BURHAN

Résumé : Aspects énergétiques des oscillations mécaniques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/aspects-energetiques-des-oscillations-mecaniques/resume

Chapitre	Semestre
Aspects énergétiques des oscillations mécaniques	Semestre 2

Le travail d'une force qui varie le long d'un axe

À retenir : Découper le trajet en petits morceaux

Rappel : une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application va de A à B effectue le travail $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Une force de rappel, elle, change de valeur pendant le trajet. Sur un très petit déplacement, elle reste presque constante. Ajouter tous ces petits travaux revient à mesurer une aire sur la courbe de F_x.

Définition : Travail d'une force ou d'un couple variable : aire sous la courbe

Un solide se déplace le long d'un axe $(O;\vec{i})$ de la position d'abscisse x_A à celle d'abscisse x_B, sous l'action d'une force $\vec{F} = F_x\,\vec{i}$ dont la coordonnée F_x varie avec l'abscisse x. Sur un déplacement très petit δx, la force est presque constante et son travail vaut $F_x\,\delta x$. Le **travail** de $\vec{F}$ entre A et B est la somme de ces travaux élémentaires : c'est l'**aire algébrique** comprise entre la courbe de F_x en fonction de x, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_A$ et $x = x_B$. Elle est comptée positivement là où F_x et le déplacement ont le même signe, négativement sinon.

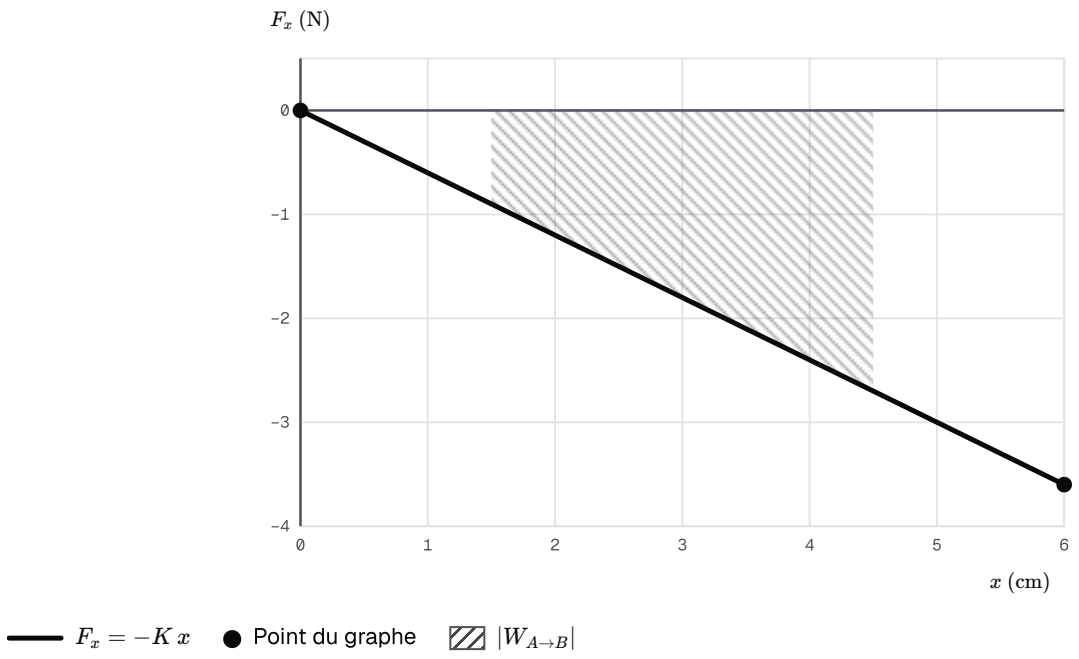
De même, le travail d'un couple de moment $\mathcal{M}_\Delta$ variable, pour une rotation de l'abscisse angulaire θ_1 à θ_2, est l'aire algébrique sous la courbe de $\mathcal{M}_\Delta$ en fonction de θ. Le travail s'exprime en joules (J).

Propriété : Travail de la force de rappel d'un ressort

Un ressort de raideur K, de masse négligeable, a une extrémité fixe ; l'autre est liée à un solide qui se déplace le long d'un axe $(O;\vec{i})$ dont l'origine O est la position du solide lorsque le ressort n'est ni allongé ni comprimé. La force exercée par le ressort sur le solide est $\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$. Quand le solide passe de l'abscisse x_A à l'abscisse x_B, le travail de cette force vaut :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,K\left(x_A^2 - x_B^2\right).$$

Il est négatif (travail résistant) quand le ressort est plus déformé à l'arrivée qu'au départ ($|x_B| > |x_A|$), positif (travail moteur) quand il l'est moins ($|x_B| < |x_A|$), nul quand $|x_B| = |x_A|$.



Travail de la force de rappel lu comme une aire

Exemple

Données. Ressort de raideur $K = 60\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$; le solide passe de $x_A = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ à $x_B = 4{,}5\,\mathrm{cm}$.

Aire du trapèze. Bases $K\,x_A = 0{,}90\,\mathrm{N}$ et $K\,x_B = 2{,}7\,\mathrm{N}$, hauteur $0{,}030\,\mathrm{m}$:

$$\frac{(0{,}90 + 2{,}7) \times 0{,}030}{2} = 0{,}054\,\mathrm{J}$$

Signe. Ici $|x_B| > |x_A|$: le solide finit plus loin de l'origine qu'au départ, la force s'oppose au déplacement. Donc $W_{A\to B}(\vec{F}) = -0{,}054\,\mathrm{J}$, un travail résistant.

Méthode : Mesurer un travail sur la courbe de la force

1. **Courbe** : trace la droite $F_x = -K\,x$, ou lis la courbe fournie.
2. **Domaine** : borne-le par l'abscisse de départ, puis par celle d'arrivée.
3. **Aire** : découpe en triangles ou en trapèzes, longueurs en mètres.
4. **Signe** : moins si $|x_B| > |x_A|$, le ressort finissant plus déformé qu'au départ ; plus dans le cas contraire.

Attention : Une seule valeur de la force ne suffit pas

Multiplier la force finale par la distance parcourue fausse le travail : la force n'a cette valeur qu'à l'arrivée. Pour $K = 60\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et un étirement de 0 à $5{,}0\,\mathrm{cm}$, ce produit donne $-0{,}15\,\mathrm{J}$. L'aire du triangle donne la bonne valeur, $-0{,}075\,\mathrm{J}$, deux fois moins.

Énergie stockée par un ressort déformé

Définition : Énergie potentielle élastique

L'**énergie potentielle élastique** d'un ressort de raideur K, d'allongement $\Delta\ell$ (positif s'il est étiré, négatif s'il est comprimé), est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2 + C_{te}.$$

On choisit d'habitude la référence $E_{pe} = 0$ quand le ressort n'est pas déformé ; alors $E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$. Pour un solide lié à un ressort horizontal et repéré depuis la position où le ressort n'est pas déformé, $\Delta\ell = x$ et $E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,x^2$. Elle s'exprime en joules, avec K en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $\Delta\ell$ en mètres.

Exemple

Un ressort de raideur $K = 150\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ est comprimé de $4{,}0\,\mathrm{cm}$, donc $\Delta\ell = -0{,}040\,\mathrm{m}$. Référence : ressort non déformé.

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2 \\ &= \frac{1}{2}\times 150 \times (-0{,}040)^2 \\ &= 0{,}12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Le signe de l'allongement disparaît dans le carré. Étiré ou comprimé de $4{,}0\,\mathrm{cm}$, ce ressort stocke la même énergie.

Propriété : Travail de la force de rappel et variation de l'énergie potentielle élastique

Un ressort exerce une force sur le solide qui lui est lié. Entre deux positions A et B, le travail de cette force est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle élastique :

$$\begin{aligned} W_{A\to B}(\vec{F}) &= -\Delta E_{pe} \\ &= E_{pe}(A) - E_{pe}(B). \end{aligned}$$

Quand le ressort se déforme davantage, le travail est résistant et l'énergie potentielle élastique augmente ; quand il revient vers sa longueur à vide, le travail est moteur et elle diminue.

Exemple

Le même ressort revient de $\Delta\ell = -0{,}040\,\mathrm{m}$ à sa longueur à vide. Son énergie passe de $0{,}12\,\mathrm{J}$ à 0, donc $\Delta E_{pe} = -0{,}12\,\mathrm{J}$. Le travail de la force de rappel vaut $+0{,}12\,\mathrm{J}$: il est moteur.

Attention : Allongement et abscisse ne coïncident pas toujours

Dans E_{pe}, la grandeur au carré est l'allongement, mesuré depuis la longueur à vide. L'abscisse du solide ne la remplace que si l'origine est la position du ressort non déformé. Ressort vertical, axe vers le bas, origine à l'équilibre : l'allongement s'écrit alors $\Delta\ell_0 + x$.

Énergie mécanique : elle se conserve ou elle diminue

À retenir : Le théorème de l'énergie cinétique, outil des bilans

Rappel : on se place dans un référentiel galiléen. Quand un solide passe d'une position à une autre, son énergie cinétique varie d'une quantité égale à la somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées. Lors d'un mouvement horizontal, le poids ne travaille pas. La réaction d'un plan sans frottement non plus.

Définition : Énergie mécanique d'un système solide-ressort

L'**énergie mécanique** d'un système solide-ressort est la somme de l'énergie cinétique du solide et des énergies potentielles du système :

$$E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp}.$$

Prenons un solide de masse m qui glisse sur un plan horizontal, lié à un ressort horizontal de raideur K. L'origine de son abscisse x correspond au ressort non déformé. L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas ; en la prenant nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,K\,x^2,$$

où $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse du centre d'inertie du solide.

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur solide-ressort sans frottement

Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique d'un oscillateur solide-ressort horizontal se conserve. Pour des oscillations d'amplitude x_m, elle vaut, à chaque instant :

$$E_m = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2,$$

où v_m est la vitesse maximale, atteinte au passage par la position d'équilibre. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique s'échangent : quand l'une augmente, l'autre diminue d'autant.

Méthode : Trouver une vitesse ou une amplitude par un bilan

1. **Hypothèse** : l'énoncé dit-il les frottements négligeables ? Sinon, aucune égalité.
2. **Références** : écris-les pour chaque énergie potentielle.
3. **Deux états** : un état connu (extrême, équilibre, lâcher) et l'état cherché.
4. **Égalité** : même E_m dans les deux états ; isole l'inconnue.
5. **Contrôle** : unité et ordre de grandeur.

Exemple

Données. Solide de $0{,}40\,\mathrm{kg}$, ressort horizontal de $40\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, amplitude $6{,}0\,\mathrm{cm}$, frottements négligeables. Références : ressort non déformé, plan du mouvement.

Énergie mécanique. $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2 = 7{,}2\times10^{-2}\,\mathrm{J}$.

Vitesse maximale. $v_m = \sqrt{\dfrac{2\,E_m}{m}} = 0{,}60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

En $x = 3{,}0\,\mathrm{cm}$**.** $E_{pe} = 1{,}8\times10^{-2}\,\mathrm{J}$, donc $E_c = 5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J}$ et $v \approx 0{,}52\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Propriété : Non-conservation de l'énergie mécanique en présence de frottements

Le solide d'un oscillateur solide-ressort horizontal subit des frottements, représentés par une force $\vec{f}$. Entre deux positions A et B, l'énergie mécanique varie d'une quantité égale au travail de cette force :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}(\vec{f}).$$

Ce travail est négatif : l'énergie mécanique diminue, et l'énergie perdue par l'oscillateur est transférée au milieu extérieur, principalement sous forme de chaleur. L'amplitude des oscillations décroît.

Méthode : Chiffrer l'effet des frottements

1. **Deux extrêmes successifs** : la vitesse y est nulle, donc $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$ en chacun.
2. **Travail des frottements** : la différence, arrivée moins départ ; il est négatif.
3. **Pourcentage** : rapporte la perte à l'énergie de départ.
4. **Interprétation** : l'énergie perdue part vers l'extérieur, surtout en chaleur.

Exemple

Avec $K = 125\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, l'amplitude passe de $4{,}0\,\mathrm{cm}$ à $3{,}6\,\mathrm{cm}$ en une période. L'énergie mécanique passe de $\frac{1}{2}\times 125\times 0{,}040^2 = 0{,}10\,\mathrm{J}$ à $\frac{1}{2}\times 125\times 0{,}036^2 = 0{,}081\,\mathrm{J}$.

Le travail des frottements vaut $W(\vec{f}) = -0{,}019\,\mathrm{J}$: l'oscillateur perd $19\,\%$ de son énergie en une période.

Attention : Vérifier l'absence de frottement avant d'égaler

Égaler deux énergies mécaniques suppose qu'aucun frottement ne travaille. Si l'amplitude baisse au fil des oscillations, même lentement, l'hypothèse est fausse. Lis l'énoncé : « frottements négligeables » autorise la conservation ; sinon, écris $\Delta E_m = W(\vec{f})$.

Lire les énergies sur un graphique

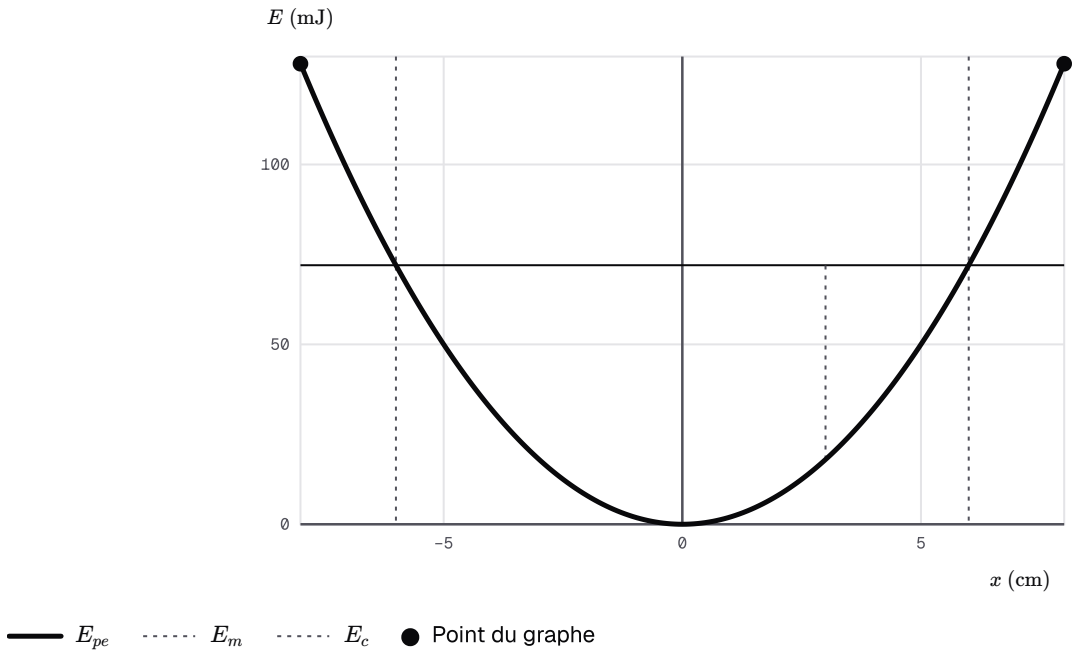


Diagramme d'énergie d'un solide-ressort sans frottement

Méthode : Lire positions et énergie cinétique sur un diagramme

1. **Courbes** : la parabole donne l'énergie potentielle, la droite horizontale l'énergie mécanique.
2. **Extrêmes** : là où la droite coupe la parabole ; le solide reste entre ces deux abscisses.
3. **Énergie cinétique** : l'écart vertical entre la droite et la parabole, à la position choisie.
4. **Vitesse** : déduis-la de $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$.

Exemple

Sur le diagramme ci-dessus, la droite coupe la parabole en $x = \pm 6{,}0\,\text{cm}$: c'est l'amplitude. En $x = 3{,}0\,\text{cm}$, la parabole vaut $18\,\text{mJ}$ et la droite $72\,\text{mJ}$. Le segment vertical donne $E_c \approx 54\,\text{mJ}$, la valeur du calcul.

Méthode : Exploiter les énergies tracées en fonction du temps

1. **Énergie mécanique** : la courbe plate sans frottement, la courbe qui baisse avec frottement.
2. **Potentielle ou cinétique** : la potentielle culmine aux élongations extrêmes, la cinétique au passage à l'équilibre.
3. **Période** : deux maximums successifs d'une même énergie sont séparés de $\dfrac{T_0}{2}$.
4. **Perte** : la baisse de E_m entre deux instants.

Exemple

Sur un enregistrement, deux maximums successifs de l'énergie cinétique sont séparés de $0{,}35\,\text{s}$. La période propre vaut donc $T_0 = 2 \times 0{,}35\,\text{s} = 0{,}70\,\text{s}$.

Méthode : Des positions pointées aux énergies

1. **Positions** : relève x_i à des instants séparés d'une durée τ constante, par vidéo ou par capteur.
2. **Vitesses** : $v_i \approx \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,\tau}$, moyenne sur l'intervalle centré sur t_i.
3. **Énergies** : $\dfrac{1}{2}\,K\,x_i^2$ et $\dfrac{1}{2}\,m\,v_i^2$ pour chaque ligne, puis leur somme E_m.
4. **Écarts** : une baisse régulière de E_m signale des frottements ; une dispersion d'une ligne à l'autre vient des arrondis du pointage.

Attention : Les énergies ont une période moitié

En une période propre, le solide atteint deux fois une élongation maximale, en $+x_m$ puis en $-x_m$. L'énergie potentielle passe donc par deux maximums. Lire T_0 entre deux maximums d'énergie donne une valeur deux fois trop petite.

Fil de torsion : travail du couple et énergie

Propriété : Travail du couple de torsion

Un fil de torsion de constante C exerce sur le solide qu'il porte un couple de rappel de moment $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$. L'abscisse angulaire θ du solide est repérée depuis la position où le fil n'est pas tordu. Quand le solide tourne de θ_1 à θ_2, le travail du couple de torsion vaut :

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2}\,C\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right),$$

avec C en $\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$, les angles en radians et le travail en joules.

Définition : Énergie potentielle de torsion

L'**énergie potentielle de torsion** d'un fil de constante de torsion C, tordu d'un angle θ, est :

$$E_{pt} = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2 + C_{te}.$$

Avec la référence $E_{pt} = 0$ quand le fil n'est pas tordu, $E_{pt} = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta^2$, en joules, avec θ en radians.

Propriété : Travail du couple de torsion et variation de l'énergie potentielle de torsion

Le travail du couple de torsion entre deux positions angulaires θ_1 et θ_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle de torsion :

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= -\Delta E_{pt} \\ &= E_{pt}(\theta_1) - E_{pt}(\theta_2). \end{aligned}$$

Propriété : Énergie mécanique du pendule de torsion

Un pendule de torsion est formé d'un solide de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe du fil et d'un fil de constante de torsion C. Avec la référence au fil non tordu, son énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}\,J_\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,C\,\theta^2.$$

Si les frottements sont négligeables, elle se conserve et vaut $E_m = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^2$, où θ_m est l'amplitude angulaire. En présence de frottements, elle diminue : sa variation est égale au travail du couple des frottements, qui est négatif.

Exemple

Données. $C = 3{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$, $J_\Delta = 4{,}0\times 10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $\theta_m = 0{,}50\,\mathrm{rad}$, frottements négligeables. Référence : fil non tordu.

Énergie mécanique. $E_m = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^2 = 3{,}8\times 10^{-3}\,\mathrm{J}$. De θ_m à 0, le couple de torsion effectue ce travail, moteur.

Vitesse angulaire maximale. En $\theta = 0$, $E_{pt} = 0$ et toute l'énergie est cinétique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} &= \sqrt{\frac{2\,E_m}{J_\Delta}} \\ &\approx 4{,}3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Attention : Un angle d'énergie s'écrit en radians

Les énergies $\frac{1}{2}\,C\,\theta^2$ et $\frac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$ exigent θ en radians. Convertis d'abord : $9{,}0^\circ = 9{,}0 \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}157\,\text{rad}$. Garder les degrés multiplierait le résultat par $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^2$, soit environ 3 300.

Pendule pesant : énergie aux petits angles

Propriété : Énergie mécanique du pendule pesant pour de faibles oscillations

Un pendule pesant de masse m oscille autour d'un axe horizontal fixe Δ ; son centre d'inertie G est à la distance d de l'axe et son moment d'inertie par rapport à Δ est J_Δ. On repère sa position par l'abscisse angulaire θ depuis la position d'équilibre stable et l'on prend l'énergie potentielle de pesanteur nulle à cette position. Alors :

$$E_{pp} = m\,g\,d\,(1-\cos\theta)\,,$$

$$E_m = \frac{1}{2}\,J_\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m\,g\,d\,(1-\cos\theta)\,.$$

Pour de faibles oscillations (θ en radians, petit), $1-\cos\theta \approx \dfrac{\theta^2}{2}$ et $E_{pp} \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$. Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique se conserve et vaut $E_m = m\,g\,d\,(1-\cos\theta_m) \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta_m^2$.

Méthode : Écrire l'énergie d'un pendule pas à pas

1. **Description** : type de pendule, axe, J_Δ, sens positif de θ.
2. **Énergie cinétique** : $\frac{1}{2}\,J_\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$.
3. **Énergie potentielle** : $\frac{1}{2}\,C\,\theta^2$ (fil non tordu) ou $m\,g\,d\,(1-\cos\theta)$ (équilibre), approchée par $\frac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$ aux petits angles.
4. **Conservation** : l'énergie à un extrême donne la vitesse angulaire au passage par l'équilibre.

Exemple

Données. $m = 0{,}30\,\text{kg}$, $d = 0{,}40\,\text{m}$, $J_\Delta = 5{,}6\times10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\theta_m = 8{,}0^\circ \approx 0{,}140\,\text{rad}$, $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, sans frottement. Référence : position d'équilibre.

Énergie mécanique. $E_m \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta_m^2 \approx 1{,}1\times10^{-2}\,\text{J}$.

Passage par l'équilibre.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{2\,E_m}{J_\Delta}}$$
$$\approx 0{,}64\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

À retenir : Mesurer l'erreur de l'approximation

Pour $\theta = 8{,}0^\circ$, $1-\cos\theta \approx 9{,}73\times10^{-3}$ et $\dfrac{\theta^2}{2} \approx 9{,}75\times10^{-3}$: l'écart relatif vaut environ $0{,}16\,\%$. Il croît comme le carré de l'angle. Vers 15°, il atteint environ $0{,}6\,\%$.

Repères pour les exercices

Méthode : Quelle relation pour quelle question ?

- **Travail d'une force de rappel** : aire sous $F_x = -K\,x$, ou $\dfrac{1}{2}\,K\,\left(x_A^2 - x_B^2\right)$.
- **Énergie stockée** : $\dfrac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$ ou $\dfrac{1}{2}\,C\,\theta^2$, référence écrite.
- **Vitesse ou amplitude sans frottement** : même E_m dans deux états.
- **Lecture d'un diagramme** : extrêmes aux intersections, $E_c = E_m - E_p$.
- **Courbes en fonction du temps** : période des énergies $\dfrac{T_0}{2}$.
- **Frottements** : $\Delta E_m = W(\vec{f})$, perte en pourcentage.
- **Pendule pesant** : $\dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$, angle en radians.

Travail du ressort
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,K\,\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

Énergie élastique
$$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$$

Solide-ressort
$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,K\,x^2$$

Sans frottement
$$E_m = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2$$

Avec frottement
$$\Delta E_m = W_{A\to B}(\vec{f})$$

Couple de torsion
$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2}\,C\,\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right)$$

Énergie de torsion
$$E_{pt} = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2$$

Pendule pesant
$$E_{pp} = m\,g\,d\,(1-\cos\theta)$$

Petits angles
$$1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$$

À retenir : Rédiger un bilan énergétique complet

Nomme le système, puis le référentiel terrestre supposé galiléen. Dresse l'inventaire des forces et dis lesquelles travaillent. Écris les références des énergies potentielles. Cite la relation employée. Termine par l'application numérique : formule, valeurs avec unités, résultat arrondi.