	$0{,}90$	$1{,}05$
2	$1{,}80$	$1{,}48$
3	$2{,}70$	$1{,}82$
4	$3{,}60$	$2{,}10$

La poussée d'Archimède est négligée ; $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Le frottement de l'air a pour valeur $f = k\,v^n$, avec $n = 1$ ou $n = 2$.

1.

Montrer qu'en régime permanent $k = \dfrac{m\,g}{v_\ell^{\,n}}$.

INDICE

Outil : en régime permanent, la vitesse est constante : la somme des forces est nulle.

CORRIGÉ

Régime permanent. La vitesse est constante, donc $\vec{a}_G = \vec{0}$. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$.

Projection. Sur un axe vertical orienté vers le bas : $m\,g - k\,v_\ell^{\,n} = 0$.

Conclusion. On en tire $k = \dfrac{m\,g}{v_\ell^{\,n}}$.

2.

Calculer k pour chaque pile dans le modèle linéaire ($n = 1$), puis dans le modèle quadratique ($n = 2$).

INDICE

Outil : dresse un tableau à trois colonnes : nombre de caissettes, k pour $n = 1$, k pour $n = 2$; masses en kilogrammes.

CORRIGÉ

Exemple de calcul. Pour une caissette, avec $n = 1$:

$$k = \frac{9{,}0 \times 10^{-4} \times 9{,}80}{1{,}05}$$
$$k \approx 8{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

Résultats. Les valeurs sont données en 10^{-3} unité du système international :

Caissettes	$n = 1$	$n = 2$
1	$8{,}4$	$8{,}0$
2	$11{,}9$	$8{,}1$
3	$14{,}5$	$8{,}0$
4	$16{,}8$	$8{,}0$

Conclusion. Avec $n = 1$, k double presque de une à quatre caissettes ; avec $n = 2$, il reste voisin de $8{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

3.

Quel modèle de frottement convient ? Donner la valeur de k retenue.

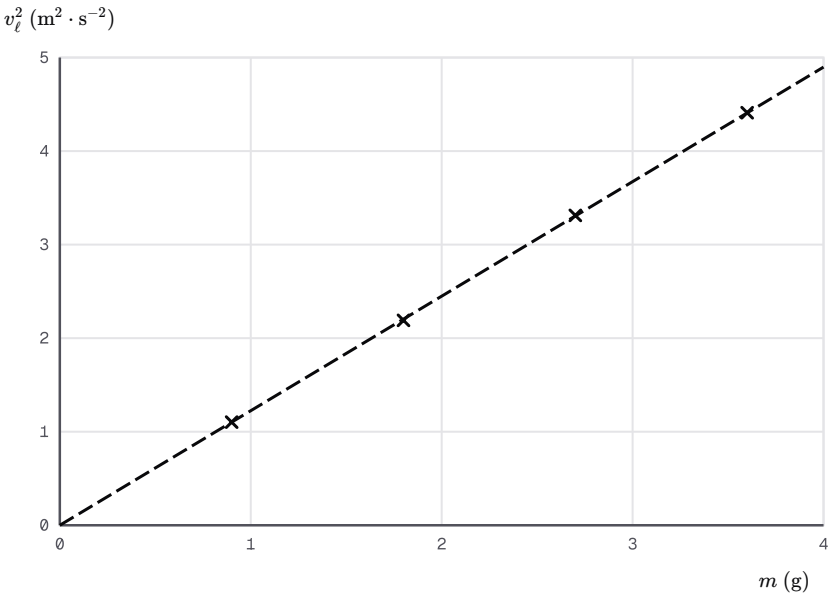
INDICE

Outil : les piles ont toutes la même forme : dans le bon modèle, elles ont le même coefficient k.

CORRIGÉ

Choix. Seul le modèle quadratique donne un coefficient constant. La figure ci-dessous le confirme : v_ℓ^2 est proportionnel à m, comme l'annonce $v_\ell^2 = \dfrac{m\,g}{k}$.

Conclusion. Le frottement est quadratique, avec $k \approx 8{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.



Carré de la vitesse limite des piles en fonction de leur masse

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 4 points : y = a x, avec a ≈ 1,224.

4.

Proposer un protocole pour mesurer la vitesse limite d'une pile de caissettes.

INDICE

Point délicat : la mesure n'a de sens qu'une fois la vitesse devenue constante.

CORRIGÉ

Montage. Une règle graduée verticale, ou un mur repéré tous les $10\,\mathrm{cm}$, et une caméra fixe placée loin, face à la zone de chute.

Mesures. On lâche la pile de deux mètres au moins, on filme la chute, puis on pointe ses positions image par image.

Exploitation. On trace $z(t)$: sur la portion rectiligne finale, la pente donne v_ℓ. On recommence trois fois et on garde la moyenne.

Conclusion. La vitesse limite est la pente de la partie rectiligne de $z(t)$, mesurée sur plusieurs lâchers.

Exercice 7

Solution du modèle linéaire pour une bille de laiton dans l'huile de ricin

Une petite bille de laiton tombe dans de l'huile de ricin. Sur un axe vertical dirigé vers le bas, sa vitesse v vérifie, en unités du système international :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8{,}68 - 125\,v$$

La bille est lâchée sans vitesse initiale à $t = 0$. On note $A = 8{,}68\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $B = 125\,\mathrm{s^{-1}}$.

1.

Montrer que $v(t) = v_\ell\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution de cette équation, avec $v(0) = 0$, lorsque $v_\ell = \dfrac{A}{B}$ et $\tau = \dfrac{1}{B}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ (outil de mathématiques admis).

CORRIGÉ

Premier membre. En dérivant, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_\ell}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Second membre. $A - B\,v = A - B\,v_\ell + B\,v_\ell\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Or $B\,v_\ell = A$ et $B = \dfrac{1}{\tau}$: il reste $\dfrac{v_\ell}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Valeur initiale. $v(0) = v_\ell\,(1 - 1) = 0$.

Conclusion. Les deux membres sont égaux pour tout $t \geq 0$ et la condition initiale est respectée : la fonction proposée est bien solution.

2.

Calculer la vitesse limite v_ℓ et le temps caractéristique τ.

INDICE

Outil : $v_\ell = \dfrac{A}{B}$ et $\tau = \dfrac{1}{B}$.

CORRIGÉ

Vitesse limite.

$$v_\ell = \frac{8{,}68}{125}$$
$$v_\ell \approx 6{,}94 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Temps caractéristique. $\tau = \dfrac{1}{125} = 8{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

Conclusion. La bille tend vers $6{,}94\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, avec un temps caractéristique de $8{,}00\,\mathrm{ms}$.

3.

Calculer la vitesse de la bille à la date $t = \tau$. Quel pourcentage de v_ℓ représente-t-elle ?

INDICE

Outil : $v(\tau) = v_\ell\,(1 - \mathrm{e}^{-1})$, avec $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

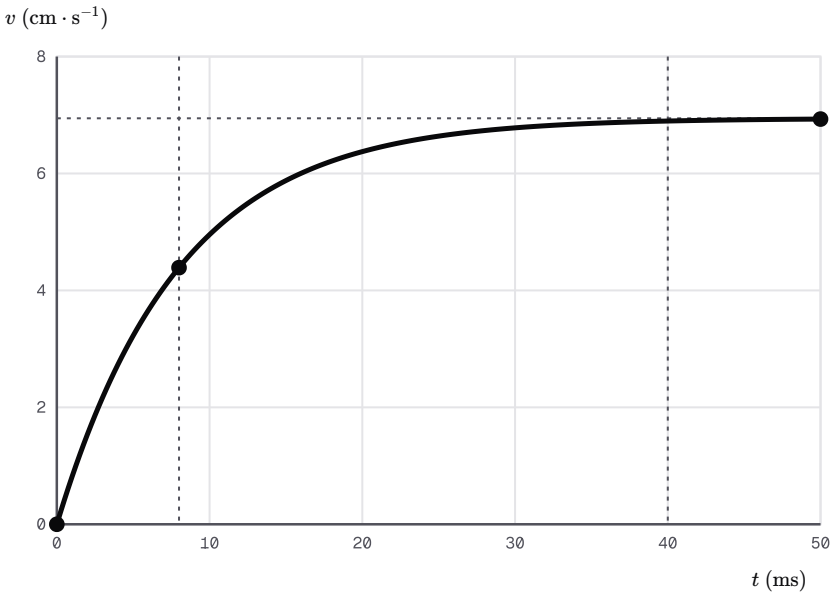
CORRIGÉ

Calcul.

$$v(\tau) = v_\ell \times 0{,}632$$
$$v(\tau) \approx 4{,}39\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

Pourcentage. $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$: la vitesse vaut environ $63\,\%$ de v_ℓ.

Conclusion. À $t = \tau$, la bille n'a pas encore atteint sa vitesse limite : elle en est à $63\,\%$.



Vitesse de la bille de laiton, avec les dates tau et cinq tau

4.

Calculer la vitesse à la date $t = 5\tau$ et conclure sur la durée du régime initial.

INDICE

Outil : $\mathrm{e}^{-5} \approx 6{,}7 \times 10^{-3}$.

CORRIGÉ

Date. $5\tau = 4{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$.

Vitesse.

$$v(5\tau) = v_\ell \times 0{,}993$$
$$v(5\tau) \approx 6{,}90\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

Conclusion. Après $40{,}0\,\mathrm{ms}$, la vitesse dépasse $99\,\%$ de v_ℓ : le régime permanent est atteint en quelques centièmes de seconde.