BURHAN

Chute verticale d'un solide

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/chute-verticale-d-un-solide/cours

Chapitre	Semestre
Chute verticale d'un solide	Semestre 2

Référentiel, axe vertical et forces d'une chute

Deux objets lâchés de la même hauteur

Devine : Ce qui retarde la feuille

Tu lâches ensemble, de $1{,}5\,\mathrm{m}$, une bille d'acier de $30\,\mathrm{g}$ et une feuille de papier de $5\,\mathrm{g}$. La bille touche le sol bien avant la feuille. Quelle explication est juste ?

A. La bille est six fois plus lourde, donc elle tombe six fois plus vite.

Faux.

La masse n'est pas la cause : froissée en boule serrée, la même feuille tombe presque comme la bille.

B. L'air freine beaucoup la feuille étalée, et très peu la bille.

Juste.

Juste : la feuille offre une grande surface à l'air, qui la retient.

C. La poussée de l'air sur la feuille dépasse son poids.

Faux.

Dans ce cas, la feuille monterait. La poussée de l'air sur elle reste très faible.

Correction

La feuille étalée offre une grande surface à l'air, qui la freine. Froissée en boule, elle tombe presque comme la bille, avec la même masse. La différence vient de l'action de l'air, pas de la masse.

Le tube vidé d'air. Un tube de verre long de $1{,}20\,\mathrm{m}$ contient une bille d'acier et une plume. On pompe l'air du tube, puis on le retourne d'un coup.

La bille et la plume tombent côte à côte et arrivent ensemble en bas. Sans air, les deux objets tombent de la même façon. Ce chapitre explique ce résultat, puis étudie ce que change l'air ou un liquide.

Référentiel terrestre et axe vertical orienté

Rappel : la deuxième loi de Newton, vue au chapitre précédent, s'écrit dans un référentiel galiléen

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G.$$

Elle porte sur le **centre d'inertie** G du **système** étudié.

Rappel : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ est vertical, vers le bas, de valeur $P = m\,g$. Au voisinage du sol, $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Le cadre de toute chute. Une chute dure quelques secondes : le **référentiel terrestre** est alors supposé galiléen. Le mouvement de G est vertical. On le repère sur un axe vertical $(O;\vec{k})$.

Tu choisis le sens de l'axe, puis tu l'écris : ici **vers le bas**, sauf mention contraire. Les coordonnées se notent z, v_z et a_z. Une coordonnée est positive quand le vecteur va dans le sens de $\vec{k}$.

Chaque chute se traitera en cinq temps : système, référentiel, axe, bilan des forces, deuxième loi.

Vérifie : Le signe d'une vitesse sur l'axe

Sur un axe $(O;\vec{k})$ vertical **orienté vers le haut**, une bille descend à $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Que vaut v_z ?

A. $v_z = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Faux.
C'est la valeur de la vitesse ; la coordonnée prend le signe du sens de l'axe.

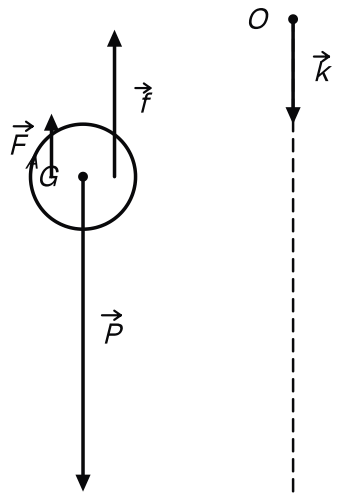
B. $v_z = -9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Faux.
Le nombre $9{,}80$ est la valeur de g, une accélération, pas une vitesse.

C. $v_z = -2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Juste.
Juste : la bille va dans le sens opposé à $\vec{k}$.

D. $v_z = 0$, car l'axe est vertical.
Faux.
Le mouvement est vertical lui aussi : la coordonnée n'est pas nulle.

Correction
La bille descend et l'axe monte : $\vec{v}_G$ et $\vec{k}$ sont de sens opposés. La coordonnée est donc négative, $v_z = -2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Sa valeur absolue est la vitesse.

Les forces exercées par un fluide



Forces sur une bille qui descend dans un fluide : le poids P vers le bas, la poussée F_A et le frottement f vers le haut. L'axe est orienté vers le bas.

Propriété : Poussée d'Archimède

Un solide immergé dans un fluide au repos de masse volumique ρ_f subit de la part du fluide une force verticale, dirigée vers le haut, appelée **poussée d'Archimède** $\vec{F}_A$. Sa valeur est égale au poids du fluide déplacé :

$$F_A = \rho_f \, V \, g,$$

où V est le volume immergé du solide. Pour un solide plein de masse volumique ρ_s totalement immergé, le rapport $\dfrac{F_A}{P}$ vaut $\dfrac{\rho_f}{\rho_s}$.

Exemple : La poussée sur une bille d'acier dans la glycérine

Une bille d'acier de rayon $3{,}0\,\text{mm}$ a une masse $m = 8{,}8 \times 10^{-4}\,\text{kg}$ et un volume $V = 1{,}13 \times 10^{-7}\,\text{m}^3$. Elle est plongée dans la glycérine, de masse volumique $\rho_f = 1{,}26 \times 10^{3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_f \, V \, g \\ &= 1{,}26 \times 10^{3} \times 1{,}13 \times 10^{-7} \\ &\quad \times 9{,}80 \\ &= 1{,}40 \times 10^{-3}\,\text{N} \end{aligned}$$

Le poids vaut $P = m\,g = 8{,}6 \times 10^{-3}\,\text{N}$. La poussée en représente $\dfrac{F_A}{P} = 0{,}16$: on ne peut pas la négliger.

Chiffres significatifs. Un résultat n'est jamais plus précis que les données qui servent à le calculer. Il garde le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en a le moins. Ici, $m = 8{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$ n'en a que deux : P et le rapport $\dfrac{F_A}{P}$ s'écrivent avec deux chiffres.

Toute application numérique suit le même ordre : la formule littérale, puis les valeurs avec leurs unités, puis le résultat avec son unité. Convertis d'abord en unités du système international : grammes en kilogrammes, millimètres en mètres.

Attention : La poussée d'Archimède n'est pas toujours négligeable

✗ « Je néglige toujours la poussée d'Archimède. »

✓ Compare d'abord les masses volumiques : pour un solide plein, $\dfrac{F_A}{P} = \dfrac{\rho_f}{\rho_s}$. Pour l'acier, $\rho_s = 7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Dans l'air, à $1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, le rapport vaut $1{,}5 \times 10^{-4}$: la poussée est négligeable. Dans la glycérine, il vaut $0{,}16$: elle ne l'est pas.

La poussée de l'air sur un ballon

À toi : Poussée et poids d'un ballon lesté

Un ballon de baudruche gonflé et lesté a une masse $m = 20\,\mathrm{g}$, air intérieur compris, et un volume $V = 7{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$. L'air extérieur a pour masse volumique $1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Calcule F_A et P. La poussée est-elle négligeable ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise $F_A = \rho_f\, V\, g$ et $P = m\, g$.
Indice 2
Convertis la masse : $20\,\mathrm{g} = 2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg}$.
Indice 3
Point délicat : le ballon n'est pas un solide plein ; compare F_A à P directement, sans passer par ρ_s.

Réponse

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_f\, V\, g \\ &= 1{,}2 \times 7{,}2 \times 10^{-3} \\ &\quad \times 9{,}80 \\ &= 8{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Le poids vaut $P = m\,g = 2{,}0 \times 10^{-2} \times 9{,}80 = 0{,}20\,\mathrm{N}$. Le rapport $\dfrac{F_A}{P} = 0{,}43$: la poussée vaut près de la moitié du poids. Elle n'est pas négligeable, même dans l'air.

À retenir : Trois forces possibles pendant une chute

- Le **poids** $\vec{P}$, toujours présent, vertical vers le bas.

- La **poussée d'Archimède** $\vec{F}_A$, verticale vers le haut, dès que le solide est dans un fluide ; négligeable si ρ_f est très petite devant ρ_s.
- La **force de frottement fluide** $\vec{f}$, opposée à la vitesse, étudiée plus loin.

Sans les deux dernières, la chute est **libre**.

Chute libre verticale et son équation différentielle

Le modèle de la chute libre

Devine : La plume et la bille dans le tube vidé d'air

Dans le tube vidé d'air, la bille a une masse de $30\,\mathrm{g}$ et la plume de $0{,}10\,\mathrm{g}$. Comment se comparent leurs accélérations ?

A. Celle de la plume est 300 fois plus petite.
Faux.
C'est le rapport des masses ; or les deux objets arrivent ensemble.

B. Elles sont égales.
Juste.
Juste : les deux objets restent côte à côte du début à la fin.

C. Celle de la plume est plus grande, car elle est plus légère.
Faux.
Rien ne tire la plume vers le bas plus fort que son poids.

D. Celle de la plume est nulle : elle flotte.
Faux.
Sans air, rien ne retient la plume : elle tombe.

Correction
Les deux objets restent côte à côte pendant toute la chute. Leurs vitesses sont égales à chaque instant, donc leurs accélérations aussi. Sans air, chacun n'est soumis qu'à son poids. La suite montre pourquoi l'accélération ne dépend pas de la masse.

En clair. Dans le tube vidé, seul le poids agit. Dans l'air, une bille d'acier lâchée de quelques mètres se comporte presque de même. La poussée et le frottement de l'air restent très petits devant son poids. Ce modèle porte un nom.

Définition : Chute libre verticale

Un solide est en **chute libre** lorsqu'il n'est soumis qu'à son **poids**. Si sa vitesse initiale est nulle ou verticale, le mouvement de son centre d'inertie G est rectiligne et vertical : c'est une **chute libre verticale**.

Dans l'air, la chute libre est un **modèle** : il convient lorsque la poussée d'Archimède et le frottement de l'air sont négligeables devant le poids, pour un solide dense et compact qui tombe sur une faible hauteur.

Vérifie : Quel mouvement est une chute libre ?

Lequel de ces mouvements peut être modélisé par une chute libre ?

A. Une bille d'acier lâchée d'un balcon.

Juste.

Juste : dense et compacte, elle subit très peu l'action de l'air sur quelques mètres.

B. Une feuille de papier étalée, lâchée de $1{,}5\,\mathrm{m}$.

Faux.

L'air la freine fortement : le frottement n'est pas négligeable.

C. Le ballon de baudruche lesté, lâché d'un balcon.

Faux.

La poussée de l'air vaut près de la moitié de son poids.

D. Une bille d'acier qui tombe dans la glycérine.

Faux.

Le liquide exerce une poussée et un frottement importants.

Correction

La bille d'acier dans l'air est dense, compacte, et tombe sur une faible hauteur. La poussée et le frottement de l'air y sont négligeables devant le poids. La feuille, le ballon et la bille dans la glycérine subissent des forces du fluide qui comptent.

Appliquer la deuxième loi à la chute libre

Exemple : L'équation différentielle de la bille dans le tube

Établissons l'équation pour la bille dans le tube vidé d'air.

- **Système** : la bille, de masse m. **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
- **Axe** : $(O;\vec{k})$ vertical, orienté vers le bas.
- **Bilan des forces** : le poids seul, $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$.
- **Deuxième loi de Newton** : $m\,g\,\vec{k} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = g\,\vec{k}$.

En projection sur l'axe, $a_z = g$, soit

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g.$$

La masse a disparu du résultat.

Vérifie : Où la masse disparaît

Dans l'équation $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g$, la masse de la bille n'apparaît pas. Pourquoi ?

A. Parce que la masse de la bille, très petite, a été négligée dans le bilan.

Faux.

La masse n'est pas négligée : elle figure dans les deux membres de la loi.

B. Parce que le vide supprime la masse des objets.

Faux.

Le vide supprime l'air, pas la masse : la bille garde ses 30 g.

C. Parce qu'elle figure dans le poids et dans $m\,\vec{a}_G$, et se simplifie.

Juste.

Juste : le poids est proportionnel à la masse, comme le produit $m\,\vec{a}_G$.

Correction

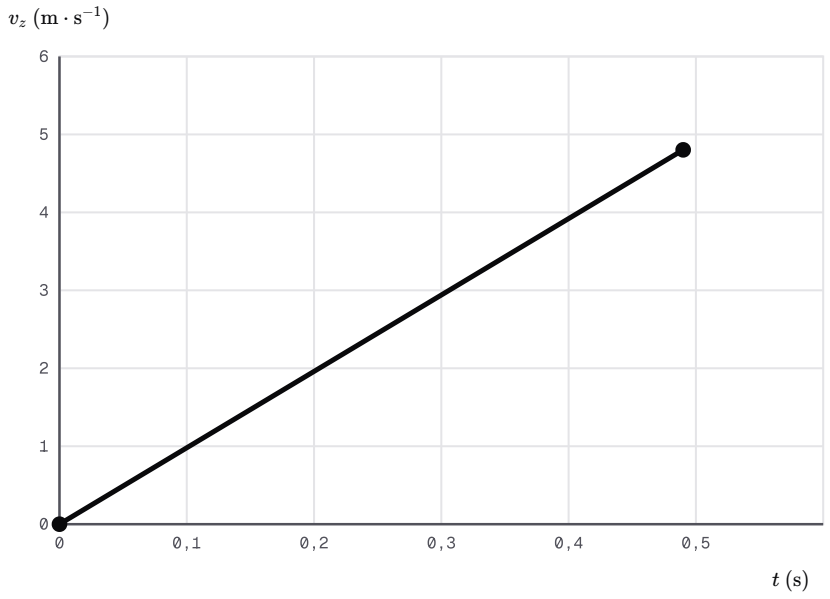
La masse apparaît deux fois : dans le poids, $m\,\vec{g}$, et dans le membre $m\,\vec{a}_G$ de la deuxième loi. Elle se simplifie. Toute chute libre a donc la même accélération, $\vec{g}$, quelle que soit la masse.

Attention : La chute libre ne dépend pas de la masse

✗ « Une boule de $1\,\mathrm{kg}$ tombe plus vite qu'une bille de $10\,\mathrm{g}$. »

✓ En chute libre, les deux ont la même accélération g : lâchées ensemble, elles arrivent ensemble. Si une feuille tombe plus lentement, c'est à cause du frottement de l'air, pas de sa masse. Cette règle ne vaut que si l'air est négligeable.

Une vitesse proportionnelle au temps



Vitesse de la bille dans le tube vidé d'air, axe vers le bas : une droite issue de l'origine, de pente g, jusqu'au bas du tube.

Lire la droite. L'équation $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g$ dit que v_z gagne $9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par seconde. Lâchée sans vitesse, la bille a donc, à la date $t = 0{,}40\,\mathrm{s}$:

$$\begin{aligned} v_z &= g\,t \\ &= 9{,}80 \times 0{,}40 \\ &= 3{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Le résultat garde deux chiffres, comme $0{,}40\,\mathrm{s}$.

Changer le sens de l'axe vertical

Axe vers le haut. Pour une balle lancée vers le haut, on oriente souvent l'axe $(O;\vec{k})$ vers le haut. Le poids s'écrit alors $\vec{P} = -m\,g\,\vec{k}$. La deuxième loi donne $a_z = -g$, soit

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g.$$

La physique ne change pas : $\vec{a}_G = \vec{g}$ reste vers le bas. Seule l'écriture en coordonnées change de signe.

> **Trouve l'erreur : Une équation écrite sur un axe vers le haut**
>
> Une élève étudie la balle de tennis lancée vers le haut, avec un axe $(O;\vec{k})$ orienté vers le haut. Elle écrit : « Pendant la montée, $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g$. » Où est l'erreur ?
>
> **A.** Sur cet axe, $a_z = -g$: le signe moins manque.
>
> **Juste.**
> Juste : $\vec{g}$ est vers le bas, opposé à $\vec{k}$.
>
> **B.** Il n'y a pas d'erreur : l'accélération vaut toujours g.

Faux.
La valeur de l'accélération est g, mais sa coordonnée dépend du sens de l'axe.

C. Pendant la montée, l'accélération est nulle.
Faux.
Elle n'est jamais nulle : seul le poids agit, à la montée comme au sommet.

Correction
Le poids est vers le bas et l'axe vers le haut : $\vec{P} = -m\,g\,\vec{k}$. La deuxième loi donne $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$, à la montée comme à la descente. La vitesse diminue pendant la montée : c'est cohérent.

Équation de la balle de tennis, axe vers le bas

Attention : Le signe de g dépend de l'orientation de l'axe

✗ « Une vitesse vers le haut est toujours positive. »

✓ Avec un axe orienté vers le bas, $a_z = +g$, et une vitesse vers le haut a une coordonnée **négative**. Avec un axe orienté vers le haut, $a_z = -g$. Choisis l'axe avant d'écrire les équations, écris son sens, et garde-le jusqu'au bout.

À toi : L'équation de la balle lancée vers le haut

La balle de tennis est lancée vers le haut à $12{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Cette fois, l'axe $(O;\vec{k})$ est orienté **vers le bas**. On néglige l'air. Établis l'équation différentielle de son mouvement. Que vaut v_z juste après le lancer ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suis les cinq temps : système, référentiel, axe, bilan des forces, deuxième loi.
Indice 2
Sur cet axe, le poids s'écrit $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$.
Indice 3
Point délicat : la vitesse initiale est vers le haut, opposée à $\vec{k}$.

Réponse
Système : la balle. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Seul le poids agit, $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$. La deuxième loi donne $\vec{a}_G = g\,\vec{k}$, donc

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g.$$

Juste après le lancer, la vitesse est vers le haut : $v_z = -12{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. L'équation est celle d'un lâcher ; seule la condition initiale change.

Mouvement rectiligne uniformément varié et équations horaires

Une accélération constante sur une droite

Devine : Le gain de vitesse en un dixième de seconde

Dans le tube vidé d'air, $a_z = g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ reste constante. De combien la vitesse de la bille augmente-t-elle entre $0{,}10\,\mathrm{s}$ et $0{,}20\,\mathrm{s}$? Et entre $0{,}30\,\mathrm{s}$ et $0{,}40\,\mathrm{s}$?

A. De plus en plus, car la bille va de plus en plus vite.

Faux.
C'est la distance parcourue en $0{,}10\,\mathrm{s}$ qui augmente, pas le gain de vitesse.

B. De $9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ chaque fois.

Faux.
$9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ est le gain en une seconde entière, pas en un dixième.

C. De $0{,}98\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ chaque fois.

Juste.
Juste : une accélération constante ajoute la même vitesse pendant des durées égales.

Correction
Le gain vaut g multiplié par la durée : $9{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}98\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, dans les deux intervalles. La vitesse varie uniformément : la définition suivante nomme ce mouvement.

Définition : Mouvement rectiligne uniformément varié

Un point mobile est en **mouvement rectiligne uniformément varié** lorsque sa trajectoire est une droite et que son vecteur accélération est **constant** et non nul, de même direction que la trajectoire.

Sur un axe $(O;\vec{i})$ porté par la trajectoire, la coordonnée a_x de l'accélération est alors une constante. Le mouvement est **uniformément accéléré** quand $a_x\,v_x > 0$ et **uniformément retardé** quand $a_x\,v_x < 0$.

Exemple : Accéléré à la descente, retardé à la montée

- La bille lâchée dans le tube, axe vers le bas : $v_z > 0$ et $a_z = g > 0$. Le produit $a_z\,v_z$ est positif : mouvement **uniformément accéléré**.
- La balle de tennis qui monte, axe vers le haut : $v_z > 0$ et $a_z = -g < 0$. Le produit est négatif : mouvement **uniformément retardé**.

Les deux mouvements ont la même accélération $\vec{g}$; seul le sens de la vitesse les distingue.

Vérifie : La balle qui redescend

La balle de tennis redescend après le sommet. L'axe $(O;\vec{k})$ est toujours orienté vers le haut. Son mouvement est-il accéléré ou retardé ?

A. Accéléré, car $v_z < 0$ et $a_z < 0$.

Juste.

Juste : le produit $a_z\, v_z$ est positif.

B. Retardé, car $a_z < 0$.

Faux.

Le signe de a_z seul ne suffit pas : il faut aussi celui de v_z.

C. Uniforme, car l'accélération est constante.

Faux.

Uniforme veut dire vitesse constante ; ici, c'est l'accélération qui l'est.

Correction

À la descente, $v_z < 0$ sur cet axe, et $a_z = -g < 0$. Le produit $a_z\, v_z$ est positif : le mouvement est uniformément accéléré. La valeur de la vitesse augmente, comme pour tout objet qui tombe.

Primitives et conditions initiales

Outil admis. En mathématiques, une **primitive** d'une fonction f est une fonction dont la dérivée est f. Les primitives de la constante a sont les fonctions $t \mapsto a\,t + C$, où C est une constante. Une **condition initiale**, comme la vitesse à $t = 0$, fixe C. Si ce chapitre de mathématiques n'est pas encore vu, retiens seulement cette propriété.

Propriété : Équations horaires d'un mouvement rectiligne uniformément varié

Pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération a_x constante, de vitesse initiale v_{0x} et d'abscisse initiale x_0 à l'instant $t = 0$:

$$v_x(t) = a_x\, t + v_{0x},$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a_x\, t^2 + v_{0x}\, t + x_0.$$

Entre deux instants quelconques, la vitesse et l'abscisse vérifient aussi, indépendamment du temps :

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2\, a_x\, (x - x_0).$$

Démonstration

Étape 1. Par définition du vecteur accélération, $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x$, constante. Les primitives de la fonction constante a_x sont les fonctions $t \mapsto a_x\, t + C_1$; la condition initiale $v_x(0) = v_{0x}$ donne $C_1 = v_{0x}$, d'où $v_x(t) = a_x\, t + v_{0x}$.

Étape 2. Par définition du vecteur vitesse, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_x\,t + v_{0x}$. Ses primitives sont $t \mapsto \dfrac{1}{2}\,a_x\,t^2 + v_{0x}\,t + C_2$; la condition $x(0) = x_0$ donne $C_2 = x_0$.

Étape 3. Si $a_x \neq 0$, la première relation donne $t = \dfrac{v_x - v_{0x}}{a_x}$. En reportant dans la seconde et en développant :

$$x - x_0 = \frac{(v_x - v_{0x})\,v_{0x}}{a_x} + \frac{(v_x - v_{0x})^2}{2\,a_x}.$$

Étape 4. En réduisant au même dénominateur, $2\,a_x\,(x - x_0) = 2\,v_x v_{0x} - 2\,v_{0x}^2 + v_x^2 - 2\,v_x v_{0x} + v_{0x}^2 = v_x^2 - v_{0x}^2$.

Exemple : Position et vitesse de la bille dans le tube

Sur l'axe vertical, x devient z. Axe vers le bas, origine au point de lâcher : $z_0 = 0$, $v_{0z} = 0$ et $a_z = g$. À $t = 0{,}30\,\mathrm{s}$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\,g\,t^2 \\ &= 0{,}5 \times 9{,}80 \times 0{,}30^2 \\ &= 0{,}44\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

et $v_z = g\,t = 2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. En bas du tube, $z = 1{,}20\,\mathrm{m}$; sans la date :

$$\begin{aligned} v_z &= \sqrt{2\,g\,z} \\ &= \sqrt{2 \times 9{,}80 \times 1{,}20} \\ &= 4{,}85\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Vérifie : Une vitesse sans connaître la date

On connaît v_{0z}, a_z et la position atteinte, mais pas la date. Quelle relation donne directement la vitesse ?

A. $v_z = a_z\,t + v_{0z}$

Faux.

Elle exige la date t, inconnue ici.

B. $v_z^2 - v_{0z}^2 = 2\,a_z\,(z - z_0)$

Juste.

Juste : elle ne contient pas le temps.

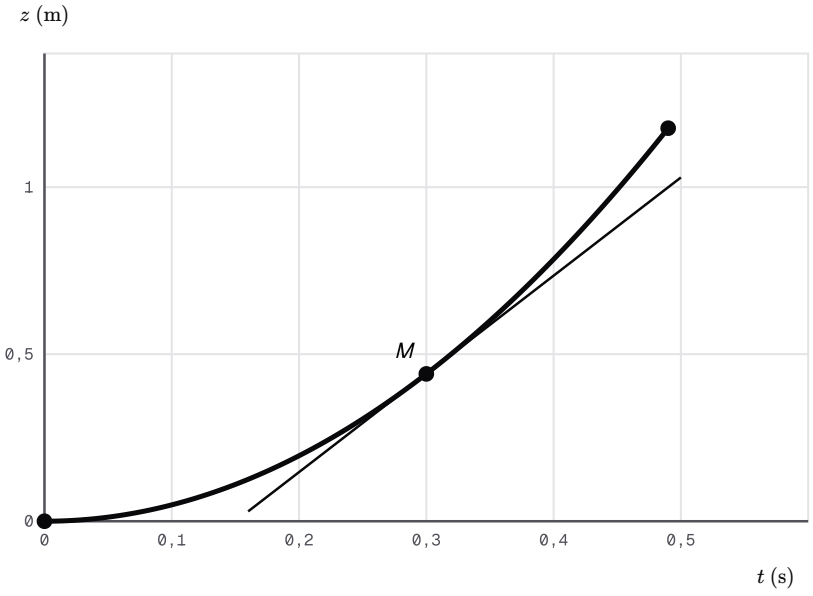
C. $z = \dfrac{1}{2}\,a_z\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0$

Faux.

Elle relie la position et la date ; la vitesse n'y figure pas.

Correction
La relation $v_z^2 - v_{0z}^2 = 2\,a_z\,(z - z_0)$ ne contient pas t. Elle donne v_z^2, puis v_z, dès que la position est connue. Le signe de v_z se choisit ensuite d'après le sens du mouvement.

La vitesse, pente de la courbe des positions



Position z(t) de la bille dans le tube vidé d'air, axe vers le bas, et tangente en t = 0,30 s : sa pente est la vitesse à cette date.

Tangente calculée en x = 0,3 : coefficient directeur ≈ 2,94.

Lire une vitesse sur la courbe des positions. Par définition, $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$: la vitesse à une date est la pente de la tangente à la courbe $z(t)$ à cette date. Sur la figure, la tangente en $t = 0{,}30\,\mathrm{s}$ a une pente d'environ $2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: c'est la valeur $g\,t$ trouvée plus haut. La courbe $v_z(t)$, elle, est une droite de pente a_z : c'est le **diagramme des vitesses**.

Vérifie : Ce que mesure une pente

Sur le diagramme $v_z(t)$ d'un mouvement rectiligne uniformément varié, que représente la pente de la droite ?

A. La vitesse initiale v_{0z}.

Faux.
C'est l'ordonnée à l'origine de la droite, pas sa pente.

B. La distance parcourue.

Faux.
Une distance se lit sur la courbe des positions, pas sur la pente du diagramme des vitesses.

C. L'accélération a_z.

Juste.

Juste : la droite a pour équation $v_z = a_z\,t + v_{0z}$.

Correction

La droite a pour équation $v_z = a_z\,t + v_{0z}$: sa pente est a_z, son ordonnée à l'origine v_{0z}. Une pente positive sur un axe vers le bas traduit une vitesse vers le bas qui augmente.

Date et vitesse à mi-hauteur du tube

À toi : La bille à 0,80 m sous le point de lâcher

Dans le tube vidé d'air, la bille est lâchée sans vitesse. Calcule la date à laquelle elle a parcouru $0{,}80\,\mathrm{m}$, puis sa vitesse à cet endroit. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, avec l'origine au point de lâcher.

Indice 2

Résous $z = 0{,}80\,\mathrm{m}$ pour $t > 0$, puis calcule $v_z = g\,t$.

Indice 3

Point délicat : la solution négative n'a pas de sens ici ; vérifie aussi par la relation indépendante du temps.

Réponse

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2\,z}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 0{,}80}{9{,}80}} \\ &= 0{,}40\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Sans la date, la relation indépendante du temps donne

$$\begin{aligned} v_z &= \sqrt{2\,g\,z} \\ &= \sqrt{2 \times 9{,}80 \times 0{,}80} \\ &= 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

On retrouve $v_z = g\,t \approx 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: les deux chemins s'accordent.

À retenir : Trois relations du mouvement uniformément varié

Pour une accélération constante a_z :

- $v_z(t) = a_z\,t + v_{0z}$, une droite ;
- $z(t) = \dfrac{1}{2}\,a_z\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0$;
- $v_z^2 - v_{0z}^2 = 2\,a_z\,(z - z_0)$, sans le temps.

Les deux premières viennent des primitives ; la troisième, de leur combinaison.

Équations horaires de la chute libre : lâcher et lancer vertical

Durée de chute et vitesse d'arrivée

Devine : Une hauteur quatre fois plus grande

Une bille d'acier lâchée d'un balcon met une certaine durée pour atteindre le sol. Lâchée d'une hauteur quatre fois plus grande, l'air restant négligeable, sa durée de chute est :

A. multipliée par 4.
Faux.
La position croît comme t^2 : quatre fois plus haut ne demande pas quatre fois plus de temps.

B. multipliée par 16.
Faux.
C'est l'erreur inverse : 4 a été élevé au carré au lieu d'en prendre la racine.

C. multipliée par 2.
Juste.
Juste : la hauteur est proportionnelle à t^2, donc la durée à sa racine carrée.

D. inchangée.
Faux.
Une chute plus haute dure plus longtemps : la vitesse part de zéro dans les deux cas.

Correction

Lâchée sans vitesse, la bille vérifie $h = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, d'où $t = \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}$. Multiplier h par 4 multiplie donc la durée par $\sqrt{4} = 2$.

Propriété : Équation différentielle et équations horaires de la chute libre verticale

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, rapporté à un axe vertical $(O;\vec{k})$ **orienté vers le bas**, le centre d'inertie G d'un solide en chute libre verticale vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g.$$

Son mouvement est rectiligne uniformément varié, d'accélération $a_z = g$ indépendante de la masse. Avec $v_z(0) = v_{0z}$ et $z(0) = z_0$:

$$v_z(t) = g\,t + v_{0z},$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0.$$

Démonstration

Étape 1. Système : le solide, de masse m. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Axe : $(O;\vec{k})$ vertical, orienté vers le bas.

Étape 2. Bilan des forces : en chute libre, le solide n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, avec $\vec{g} = g\,\vec{k}$.

Étape 3. D'après la deuxième loi de Newton, $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$. En projection sur l'axe, $a_z = g$, soit $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g$. La masse s'est simplifiée.

Étape 4. L'accélération est constante et verticale ; la vitesse initiale est nulle ou verticale : le mouvement est rectiligne uniformément varié. Les équations horaires de ce mouvement, écrites avec $a_z = g$, donnent $v_z(t) = g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_0$.

Exemple : La bille lâchée d'un balcon de 11,0 m

Axe $(O;\vec{k})$ vers le bas, origine au balcon, date nulle au lâcher : $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$. Le sol est atteint pour $z = h = 11{,}0\,\mathrm{m}$:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 11{,}0}{9{,}80}} \\ &= 1{,}50\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

La vitesse d'arrivée vaut alors $v_z = g\,t = 14{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit $14{,}7 \times 3{,}6 = 52{,}9\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Une balle de tennis lancée vers le haut

La balle de tennis. Une balle est lancée verticalement vers le haut, à $v_0 = 12{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On néglige l'air. On choisit cette fois un axe $(O;\vec{k})$ vertical **orienté vers le haut**, l'origine au point de lancer et la date nulle au lancer. Alors $a_z = -g$, et

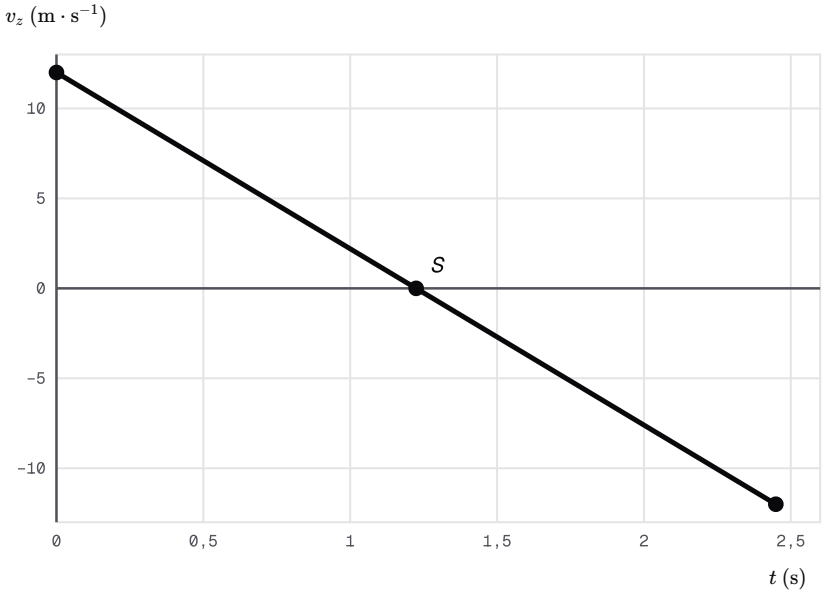
$$v_z(t) = -g\,t + v_0,$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t.$$

Méthode : Exploiter les équations horaires d'une chute libre

1. **Choisis** l'origine des dates, puis l'origine et le sens de l'axe vertical. Écris $a_z = g$ pour un axe vers le bas, $a_z = -g$ pour un axe vers le haut.
2. **Écris** $v_z(t)$ et $z(t)$ avec les conditions initiales v_{0z} et z_0.
3. **Traduis** la question par une condition : position atteinte, sommet ($v_z = 0$), retour au point de départ.

4. **Résous** pour obtenir la date, puis calcule la vitesse. Sans la date, emploie $v_z^2 - v_{0z}^2 = 2\,a_z\,(z - z_0)$.



Vitesse de la balle lancée vers le haut, axe vers le haut : v_z décroît de 12 m/s à 0 au sommet S, puis devient négative.

Le sommet et le retour au point de lancer

Exemple : Date du sommet et hauteur maximale

Au sommet, la vitesse s'annule : $v_z = 0$, d'où

$$\begin{aligned} t_S &= \frac{v_0}{g} = \frac{12{,}0}{9{,}80} \\ &= 1{,}22\,\text{s} \end{aligned}$$

La relation indépendante du temps, avec $v_z = 0$ et $a_z = -g$, donne la hauteur atteinte :

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{v_0^2}{2\,g} \\ &= \frac{12{,}0^2}{2 \times 9{,}80} \\ &= 7{,}35\,\text{m} \end{aligned}$$

Vérifie : L'accélération au sommet

Au sommet, la vitesse de la balle est nulle. Que vaut alors son accélération ?

A. Elle est nulle, puisque la balle est immobile à cet instant précis.
Faux.

Immobile un instant, la balle voit sa vitesse continuer de changer : elle redescend.

B. Elle est dirigée vers le haut, pour arrêter la balle.
Faux.
Aucune force ne tire la balle vers le haut après le lancer.

C. Elle vaut $\vec{g}$, vers le bas, comme à tout instant.
Juste.
Juste : seul le poids agit, à chaque instant de la chute libre.

Correction
Après le lancer, la balle n'est soumise qu'à son poids : $\vec{a}_G = \vec{g}$ à chaque instant, sommet compris. Une vitesse nulle n'implique pas une accélération nulle. Sur le diagramme, la droite traverse l'axe des temps avec la même pente.

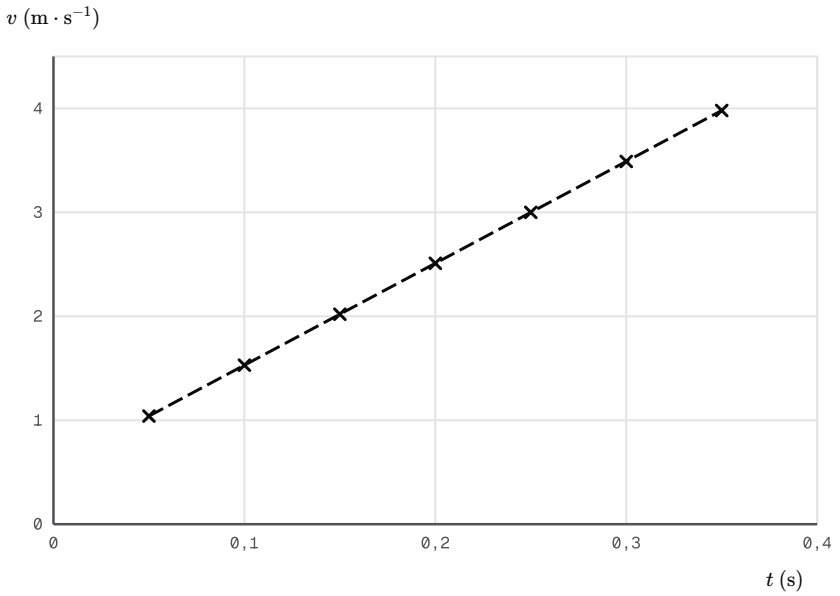
Le retour au point de lancer. La balle revient en $z = 0$: $-\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t = 0$, soit $t\left(v_0 - \dfrac{g\,t}{2}\right) = 0$. La date non nulle est $t = \dfrac{2\,v_0}{g} = 2{,}45\,\mathrm{s}$, deux fois la date du sommet. Sa vitesse vaut alors $v_z = -g\,t + v_0 = -12{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: même valeur qu'au départ, sens opposé. Quand l'air est négligeable, la montée et la descente sont symétriques.

Mesurer g sur une chronophotographie

Une mesure de g. Une balle de golf est lâchée devant une règle verticale. Un appareil la photographie toutes les $50\,\mathrm{ms}$; la première image est prise peu après le lâcher. On repère ses positions z_i sur un axe vers le bas. La vitesse à la date t_i se calcule par

$$v(t_i) = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}.$$

i	t_i (s)	z_i (cm)	v ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)
0	0,00	0,0	
1	0,05	4,0	1,04
2	0,10	10,4	1,53
3	0,15	19,3	2,02
4	0,20	30,6	2,51
5	0,25	44,4	3,00
6	0,30	60,6	3,49
7	0,35	79,3	3,98
8	0,40	100,4	



× $v(t_i)$ – – – Droite de modélisation

Vitesses de la balle de golf calculées sur la chronophotographie et droite de modélisation : sa pente donne g.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 7 points : y = a x + b, avec a ≈ 9,8 et b ≈ 0,55.

Exemple : La pente de la droite de modélisation

Les points sont alignés : v est une fonction affine du temps, l'accélération est constante. La pente de la droite vaut $a_z \approx 9{,}80\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$: c'est l'intensité de la pesanteur, à la précision de la mesure.

L'ordonnée à l'origine, environ $0{,}55\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, est la vitesse de la balle à la première image : elle était déjà lâchée. Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, comme le prévoit la chute libre.

La balle de tennis à 5,0 m de hauteur

À toi : Vitesse de passage à 5,0 m

Reprends la balle de tennis lancée à $12{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, axe vers le haut. Calcule sa vitesse quand elle passe à $5{,}0\,\mathrm{m}$ au-dessus du point de lancer, à la montée puis à la descente. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La date est inconnue : emploie la relation indépendante du temps.
Indice 2
Avec $a_z = -g$ et $z_0 = 0$: $v_z^2 = v_0^2 - 2\,g\,z$.
Indice 3
Point délicat : v_z^2 admet deux racines ; la montée et la descente en prennent chacune une.

Réponse

$$\begin{aligned} v_z^2 &= v_0^2 - 2\,g\,z \\ &= 12{,}0^2 - 2 \times 9{,}80 \times 5{,}0 \\ &= 46\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

D'où une vitesse de valeur $\sqrt{46} = 6{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. À la montée, $v_z = +6{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; à la descente, $v_z = -6{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Même valeur, sens opposés.

À retenir : Choisir l'axe, puis traduire la question

- Le sens de l'axe fixe le signe de a_z : $+g$ vers le bas, $-g$ vers le haut.
- Une position atteinte, un sommet ou un retour se traduit par une condition sur z ou sur v_z.
- Sans la date, la relation indépendante du temps donne directement la vitesse.
- Quand l'air est négligeable, la durée de chute ne dépend pas de la masse.

Frottement fluide et équation différentielle de la chute

Une bille d'acier dans la glycérine

Une mesure d'abord. La bille d'acier de rayon $3{,}0\,\mathrm{mm}$ est lâchée sans vitesse à la surface d'une éprouvette de glycérine. Des repères sont tracés tous les $5{,}0\,\mathrm{cm}$. Après les premiers millimètres, la bille met toujours $0{,}55\,\mathrm{s}$ pour aller d'un repère au suivant. Sa vitesse est alors constante :

$$\begin{aligned} v &= \frac{5{,}0 \times 10^{-2}}{0{,}55} \\ &= 9{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Dans l'air, la même bille gagnerait $9{,}80\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ chaque seconde.

Devine : Pourquoi la vitesse cesse d'augmenter

Dans la glycérine, la vitesse de la bille augmente, puis reste constante. Quelle hypothèse explique ce palier ?

A. Le poids de la bille diminue pendant la descente.
Faux.
Le poids $m\,g$ ne change pas : la masse et g sont constantes.

B. La poussée d'Archimède augmente avec la vitesse.
Faux.
La poussée dépend du volume immergé, pas de la vitesse.

C. La bille approche du fond et ralentit.
Faux.
Le palier commence loin du fond : la vitesse reste constante sur plusieurs repères.

D. Une force de frottement croît avec la vitesse jusqu'à compenser les autres forces.

Juste.

Juste : les forces se compensent alors, et la vitesse ne change plus.

Correction

Une vitesse constante sur une trajectoire rectiligne signifie une accélération nulle. D'après la deuxième loi, la somme des forces est alors nulle. Le poids et la poussée sont constants : seule une force qui dépend de la vitesse explique ce palier. C'est le **frottement fluide**.

Deux modèles de frottement et l'unité de k

Définition : Force de frottement fluide : deux modèles

Un solide en mouvement dans un fluide subit une **force de frottement fluide** $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse de son centre d'inertie. Pour un mouvement vertical selon $(O;\vec{k})$ avec $v_z > 0$, on retient l'un de deux modèles :

- aux faibles vitesses, $\vec{f} = -k\,v_z\,\vec{k}$, de valeur $f = k\,v$;
- aux vitesses plus grandes, $\vec{f} = -k\,v_z^2\,\vec{k}$, de valeur $f = k\,v^2$.

Le coefficient k est positif ; il dépend de la forme et de la taille du solide, et du fluide. Son unité est $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ dans le premier modèle et $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ dans le second.

Exemple : L'unité de k par une équation aux dimensions

Une force a pour dimension $[f] = \mathrm{M\cdot L\cdot T^{-2}}$, une vitesse $[v] = \mathrm{L\cdot T^{-1}}$.

- Modèle $f = k\,v$: $[k] = \dfrac{[f]}{[v]} = \mathrm{M\cdot T^{-1}}$, donc k s'exprime en $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.
- Modèle $f = k\,v^2$: $[k] = \dfrac{[f]}{[v]^2} = \mathrm{M\cdot L^{-1}}$, donc en $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$.

L'unité de k dit donc quel modèle un énoncé emploie.

Vérifie : Un coefficient donné avec son unité

Un énoncé donne, pour le ballon de baudruche lesté, $k = 1{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Quel modèle de frottement emploie-t-il ?

A. $f = k\,v$

Faux.

Dans ce modèle, k s'exprime en $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.

B. On ne peut pas savoir sans valeur de la vitesse.

Faux.

L'unité suffit : une équation aux dimensions se vérifie sans valeur.

C. $f = k\,v^2$

Juste.

Juste : $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est l'unité de k dans le second modèle.

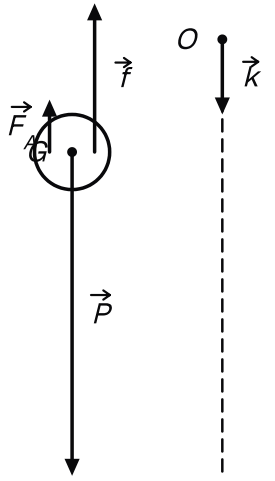
Correction

Avec $f = k\,v^2$, le coefficient $k = \dfrac{f}{v^2}$ s'exprime en $\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. C'est le modèle des vitesses plus grandes, cohérent avec un ballon qui tombe à quelques mètres par seconde.

Bilan des forces et deuxième loi projetée

Méthode : Établir l'équation différentielle d'une chute verticale

1. **Définis le système** étudié, puis choisis le **référentiel** terrestre, supposé galiléen.
2. **Choisis l'axe** vertical $(O;\vec{k})$, écris son sens, et ne le change plus.
3. **Dresse le bilan des forces** sur un schéma : le poids ; la poussée d'Archimède si le solide est dans un fluide ; le frottement fluide, opposé à la vitesse.
4. **Applique la deuxième loi de Newton**, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, et **projette**-la sur l'axe.
5. **Isole** $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, puis nomme les constantes et donne leurs unités.



Forces sur la bille d'acier dans la glycérine quand elle descend à 5,0 cm/s, longueurs proportionnelles : P vaut 8,6 mN, f 4,0 mN, F_A 1,4 mN.

Propriété : Équation différentielle de la chute verticale avec frottement

Un solide de masse m et de volume V tombe verticalement dans un fluide de masse volumique ρ_f, avec $m > \rho_f V$. Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, avec un axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté vers le bas, la coordonnée v de la vitesse de son centre d'inertie vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^{n},$$

avec $n = 1$ ou $n = 2$ selon le modèle de frottement, et les constantes positives

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_f V}{m}\right), \qquad B = \frac{k}{m}.$$

Démonstration

Étape 1. Système : le solide, de masse m constante et de volume V. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Axe : $(O;\vec{k})$ vertical, orienté vers le bas ; on note $v = v_z > 0$.

Étape 2. Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{k}$; la poussée d'Archimède $\vec{F}_A = -\rho_f\,V\,g\,\vec{k}$; la force de frottement fluide $\vec{f} = -k\,v^{n}\,\vec{k}$.

Étape 3. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$. En projection sur l'axe :

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - \rho_f\,V\,g - k\,v^{n}.$$

Étape 4. En divisant par m : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \dfrac{\rho_f V}{m}\right) - \dfrac{k}{m}\,v^{n}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^{n}$. Le solide descend parce que son poids l'emporte sur la poussée : $m > \rho_f V$, donc $A > 0$.

Les constantes A et B de la bille d'acier

Exemple : Le calcul de A et B pour la bille d'acier

Pour la bille, $m = 8{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$, $V = 1{,}13 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^3}$ et $\rho_f = 1{,}26 \times 10^{3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Le modèle linéaire convient, avec $k = 7{,}92 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Le rapport $\dfrac{\rho_f V}{m}$ vaut $0{,}162$, d'où

$$\begin{aligned} A &= g\left(1 - \frac{\rho_f V}{m}\right) \\ &= 9{,}80 \times (1 - 0{,}162) \\ &= 8{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{k}{m} \\ &= \frac{7{,}92 \times 10^{-2}}{8{,}8 \times 10^{-4}} \\ &= 9{,}0 \times 10^{1}\,\mathrm{s^{-1}} \end{aligned}$$

L'équation s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8{,}2 - 90\,v$, en unités du système international.

Trouve l'erreur : Une constante A trop grande

Pour la même bille, un élève écrit $A = g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Quelle force a-t-il oubliée ?

A. La poussée d'Archimède.

Juste.

Juste : elle retire $\dfrac{\rho_f\,V\,g}{m}$ à g.

B. Le frottement fluide exercé par la glycérine.

Faux.

Le frottement figure dans le terme $B\,v$, pas dans A.

C. Le poids.

Faux.

Le poids donne justement le terme g de A.

Correction

Dans l'équation, A regroupe les forces constantes, divisées par m : le poids, g, moins la poussée, $\dfrac{\rho_f\,V\,g}{m}$. Écrire $A = g$ revient à oublier la poussée, qui vaut ici $16\,\%$ du poids. Le frottement, lui, donne le terme $-B\,v$.

Unités de A et B. A est une accélération, en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Le produit $B\,v^n$ en est une aussi. Dans le modèle linéaire, $B = \dfrac{k}{m}$ s'exprime en $\dfrac{\mathrm{kg\cdot s^{-1}}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{s^{-1}}$; dans le modèle quadratique, en $\mathrm{m^{-1}}$. Vérifier ces unités contrôle l'équation établie.

Les constantes du ballon lesté

À toi : A et B pour le ballon de baudruche

Le ballon lesté a une masse $m = 20\,\mathrm{g}$ et un volume $V = 7{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{m^3}$. L'air a pour masse volumique $1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, et le frottement suit $f = k\,v^2$, avec $k = 1{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Calcule A et B, avec leurs unités. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les constantes sont $A = g\left(1 - \dfrac{\rho_f\,V}{m}\right)$ et $B = \dfrac{k}{m}$.

Indice 2

Convertis d'abord : $m = 2{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{kg}$.

Indice 3

Point délicat : dans ce modèle, B s'exprime en $\mathrm{m^{-1}}$, pas en $\mathrm{s^{-1}}$.

Réponse

Le rapport des masses vaut

$$\frac{\rho_f V}{m} = \frac{1{,}2 \times 7{,}2 \times 10^{-3}}{2{,}0 \times 10^{-2}} = 0{,}43$$

Alors

$$A = 9{,}80 \times (1 - 0{,}43) = 5{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$B = \frac{1{,}3 \times 10^{-2}}{2{,}0 \times 10^{-2}} = 0{,}65\,\mathrm{m^{-1}}$$

L'équation est $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 5{,}6 - 0{,}65\,v^2$.

À retenir : Ce que contient chaque terme de l'équation

- A : le poids diminué de la poussée, par unité de masse ; positif quand le solide est plus dense que le fluide.
- $B\,v^n$: le frottement par unité de masse, qui croît avec la vitesse.
- n : 1 pour le modèle linéaire, 2 pour le modèle quadratique.

L'équation ne vaut que pour un solide qui descend, sur un axe orienté vers le bas.

Vitesse limite, temps caractéristique et régimes

Régime initial et régime permanent

Devine : La vitesse qui annule l'accélération

La bille d'acier obéit à $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8{,}2 - 90\,v$, en unités du système international. Pour quelle vitesse son accélération devient-elle nulle ?

A. $v = \dfrac{8{,}2}{90} = 0{,}091\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Juste.
Juste : $8{,}2 - 90\,v = 0$ pour cette vitesse.

B. $v = 8{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Faux.
C'est la valeur de A, une accélération.

C. $v = 0$
Faux.
À $v = 0$, l'accélération vaut $8{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$: elle est maximale.

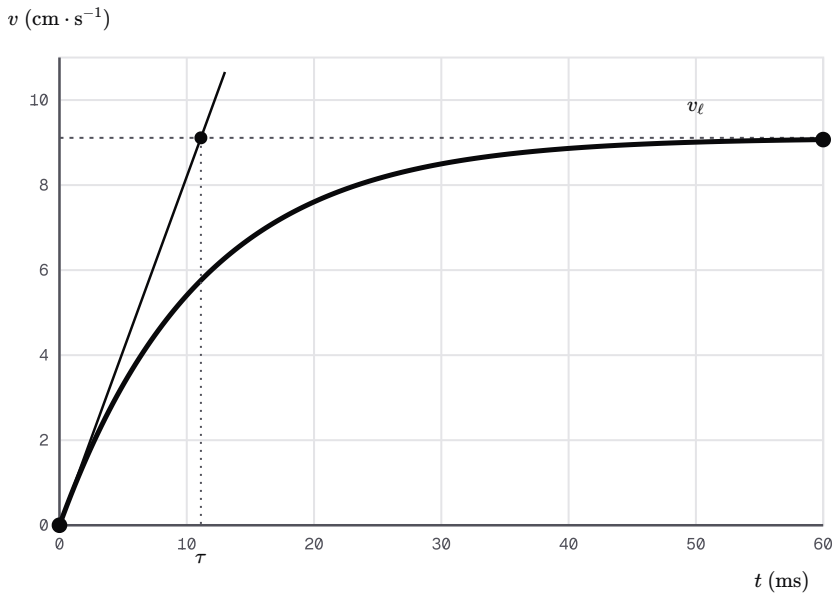
D. Jamais : la vitesse augmente sans fin.

Faux.

Le terme $90\,v$ croît avec la vitesse jusqu'à égaler $8{,}2$.

Correction

L'accélération s'annule quand $8{,}2 - 90\,v = 0$, soit $v = 0{,}091\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$: c'est la vitesse du palier mesurée dans l'éprouvette. Ensuite, la vitesse ne change plus.



Courbe 1 ● Point du graphe — Tangente en x = 0

Vitesse de la bille d'acier dans la glycérine : asymptote horizontale à la vitesse limite, tangente à l'origine qui la coupe à la date τ.

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ 0,82 ; elle coupe la droite y ≈ 9,11111 en x ≈ 11,1111.

Deux régimes. Au début, la vitesse augmente : c'est le **régime initial**, ou transitoire. Ensuite, elle reste constante : c'est le **régime permanent**. La courbe s'approche alors d'une asymptote horizontale. La tangente à l'origine traduit l'accélération au départ ; elle rencontre l'asymptote à une date notée τ.

Calculer la vitesse limite et τ à partir de A et B

Propriété : Vitesse limite et temps caractéristique

Pour un solide lâché sans vitesse initiale, dont la vitesse vérifie $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^{n}$:

- la **vitesse limite** v_ℓ, atteinte en **régime permanent**, est la vitesse pour laquelle l'accélération s'annule :

$$v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} ;$$

- la tangente à l'origine de la courbe $v(t)$ a pour pente A et coupe l'asymptote $v = v_\ell$ à l'instant

$$\tau = \frac{v_\ell}{A},$$

appelé **temps caractéristique** ; il donne l'ordre de grandeur de la durée du **régime initial** (ou transitoire), et le régime permanent n'est atteint qu'après plusieurs τ. Dans le modèle linéaire ($n = 1$), $\tau = \dfrac{1}{B} = \dfrac{m}{k}$.

Démonstration

Étape 1. En régime permanent, la vitesse est constante : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. L'équation différentielle donne $A - B\,v_\ell^{\,n} = 0$, soit $v_\ell^{\,n} = \dfrac{A}{B}$, d'où $v_\ell = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{1/n}$ puisque $v_\ell > 0$.

Étape 2. À l'instant $t = 0$, $v(0) = 0$: la pente de la tangente à l'origine vaut $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = A - B \cdot 0 = A$. Cette tangente a pour équation $v = A\,t$.

Étape 3. Elle coupe la droite $v = v_\ell$ lorsque $A\,\tau = v_\ell$, soit $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$.

Étape 4. Pour $n = 1$, $v_\ell = \dfrac{A}{B}$, donc $\tau = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{B} = \dfrac{m}{k}$.

Exemple : Les valeurs pour la bille dans la glycérine

Avec $A = 8{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $B = 9{,}0 \times 10^{1}\,\mathrm{s^{-1}}$, dans le modèle linéaire :

$$\begin{aligned} v_\ell &= \frac{A}{B} = \frac{8{,}2}{9{,}0 \times 10^{1}} \\ &= 9{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{B} = \frac{1}{9{,}0 \times 10^{1}} \\ &= 1{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

La vitesse limite retrouve la vitesse mesurée entre les repères. Le temps caractéristique vaut $11\,\mathrm{ms}$: le régime initial est très bref.

Vérifie : Ce dont dépend τ dans le modèle linéaire

Dans le modèle linéaire, de quoi dépend le temps caractéristique τ ?

A. De g et de la poussée seulement.

Faux.

Ces grandeurs fixent A ; dans ce modèle, τ ne dépend pas de A.

B. Du rapport $\dfrac{m}{k}$ seulement.

Juste.

Juste : $\tau = \dfrac{1}{B} = \dfrac{m}{k}$.

C. De la hauteur de chute et de la profondeur de l'éprouvette.

Faux.

La hauteur ne figure pas dans l'équation différentielle.

Correction

Dans le modèle linéaire, $v_\ell = \dfrac{A}{B}$ et $\tau = \dfrac{v_\ell}{A} = \dfrac{1}{B} = \dfrac{m}{k}$. Un solide plus lourd, ou moins freiné, met plus longtemps à atteindre son régime permanent.

Asymptote et tangente à l'origine

Méthode : Exploiter la courbe v_G(t) d'une chute avec frottement

1. **Repère** les deux régimes : le régime initial, où la vitesse croît, et le régime permanent, où elle est constante.
2. **Lis** la vitesse limite v_ℓ sur l'asymptote horizontale.
3. **Trace** la tangente à l'origine ; lis l'abscisse τ de son point de rencontre avec l'asymptote.
4. **Déduis-en** l'accélération initiale $a_0 = \dfrac{v_\ell}{\tau}$, égale à A, puis B.
5. **Présente** chaque lecture comme une valeur approchée, avec son unité.

Exemple : Lecture sur la courbe de la bille d'acier

Sur la figure, l'asymptote donne $v_\ell \approx 9{,}1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, et la tangente la coupe vers $\tau \approx 11\,\mathrm{ms}$. L'accélération initiale vaut alors

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{v_\ell}{\tau} \\ &\approx \frac{9{,}1 \times 10^{-2}}{1{,}1 \times 10^{-2}} \\ &\approx 8{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

On retrouve $A = 8{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ à la précision de la lecture : deux chiffres lus sur un graphique ne donnent qu'une valeur approchée.

Contrôle par les dimensions. Dans le modèle linéaire, $[\tau] = \dfrac{[m]}{[k]} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M\cdot T^{-1}}} = \mathrm{T}$: τ est bien une durée. Dans les deux modèles, $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$ est le quotient d'une vitesse par une accélération : encore une durée.

Une bille lancée plus vite que la vitesse limite

Devine : La bille lancée vers le bas dans la glycérine

On lance la bille vers le bas dans la glycérine, à $15\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, plus vite que sa vitesse limite. Que fait sa vitesse ensuite ?

A. Elle reste égale à $15\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Faux.

À cette vitesse, $8{,}2 - 90\,v$ est négatif : la vitesse change.

B. Elle diminue jusqu'à environ $9{,}1\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Juste.

Juste : la bille ralentit vers la même vitesse limite.

C. Elle augmente encore, comme au départ d'un lâcher.

Faux.

Au-dessus de la vitesse limite, la force de frottement l'emporte : la vitesse baisse.

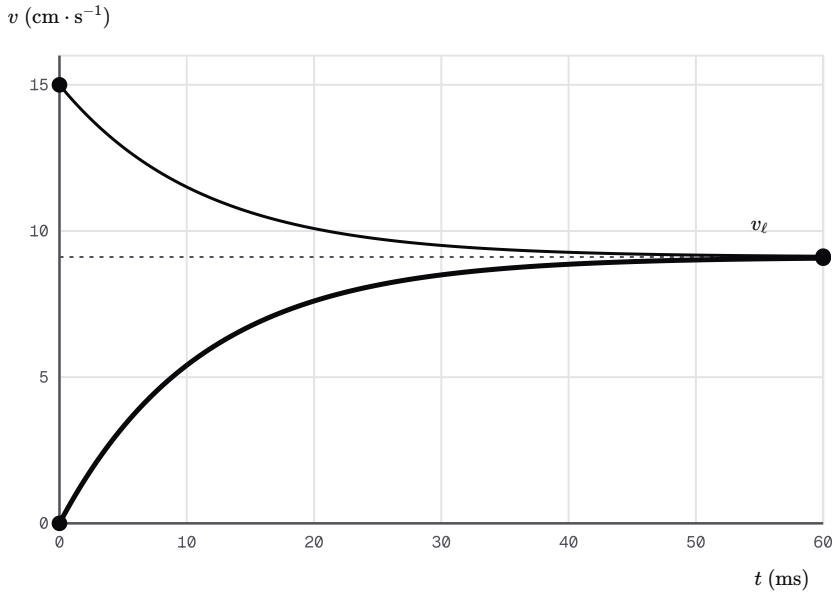
D. Elle diminue jusqu'à s'annuler.

Faux.

L'accélération s'annule dès que $v = v_\ell$: la bille ne s'arrête pas.

Correction

À $v = 0{,}15\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, l'accélération vaut $8{,}2 - 90 \times 0{,}15 = -5{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$: elle est opposée à la vitesse. La bille ralentit, et l'accélération tend vers zéro quand v tend vers v_ℓ. La vitesse limite est la même que pour un lâcher.



Deux départs de la bille dans la glycérine : lâchée sans vitesse, ou lancée vers le bas à 15 cm/s. Les deux courbes rejoignent la même vitesse limite.

Attention : La vitesse limite ne dépend pas de la vitesse initiale

✗ « Lancée plus vite, la bille aura une vitesse limite plus grande. »

✓ L'expression $v_\ell = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{1/n}$ ne contient pas la vitesse initiale. Un solide lancé vers le bas plus vite que v_ℓ **ralentit** jusqu'à v_ℓ. Le frottement l'emporte alors sur le poids diminué de la poussée : l'accélération est opposée à la vitesse.

Vitesse limite du ballon lesté

À toi : La vitesse limite et τ du ballon de baudruche

Le ballon lesté obéit à $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 5{,}6 - 0{,}65\,v^2$, en unités du système international. Calcule sa vitesse limite et son temps caractéristique. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le modèle est quadratique : $n = 2$.

Indice 2

Calcule $v_\ell = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$, puis $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$.

Indice 3

Point délicat : ici $\tau \neq \dfrac{1}{B}$; cette égalité ne vaut que dans le modèle linéaire.

Réponse

$$v_\ell = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{5{,}6}{0{,}65}} = 2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

puis $\tau = \dfrac{v_\ell}{A} = \dfrac{2{,}94}{5{,}6} = 0{,}52\,\mathrm{s}$. Le ballon atteint vite une vitesse modeste : la poussée et le frottement de l'air comptent beaucoup pour lui.

À retenir : Lire et calculer les grandeurs de la courbe v(t)

- La **vitesse limite** se lit sur l'asymptote horizontale, ou se calcule : $v_\ell = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{1/n}$.
- Le **temps caractéristique** se lit au pied de la tangente à l'origine, ou se calcule : $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$.
- Le régime initial précède le régime permanent ; τ donne l'ordre de grandeur de sa durée.
- La vitesse limite ne dépend pas de la vitesse initiale.

Solution exponentielle du modèle linéaire

Une solution donnée, puis vérifiée

Devine : La fonction qui convient à la courbe

La courbe $v(t)$ de la bille part de 0, a une tangente à l'origine de pente A, et tend vers v_ℓ. Quelle fonction a ces trois propriétés ? On admet que $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ vaut 1 en 0 et tend vers 0.

A. $v_\ell\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

Faux.

Elle vaut v_ℓ en 0 et tend vers 0 : l'inverse de la courbe.

B. $A\,t$

Faux.

C'est la tangente à l'origine : elle ne tend vers aucune limite finie.

C. $v_\ell\left(1+\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

Faux.

Elle vaut $2\,v_\ell$ en 0.

D. $v_\ell\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

Juste.

Juste : elle vaut 0 en 0 et tend vers v_ℓ.

Correction

La fonction $v_\ell\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ vaut $v_\ell\,(1-1)=0$ en 0. Elle tend vers v_ℓ, car $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0. Sa pente à l'origine vaut $\dfrac{v_\ell}{\tau}=A$. L'énoncé suivant affirme qu'elle est solution de l'équation.

Outil admis. La fonction exponentielle sera étudiée en mathématiques. Ici, trois propriétés suffisent : $\mathrm{e}^{0}=1$; la dérivée de $t\mapsto\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $t\mapsto-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$; $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0 quand t devient grand. On ne **résout** pas l'équation : on **vérifie** qu'une fonction donnée la satisfait.

Propriété : Solution du modèle linéaire vérifiée par substitution

Dans le modèle linéaire, l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-B\,v$ avec $v(0)=0$ admet pour solution :

$$v(t)=v_\ell\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right),$$

avec $v_\ell=\dfrac{A}{B}$ et $\tau=\dfrac{1}{B}$. À l'instant $t=\tau$, la vitesse atteint environ $63\,\%$ de v_ℓ ; à $t=5\tau$, plus de $99\,\%$.

Démonstration

Étape 1. La fonction exponentielle est un outil admis : $t\mapsto\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est dérivable, de dérivée $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et $\mathrm{e}^{0}=1$.

Étape 2. Avec $v(t)=v_\ell\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v_\ell}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Étape 3. Par ailleurs, $A-B\,v=A-B\,v_\ell+B\,v_\ell\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Comme $B\,v_\ell=A$ et $B=\dfrac{1}{\tau}$, cela vaut $\dfrac{v_\ell}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: les deux membres sont égaux pour tout t.

Étape 4. Enfin $v(0) = v_\ell\,(1-1) = 0$: la condition initiale est vérifiée. De plus $v(\tau) = v_\ell\,(1-\mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}63\,v_\ell$ et $v(5\tau) = v_\ell\,(1-\mathrm{e}^{-5}) \approx 0{,}993\,v_\ell$.

Exemple : La solution pour la bille d'acier

Avec $v_\ell = 9{,}1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ et $\tau = 11\,\mathrm{ms}$, la vitesse s'écrit $v(t) = 9{,}1\,\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, en $\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. À $t=\tau$:

$$\begin{aligned} v(\tau) &= 9{,}1 \times (1-\mathrm{e}^{-1}) \\ &= 5{,}8\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

À $t = 5\tau = 55\,\mathrm{ms}$, $v = 9{,}1\times(1-\mathrm{e}^{-5}) = 9{,}0\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$: plus de $99\,\%$ de v_ℓ. Le régime permanent est atteint en pratique.

63 % à τ, régime permanent après 5τ

Vérifie : La vitesse à deux temps caractéristiques

Dans le modèle linéaire, quelle fraction de v_ℓ le solide lâché sans vitesse atteint-il à $t = 2\tau$?

A. $2 \times 63\,\% = 126\,\%$

Faux.

Après un lâcher, la vitesse ne dépasse jamais v_ℓ : v n'est pas proportionnelle à t.

B. $100\,\%$

Faux.

Le régime permanent n'est atteint qu'après environ 5τ.

C. Toujours $63\,\%$

Faux.

$63\,\%$ est la fraction atteinte à $t=\tau$ seulement.

D. Environ $86\,\%$

Juste.

Juste : $1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}86$.

Correction

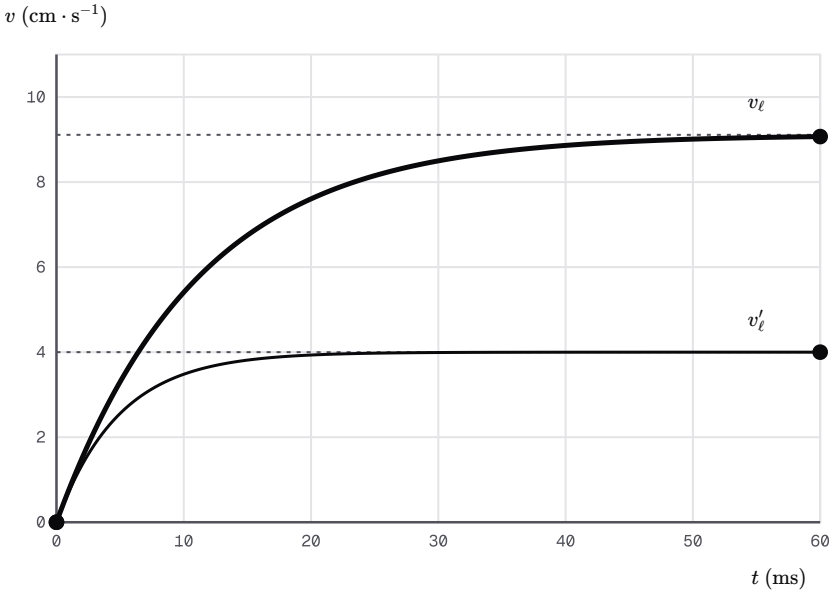
À $t = 2\tau$, $\dfrac{v}{v_\ell} = 1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}86$: environ $86\,\%$ de la vitesse limite. Chaque nouveau τ multiplie l'écart à v_ℓ par e^{-1}.

Attention : Le temps caractéristique n'est pas la durée du régime initial

X « À la date τ, la bille a atteint sa vitesse limite. »

✓ Dans le modèle linéaire, la vitesse ne vaut qu'environ $63\,\%$ de v_ℓ à la date τ. Le régime permanent est atteint en pratique après environ 5τ, quand la vitesse dépasse $99\,\%$ de v_ℓ. Le temps caractéristique donne seulement l'ordre de grandeur de la durée du régime initial.

Effet de la masse sur la vitesse limite et τ



Deux billes d'acier dans la glycérine : la plus lourde, de rayon 3,0 mm, atteint une vitesse limite plus grande, plus lentement.

Exemple : Une bille plus petite et plus légère

Une seconde bille d'acier, de rayon $2{,}0\,\mathrm{mm}$, a une masse $m' = 2{,}6\times10^{-4}\,\mathrm{kg}$ et un coefficient $k' = 5{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Même matériau : A vaut encore $8{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Alors $\tau' = \dfrac{1}{B'} = \dfrac{m'}{k'} = 4{,}9\times10^{-3}\,\mathrm{s}$ et $v'_\ell = A\,\tau' = 4{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Sa masse est $3{,}4$ fois plus petite, son coefficient k seulement $1{,}5$ fois : le rapport $\dfrac{m}{k}$ diminue. Elle atteint plus vite une vitesse limite plus faible.

La petite bille à 9,8 ms et à 25 ms

À toi : Substitution et régime permanent de la petite bille

Pour la petite bille, $v(t) = 4{,}0\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau'}\right)$ en $\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, avec $\tau' = 4{,}9\,\mathrm{ms}$. Vérifie la condition initiale, calcule v à $t = 9{,}8\,\mathrm{ms}$, puis dis si le régime permanent est atteint à $25\,\mathrm{ms}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
En $t = 0$, utilise $\mathrm{e}^{0} = 1$.
Indice 2
La date $9{,}8\,\mathrm{ms}$ vaut $2\tau'$: calcule $1 - \mathrm{e}^{-2}$.
Indice 3
Point délicat : compare $25\,\mathrm{ms}$ à $5\tau'$, pas à τ'.

Réponse
En $t = 0$, $v = 4{,}0 \times (1 - 1) = 0$: la condition initiale est vérifiée. À $9{,}8\,\mathrm{ms}$:

$$\begin{aligned} v &= 4{,}0 \times (1 - \mathrm{e}^{-2}) \\ &= 3{,}5\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Enfin, $25\,\mathrm{ms}$ dépasse $5\tau' = 24{,}5\,\mathrm{ms}$: la vitesse dépasse $99\,\%$ de v'_{ℓ}, le régime permanent est atteint en pratique.

À retenir : Ce que dit la solution du modèle linéaire

- La fonction $v(t) = v_{\ell}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est **donnée**, puis **vérifiée** : dérivée, égalité pour tout t, condition initiale.
- À τ : environ $63\,\%$ de v_{ℓ} ; après 5τ : plus de $99\,\%$.
- Dans ce modèle, $\tau = \dfrac{m}{k}$ et $v_{\ell} = A\,\tau$ croissent avec le rapport $\dfrac{m}{k}$.

Méthode d'Euler et choix du pas

Remplacer la courbe par sa tangente sur un pas

Devine : Une accélération gardée constante pendant 2,0 ms

La bille d'acier est lâchée dans la glycérine. À $t = 0$, son accélération vaut $A = 8{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Si l'on garde cette accélération pendant $2{,}0\,\mathrm{ms}$, quelle vitesse prévoit-on à $t = 2{,}0\,\mathrm{ms}$?

A. $16\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$
Faux.
Tu as multiplié par $2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$ au lieu de $2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

B. $9{,}1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$
Faux.
C'est la vitesse limite, atteinte bien plus tard.

C. $1{,}6\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$
Juste.
Juste : l'accélération multipliée par $2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ donne $1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Correction

La vitesse gagnée vaut l'accélération multipliée par la durée :

$$\begin{aligned}\Delta v &= 8{,}2 \times 2{,}0 \times 10^{-3} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\end{aligned}$$

soit $1{,}6\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. C'est un peu trop : l'accélération diminue déjà pendant ces $2{,}0\,\mathrm{ms}$.

L'idée. Rappel de mathématiques : près d'un point, une courbe se confond presque avec sa tangente ; c'est l'approximation affine. Sur une durée courte, on remplace donc la courbe $v(t)$ par sa tangente. La pente de cette tangente est l'accélération, que l'équation différentielle donne à partir de la vitesse. On avance ainsi d'un petit pas, puis on recommence depuis la nouvelle vitesse.

Définition : Méthode d'Euler

La **méthode d'Euler** calcule une solution approchée de l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n$ à partir de la condition initiale $v_0 = v(0)$, avec un **pas** Δt choisi petit devant τ. Aux instants $t_i = i\,\Delta t$:

$$a_i = A - B\,v_i^n,$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t.$$

Chaque étape assimile la courbe $v(t)$ à sa tangente sur un intervalle de durée Δt : la suite (v_i) approche la solution d'autant mieux que le pas est petit.

Méthode : Appliquer la méthode d'Euler

1. **Écris** l'équation sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^n$; relève A, B, n, la vitesse initiale v_0 et le pas Δt.
2. **Calcule** l'accélération $a_i = A - B\,v_i^n$ à partir de la vitesse v_i.
3. **Calcule** la vitesse suivante $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.
4. **Recommence**, et range les résultats dans un tableau à trois colonnes : t_i, v_i, a_i.
5. **Confronte** les valeurs obtenues à des mesures ou à la solution exacte ; juge ensuite l'effet du pas.

Un tableau d'Euler pour la bille d'acier

Le tableau de la bille d'acier. On prend $A = 8{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $B = 90\,\mathrm{s^{-1}}$, $v_0 = 0$ et $\Delta t = 2{,}0\,\mathrm{ms}$. Chaque valeur est arrondie à trois chiffres avant le calcul suivant. En $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$, le gain $a_i\,\Delta t$ vaut $a_i \times 0{,}20$. Par exemple :

$$\begin{aligned}a_1 &= 8{,}2 - 90 \times 1{,}64 \times 10^{-2} \\ &= 6{,}72\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}\end{aligned}$$

puis

$$v_2 = 1{,}64 + 6{,}72 \times 0{,}20$$
$$= 2{,}98\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$$

t_i (ms)	v_i ($\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$)	a_i ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)
$0{,}0$	0	$8{,}2$
$2{,}0$	$1{,}64$	$6{,}72$
$4{,}0$	$2{,}98$	$5{,}52$
$6{,}0$	$4{,}08$	$4{,}53$
$8{,}0$	$4{,}99$	$3{,}71$

Vérifie : Une accélération qui diminue d'une ligne à l'autre

Dans le tableau, a_i diminue d'une ligne à l'autre. Pourquoi ?

A. Parce que le pas diminue au fil du calcul.

Faux.

Le pas reste constant : $2{,}0\,\mathrm{ms}$.

B. Parce que le poids diminue pendant la descente.

Faux.

Le poids est constant ; il figure dans A.

C. Parce que la vitesse augmente, donc le terme $B\,v_i$ aussi.

Juste.

Juste : le frottement croît avec la vitesse.

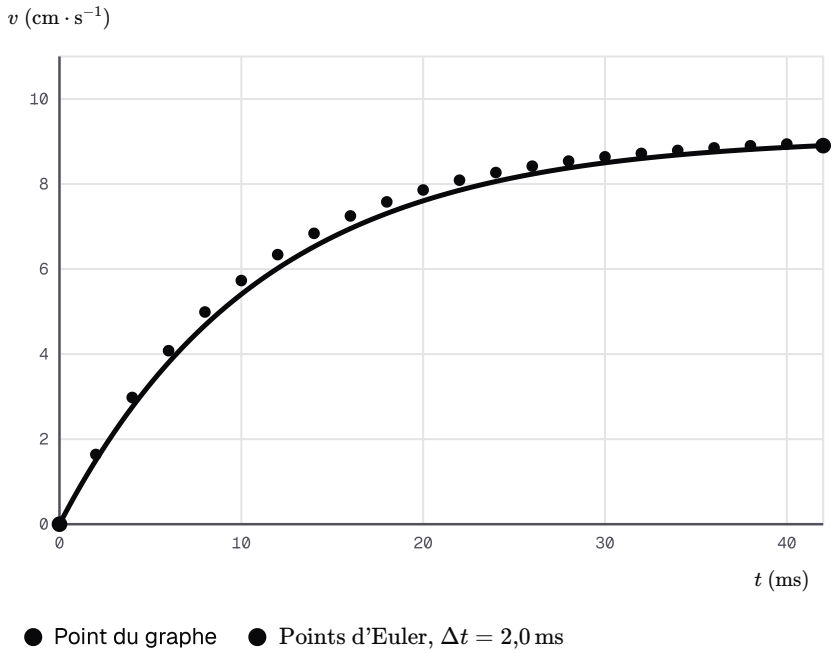
D. Parce que les arrondis à trois chiffres s'accumulent d'une ligne à l'autre.

Faux.

Les arrondis changent le dernier chiffre, pas le sens de variation.

Correction

L'accélération vaut $a_i = A - B\,v_i$: A et B sont constants, et v_i augmente. Le frottement croît, et l'accélération diminue vers 0, qu'elle approche quand v_i approche v_ℓ.

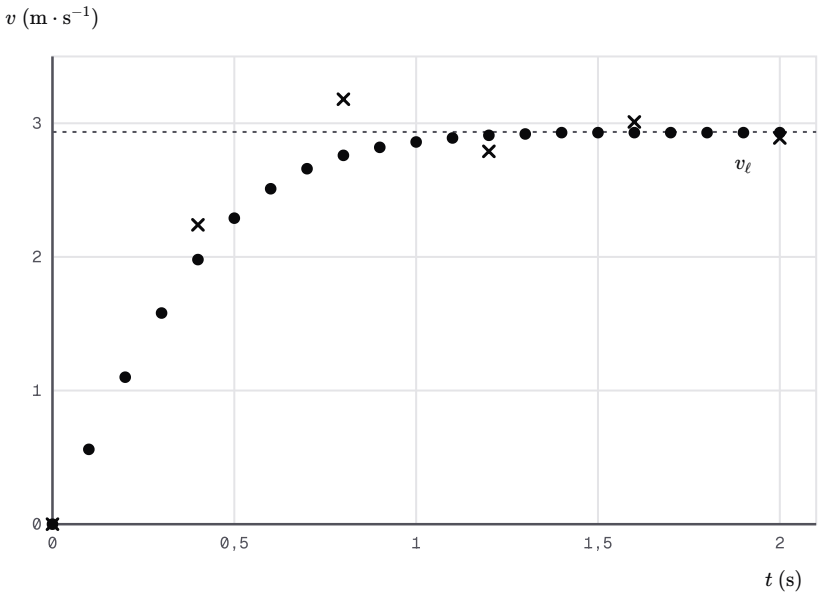


Points de la méthode d'Euler, pas de 2,0 ms, et solution exacte de la même équation pour la bille d'acier : au début, les points sont un peu au-dessus de la courbe.

Comparer à la solution exacte. À $t = 6{,}0\,\text{ms}$, le tableau donne $4{,}08\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La solution exacte, $\dfrac{A}{B}\left(1-\text{e}^{-B\,t}\right)$, donne $3{,}80\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La méthode surestime la vitesse : la tangente passe au-dessus de cette courbe, dont la pente diminue. L'écart relatif vaut environ $7\,\%$, puis il diminue à l'approche du régime permanent.

Effet du pas sur le ballon lesté

Le ballon, sans solution donnée. Le ballon lesté obéit à $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = 5{,}6 - 0{,}65\,v^2$. Ce chapitre ne donne aucune solution de cette équation : la méthode d'Euler en fournit une approximation. On la calcule avec deux pas, $\Delta t = 0{,}10\,\text{s}$ et $\Delta t = 0{,}40\,\text{s}$, à comparer au temps caractéristique $\tau = 0{,}52\,\text{s}$.



● $\Delta t = 0{,}10\,\mathrm{s}$ ✕ $\Delta t = 0{,}40\,\mathrm{s}$

Méthode d'Euler pour le ballon lesté avec deux pas : le pas de 0,10 s approche régulièrement la vitesse limite, le pas de 0,40 s la dépasse.

Attention : La méthode d'Euler donne une solution approchée

✗ « Les valeurs du tableau d'Euler sont les vitesses exactes. »

✓ Chaque pas remplace la courbe par sa tangente : les valeurs v_i sont approchées. Avec un pas trop grand devant τ, l'écart devient visible. La suite peut même dépasser la vitesse limite, comme avec $\Delta t = 0{,}40\,\mathrm{s}$ pour le ballon. Réduis le pas pour améliorer l'approximation.

Deux pas d'Euler pour le ballon

À toi : Les premières vitesses du ballon, pas de 0,10 s

Pour le ballon lâché sans vitesse, applique la méthode d'Euler avec $\Delta t = 0{,}10\,\mathrm{s}$. Calcule v_1, a_1 et v_2, en arrondissant chaque valeur à trois chiffres. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Au départ, $v_0 = 0$ et $a_0 = A = 5{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
Indice 2
Utilise $a_i = 5{,}6 - 0{,}65\,v_i^2$, puis $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.
Indice 3
Point délicat : la vitesse est au carré dans ce modèle ; ne l'oublie pas dans a_1.

Réponse
D'abord $v_1 = 0 + 5{,}6 \times 0{,}10 = 0{,}560\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ensuite

$$a_1 = 5{,}6 - 0{,}65 \times 0{,}560^2$$
$$= 5{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

et

$$v_2 = 0{,}560 + 5{,}40 \times 0{,}10$$
$$= 1{,}10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

L'accélération diminue déjà : le frottement croît comme v^2.

À retenir : La méthode d'Euler en trois idées

- Elle remplace la courbe par sa tangente sur chaque pas Δt.
- Elle s'applique aux deux modèles de frottement, même sans solution connue.
- Un pas petit devant τ donne une bonne approximation ; un pas grand peut dépasser la vitesse limite.

Étude expérimentale d'une chute dans un liquide

Filmer la chute d'une bille de verre

Devine : Chronomètre à la main ou vidéo

On veut étudier le régime initial d'une bille de verre lâchée dans une huile de silicone. Son temps caractéristique est de l'ordre de $20\,\mathrm{ms}$. Quel moyen de mesure convient ?

A. Un chronomètre déclenché à la main à chaque repère.

Faux.
Le temps de réaction, de l'ordre de $0{,}2\,\mathrm{s}$, dépasse toute la durée du régime initial.

B. Une vidéo à 100 images par seconde, exploitée par pointage.

Juste.
Juste : une image toutes les $10\,\mathrm{ms}$ donne plusieurs points pendant le régime initial.

C. Une règle seule, pour lire la position finale.

Faux.
Une seule position ne donne aucune vitesse.

Correction

Le régime initial dure quelques fois $20\,\mathrm{ms}$, soit environ $0{,}1\,\mathrm{s}$. Un chronomètre à la main ne peut rien en saisir. Une vidéo à 100 images par seconde fournit une position toutes les $10\,\mathrm{ms}$: assez de points pour tracer $v(t)$.

Méthode : Montage, protocole et exploitation de la vidéo

Montage. Une éprouvette haute, remplie d'huile de silicone, est posée devant une règle verticale. Une caméra fixe filme la chute à 100 images par seconde, face à la règle.

Protocole. On mesure la masse et le diamètre de chaque bille. On la lâche sans vitesse, juste sous la surface, au centre de l'éprouvette. Un logiciel de pointage repère sa position sur chaque image et calcule sa vitesse.

Exploitation. On trace $v(t)$, on lit la vitesse limite et le temps caractéristique, on choisit le modèle de frottement, puis on calcule k.

Les grandeurs mesurées.

Grandeur	Instrument	Valeur
masse m	balance	$6{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$
diamètre	pied à coulisse	$8{,}00\,\mathrm{mm}$
volume V	calcul	$2{,}68 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^3}$
ρ_f	notice de l'huile	$970\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
position	vidéo, pointage	toutes les $10\,\mathrm{ms}$

Le volume vient du diamètre : $V = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3$, avec $r = 4{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

Vérifie : Lâcher la bille sans vitesse

Pourquoi lâche-t-on la bille sans vitesse, juste sous la surface ?

A. Pour que la bille atteigne plus vite sa vitesse limite.
Faux.
Le départ ne change ni v_ℓ ni τ.

B. Pour que $v(0) = 0$: la tangente à l'origine a alors pour pente A.
Juste.
Juste : la lecture de τ par la tangente suppose un départ sans vitesse.

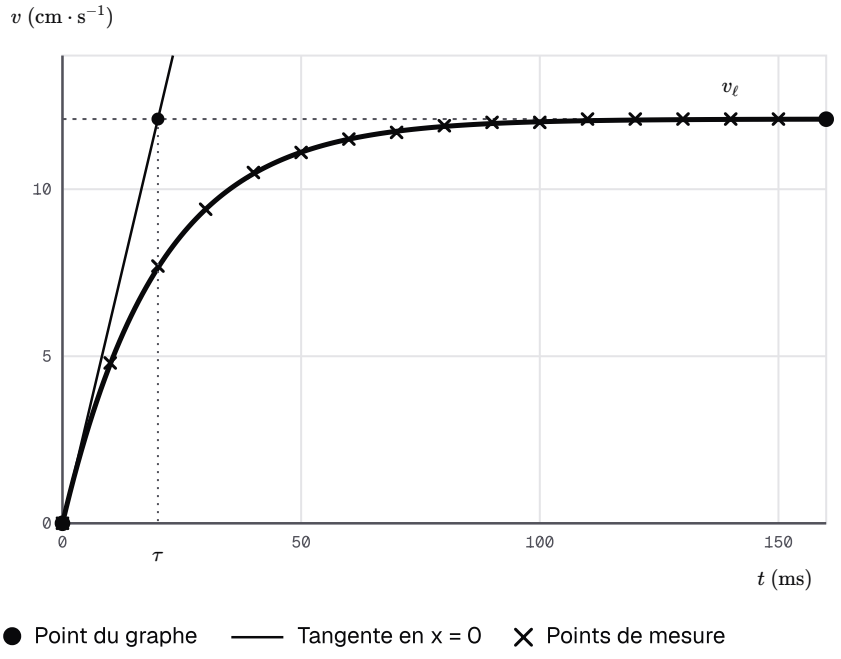
C. Pour que la bille ne touche jamais la paroi de l'éprouvette pendant sa chute.
Faux.
C'est le rôle du lâcher au centre de l'éprouvette ; la hauteur de lâcher n'y change rien.

Correction
La méthode de la tangente à l'origine suppose $v(0) = 0$: la pente à l'origine vaut alors A, et la tangente coupe l'asymptote en τ. Lâcher juste sous la surface évite aussi un choc d'entrée dans l'huile, qui donnerait une vitesse initiale inconnue.

Les vitesses tirées de la vidéo

Les vitesses mesurées. Le logiciel donne ces vitesses, arrondies au dixième de $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$:

t (ms)	v ($\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$)	t (ms)	v ($\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$)
0	0,0	80	11,9
10	4,8	90	12,0
20	7,7	100	12,0
30	9,4	110	12,1
40	10,5	120	12,1
50	11,1	130	12,1
60	11,5	140	12,1
70	11,7	150	12,1



Vitesses mesurées de la bille de verre dans l'huile, courbe du modèle linéaire, asymptote à 12,1 cm/s et tangente à l'origine, qui la coupe vers 20 ms.

Demi-tangente calculée en x = 0 : coefficient directeur ≈ 0,605 ; elle coupe la droite y = 12,1 en x ≈ 20.

Exemple : Vitesse limite et temps caractéristique de la bille de verre

Les dernières mesures donnent $v_\ell \approx 12{,}1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. La constante A se calcule avec les données, où $\dfrac{\rho_f\, V}{m} = 0{,}382$:

$$\begin{aligned} A &= g\left(1 - \frac{\rho_f\, V}{m}\right) \\ &= 9{,}80 \times (1 - 0{,}382) \\ &= 6{,}06\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

soit $A \approx 6{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ avec deux chiffres significatifs ; on garde $6{,}06$ pour les calculs suivants. Alors $\tau = \dfrac{v_\ell}{A} = \dfrac{0{,}121}{6{,}06} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{s}$. La tangente à l'origine, de pente A, coupe bien l'asymptote vers $20\ \mathrm{ms}$.

Comparer les mesures au modèle linéaire

Méthode : Déterminer le coefficient de frottement et choisir le modèle

1. **Écris** l'équation en régime permanent : $A - B\, v_\ell^{\,n} = 0$.
2. **Exprime** $k = \dfrac{m\, A}{v_\ell^{\,n}}$ pour le modèle testé.
3. **Compare** : le bon modèle donne une courbe qui passe par les mesures, et le même k pour des solides de même forme et de même taille.
4. **Vérifie** l'unité de k par une équation aux dimensions.

Le modèle retenu et la valeur de k. À $t = 20\ \mathrm{ms}$, voisin de τ, la mesure vaut $7{,}7\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$, soit $64\,\%$ de v_ℓ : proche des $63\,\%$ du modèle linéaire. La courbe de ce modèle, tracée avec v_ℓ et τ, passe par toutes les mesures. On retient $n = 1$:

$$\begin{aligned} k &= \frac{m\, A}{v_\ell} \\ &= \frac{6{,}8 \times 10^{-4} \times 6{,}06}{0{,}121} \\ &= 3{,}4 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Son unité, $\dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$, est celle du modèle linéaire.

Vérifie : Une mesure qui contredirait le modèle

Dans un autre liquide, une bille lâchée sans vitesse atteint, à la date τ lue sur la tangente, $76\,\%$ de sa vitesse limite. Que conclure ?

A. Le modèle linéaire convient encore.
Faux.
Il prévoit $63\,\%$ à τ : l'écart est trop grand pour une erreur de lecture.

B. Le modèle linéaire ne décrit pas cette chute : on en teste un autre.
Juste.
Juste : sa solution impose environ $63\,\%$ de v_ℓ à τ.

C. La lecture de τ est forcément fausse.

Faux.
Une lecture se discute, mais un écart de 13 points sur un pourcentage révèle plutôt un autre modèle.

Correction
La solution du modèle linéaire donne $v(\tau) = v_\ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0{,}63\, v_\ell$. Une mesure de $76\,\%$ s'en écarte nettement : ce modèle ne convient pas. On essaie alors le modèle $f = k\,v^2$, et on compare de nouveau aux mesures.

Sources d'erreur. La viscosité de l'huile varie beaucoup avec la température : on la relève. Une bille proche de la paroi est davantage freinée. Le pointage image par image donne la position au millimètre près environ. Enfin, la masse n'a que deux chiffres significatifs : k n'en a pas davantage.

Une seconde bille de verre, plus petite

À toi : Le coefficient k d'une bille plus petite

Une seconde bille de verre, de diamètre $6{,}00\,\mathrm{mm}$, a une masse $m = 2{,}9 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$ et un volume $V = 1{,}13 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^3}$. Dans la même huile, sa vitesse limite mesurée vaut $6{,}9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Avec le modèle linéaire, calcule A, τ et k. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord $\dfrac{\rho_f\, V}{m}$, puis A.
Indice 2
Emploie $\tau = \dfrac{v_\ell}{A}$ et $k = \dfrac{m\,A}{v_\ell}$.
Indice 3
Point délicat : convertis $6{,}9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ avant de diviser.

Réponse
On trouve $\dfrac{\rho_f\, V}{m} = 0{,}378$, puis

$$\begin{aligned} A &= 9{,}80 \times (1 - 0{,}378) \\ &= 6{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

Ensuite $\tau = \dfrac{6{,}9 \times 10^{-2}}{6{,}10} = 1{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$, et

$$\begin{aligned} k &= \frac{m\,A}{v_\ell} \\ &= \frac{2{,}9 \times 10^{-4} \times 6{,}10}{6{,}9 \times 10^{-2}} \\ &= 2{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Le coefficient est plus petit que pour la grosse bille : k dépend de la taille du solide.

> **À retenir : Ce que le travail pratique a établi**
>
> - La vitesse de la bille croît, puis se stabilise : régime initial, puis régime permanent.
> - La vitesse limite et le temps caractéristique se lisent sur la courbe ; A se calcule avec les données.
> - Le modèle se choisit d'après les mesures, puis k s'en déduit.
>
> Les chapitres suivants appliquent la même deuxième loi aux mouvements plans.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Chute verticale d'un solide » (2bac · pc · physique-chimie)