BURHAN

Aspects énergétiques des oscillations mécaniques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/aspects-energetiques-des-oscillations-mecaniques/exercices/entrainement

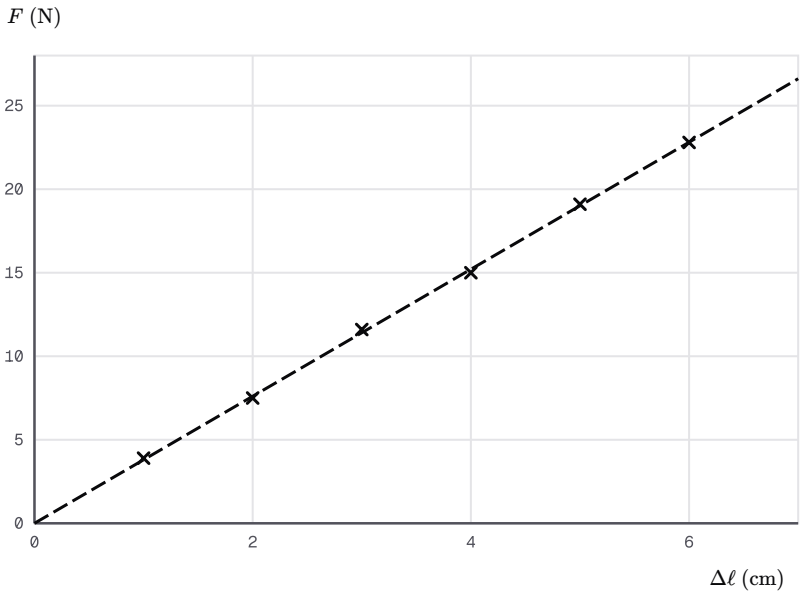
Chapitre	Palier	Exercices
Aspects énergétiques des oscillations mécaniques	Entraînement	7

Exercice 1

Ressort de trampoline : raideur mesurée et travail

Un modèle réduit de trampoline est tendu par des ressorts identiques. Pour en étudier un, on fixe une de ses extrémités. Un capteur de force mesure, pour plusieurs allongements $\Delta\ell$, la valeur F de la force exercée par le ressort sur l'autre extrémité.

$\Delta\ell$ (cm)	F (N)
$1{,}0$	$3{,}9$
$2{,}0$	$7{,}5$
$3{,}0$	$11{,}6$
$4{,}0$	$15{,}0$
$5{,}0$	$19{,}1$
$6{,}0$	$22{,}8$



Force exercée par le ressort en fonction de l'allongement mesuré

1.

Justifie, à l'aide du document, que la valeur de la force est proportionnelle à l'allongement.

INDICE

Outil : la forme du nuage de points et la droite qui le modélise.

CORRIGÉ

Lecture. Les points sont presque alignés, sur une droite qui passe par l'origine. Les petits écarts viennent de la précision des mesures.

Conclusion. La valeur de la force est proportionnelle à l'allongement : $F = K\,\Delta\ell$, où K est la raideur du ressort.

2.

Détermine la raideur K du ressort à partir de la droite de modélisation.

INDICE

Outil : le coefficient directeur de la droite, calculé entre deux points éloignés et converti en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

CORRIGÉ

Deux points de la droite. La droite passe par l'origine et, pour $\Delta\ell = 6{,}0\,\mathrm{cm}$, par $F \approx 23\,\mathrm{N}$.

Raideur. Coefficient directeur entre ces deux points :

$$\begin{aligned} K &= \frac{F}{\Delta\ell} \\ &\approx \frac{23\,\mathrm{N}}{0{,}060\,\mathrm{m}} \\ &\approx 3{,}8\times 10^{2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. La raideur du ressort vaut environ $3{,}8\times 10^{2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

3.

On repère l'extrémité mobile sur un axe $(O;\vec{i})$ orienté dans le sens de l'étirement, d'origine O au ressort non déformé : $F_x = -K\,x$. Montre, à l'aide de l'aire d'un triangle, que le travail de la force exercée par le ressort, quand l'allongement passe de 0 à $\Delta\ell$, vaut $-\dfrac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$.

INDICE

Outil : le travail d'une force variable comme aire algébrique sous la courbe de F_x en fonction de x.

CORRIGÉ

Domaine. La courbe de $F_x = -K\,x$ est une droite qui passe par l'origine. Entre $x = 0$ et $x = \Delta\ell$, le domaine est un triangle situé sous l'axe des abscisses.

Aire. Sa base vaut $\Delta\ell$ et sa hauteur $K\,\Delta\ell$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$$

Signe. La force est opposée au déplacement : l'aire se compte négativement.

Conclusion. Quand l'allongement passe de 0 à $\Delta\ell$, le travail de la force exercée par le ressort vaut $-\dfrac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$.

4.

Calcule le travail de cette force quand l'allongement passe de $2{,}0\,\text{cm}$ à $6{,}0\,\text{cm}$, avec $K = 3{,}8\times 10^{2}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

INDICE

Outil : une différence de deux triangles, ou un trapèze, sous la même droite.

CORRIGÉ

Différence de deux triangles.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\,K\left(x_A^2 - x_B^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\times 380 \\ &\quad\times\left(0{,}020^2 - 0{,}060^2\right) \\ &\approx -0{,}61\,\text{J} \end{aligned}$$

Conclusion. Quand l'allongement passe de $2{,}0\,\text{cm}$ à $6{,}0\,\text{cm}$, le travail de la force exercée par le ressort vaut environ $-0{,}61\,\text{J}$: il est résistant.

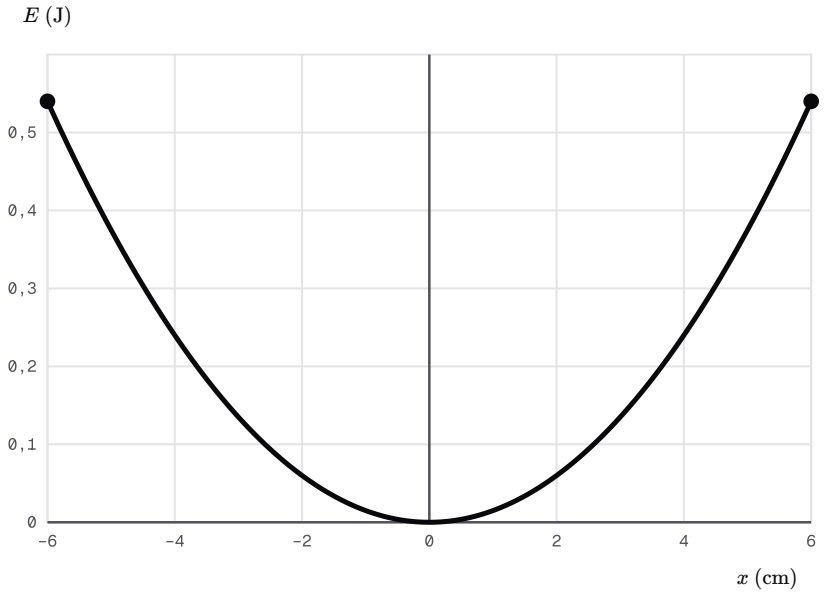
Exercice 2

Plateau vibrant : vitesse et amplitude après un lancer

Dans un atelier, un plateau vibrant trie de petites pièces. On le modélise par un solide de masse $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ qui glisse sans frottement sur un guide horizontal. Il est lié à un ressort horizontal de raideur $K = 300\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. On repère le solide par son abscisse x sur un axe horizontal. L'origine O correspond au ressort ni étiré ni comprimé ; le sens positif est celui de l'étirement.

Références : ressort non déformé pour E_{pe}, plan du guide pour E_{pp}. Le document donne l'énergie potentielle élastique du ressort en fonction de x ; le tableau décrit deux lancers.

Lancer	Position	Vitesse
1	$x = 0$	$0{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
2	$x = 2{,}0\,\mathrm{cm}$	$0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$



Énergie potentielle élastique du ressort du plateau vibrant

1.

Lancer 1. Justifie que l'énergie mécanique du plateau se conserve, puis calcule-la.

INDICE

Outil : le théorème de l'énergie cinétique, avec les forces qui travaillent pendant un déplacement horizontal sans frottement.

CORRIGÉ

Bilan. Système : le plateau, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du guide, perpendiculaire au guide sans frottement, et la force $\vec{F}$ du ressort.

Travaux. $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires au déplacement : leurs travaux sont nuls. Le travail de $\vec{F}$ vaut $-\Delta E_{pe}$. Le théorème de l'énergie cinétique donne $\Delta E_c = -\Delta E_{pe}$, soit $\Delta E_m = 0$.

Valeur. En $x = 0$, $E_{pe} = 0$:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 0{,}80^2 \\ &\approx 0{,}38\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Conclusion. Sans frottement, l'énergie mécanique du plateau se conserve ; pour le lancer 1, elle vaut environ $0{,}38\ \mathrm{J}$.

2.

Calcule l'amplitude des oscillations du lancer 1. Contrôle-la sur le document, en y traçant la droite de l'énergie mécanique.

INDICE

Outil : l'énergie mécanique écrite à une position extrême, où la vitesse est nulle.

CORRIGÉ

Position extrême. $E_c = 0$, donc $E_m = \frac{1}{2}\, K\, x_m^2$:

$$\begin{aligned} x_m &= \sqrt{\frac{2\, E_m}{K}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 0{,}384}{300}} \\ &\approx 5{,}1 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Contrôle. Sur le document, la droite horizontale d'ordonnée $0{,}38\ \mathrm{J}$ coupe la parabole vers $x \approx \pm 5\ \mathrm{cm}$.

Conclusion. L'amplitude des oscillations du lancer 1 vaut environ $5{,}1\ \mathrm{cm}$, en accord avec le document.

3.

Calcule la vitesse du plateau quand il passe en $x = 3{,}0\,\text{cm}$ lors du lancer 1.

INDICE

Outil : l'énergie mécanique écrite à cette position.

CORRIGÉ

Énergie potentielle. $E_{pe} = \dfrac{1}{2} \times 300 \times 0{,}030^2 = 0{,}135\,\text{J}$.

Énergie cinétique. $E_c = 0{,}384 - 0{,}135 = 0{,}249\,\text{J}$.

Vitesse.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 0{,}249}{1{,}2}} \\ &\approx 0{,}64\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Conclusion. En $x = 3{,}0\,\text{cm}$, le plateau se déplace à environ $0{,}64\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.

Lancer 2. Calcule l'énergie mécanique, puis la vitesse maximale et l'amplitude des oscillations.

INDICE

Outil : au lancer 2, les deux termes de l'énergie mécanique sont non nuls.

CORRIGÉ

Énergie mécanique.

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\,K\,x^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2 \\ &= 0{,}060 + 0{,}15 \\ &= 0{,}21\,\text{J} \end{aligned}$$

Vitesse maximale. $v_m = \sqrt{\dfrac{2\,E_m}{m}} = \sqrt{0{,}35} \approx 0{,}59\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Amplitude. $x_m = \sqrt{\dfrac{2\,E_m}{K}} \approx 3{,}7 \times 10^{-2}\,\text{m}$.

Conclusion. Pour le lancer 2, $E_m = 0{,}21\,\text{J}$, la vitesse maximale vaut environ $0{,}59\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'amplitude environ $3{,}7\,\text{cm}$.

Exercice 3

Porte coulissante : domaine du mouvement et vitesse

Une porte coulissante de placard, de masse $m = 1{,}5\,\text{kg}$, est rappelée par un ressort horizontal ; ses roulettes, de masse négligeable, rendent les frottements négligeables. Son abscisse x a pour origine la position de la porte quand le ressort a sa longueur à vide. Le document trace, en fonction de x, l'énergie mécanique de la porte et l'énergie potentielle élastique du ressort, nulle à vide.

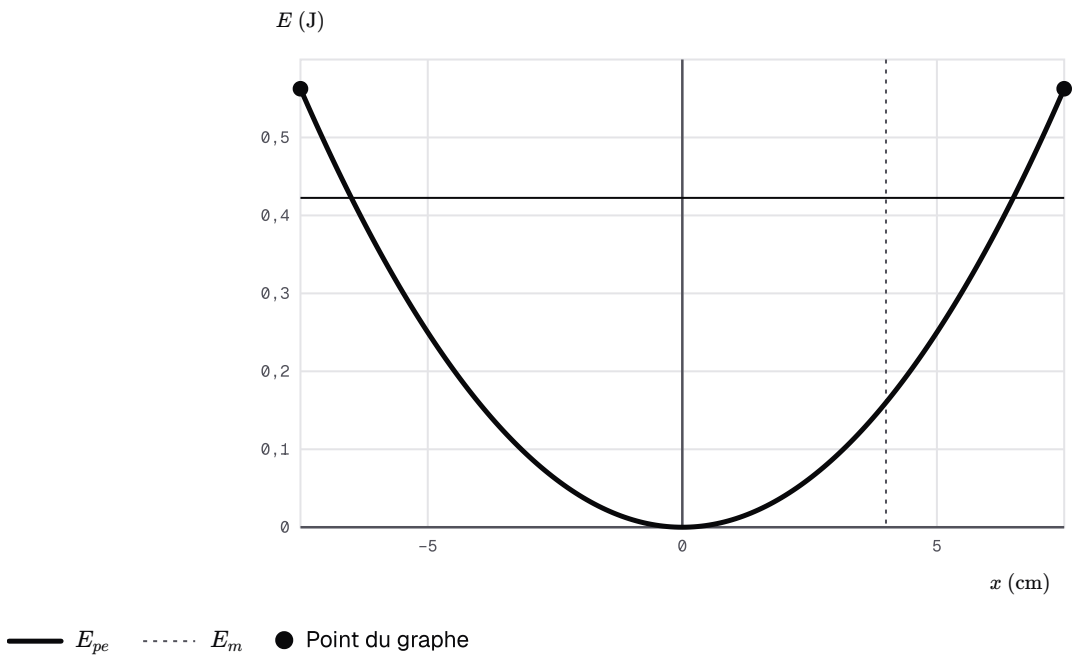


Diagramme d'énergie de la porte coulissante

1.

Pourquoi la droite de l'énergie mécanique est-elle horizontale ?

INDICE

Outil : la condition de conservation de l'énergie mécanique.

CORRIGÉ

Hypothèse. Les frottements sont négligeables. Le poids et la réaction du rail ne travaillent pas ; seule la force du ressort travaille, et son travail vaut $-\Delta E_{pe}$.

Loi. D'après le théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = -\Delta E_{pe}$, soit $\Delta E_m = 0$.

Conclusion. L'énergie mécanique de la porte se conserve : elle a la même valeur en toute position, d'où une droite horizontale.

2.

Lis sur le diagramme le domaine du mouvement de la porte.

INDICE

Outil : l'énergie cinétique ne peut pas être négative.

CORRIGÉ

Condition. $E_c = E_m - E_{pe} \geq 0$, donc $E_{pe} \leq E_m$: la porte reste là où la parabole est sous la droite.

Lecture. La droite coupe la parabole en $x \approx -6{,}5\,\text{cm}$ et $x \approx 6{,}5\,\text{cm}$.

Conclusion. La porte se déplace entre $x \approx -6{,}5\,\text{cm}$ et $x \approx 6{,}5\,\text{cm}$.

3.

Déduis du diagramme la raideur K du ressort.

INDICE

Outil : l'expression de l'énergie potentielle élastique en un point lu sur la parabole.

CORRIGÉ

Point lu. En $x = 6{,}5\,\text{cm}$, $E_{pe} \approx 0{,}42\,\text{J}$.

Raideur.

$$\begin{aligned} K &= \frac{2\,E_{pe}}{x^2} \\ &\approx \frac{2 \times 0{,}42}{0{,}065^2} \\ &\approx 2{,}0 \times 10^{2}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Conclusion. La raideur du ressort vaut environ $2{,}0 \times 10^{2}\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

4.

Calcule la vitesse de la porte en $x = 4{,}0\,\text{cm}$.

INDICE

Outil : l'écart vertical entre la droite et la parabole à cette position.

CORRIGÉ

Lecture. En $x = 4{,}0\,\text{cm}$, $E_{pe} \approx 0{,}16\,\text{J}$, donc $E_c \approx 0{,}26\,\text{J}$.

Vitesse.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} \\ &\approx \sqrt{\frac{2 \times 0{,}26}{1{,}5}} \\ &\approx 0{,}59\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Conclusion. En $x = 4{,}0\,\text{cm}$, la porte se déplace à environ $0{,}59\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5.

Où la vitesse de la porte est-elle maximale ? Calcule sa valeur.

INDICE

Outil : la conservation de l'énergie mécanique, et l'état du ressort à la position d'équilibre.

CORRIGÉ

Position. $E_c = E_m - E_{pe}$ est la plus grande là où E_{pe} est la plus petite, c'est-à-dire nulle, en $x = 0$: l'énergie cinétique y vaut E_m.

Valeur.

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{\frac{2\,E_m}{m}} \\ &\approx \sqrt{\frac{2 \times 0{,}42}{1{,}5}} \\ &\approx 0{,}75\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. La vitesse est maximale au passage par $x = 0$ et vaut environ $0{,}75\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

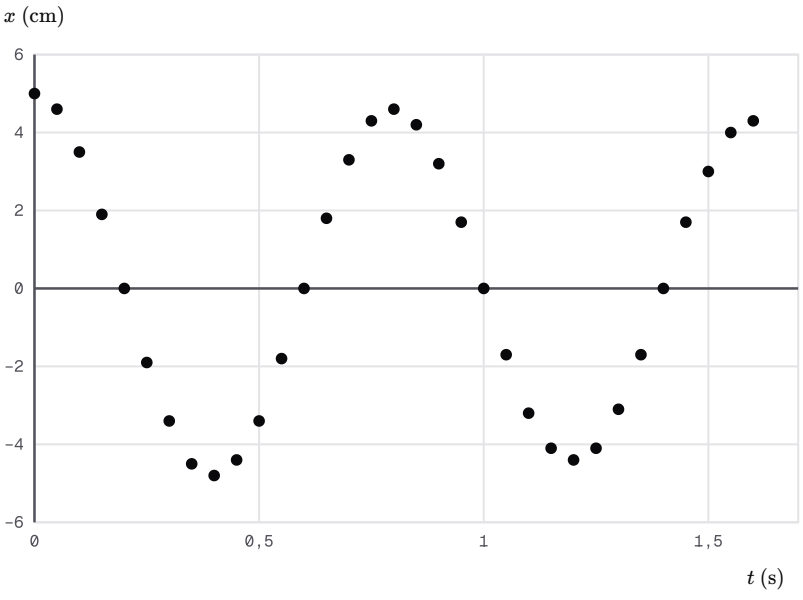
Exercice 4

Plaquette freinée par un aimant : énergie perdue

Une plaquette d'aluminium montée sur roulettes oscille sur un rail horizontal, liée à un ressort de raideur $K = 36\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Un aimant placé sous le rail exerce sur elle une force de freinage opposée à la vitesse, modélisée comme un frottement ; les autres frottements sont négligés. L'abscisse x est comptée depuis la position de la plaquette quand le ressort est à vide.

Un capteur relève x toutes les $0{,}05\,\mathrm{s}$ (document). Le logiciel donne aussi les abscisses des premières positions extrêmes, connues à $0{,}1\,\mathrm{cm}$ près.

t (s)	x (cm)
0,00	5,0
0,40	−4,8
0,80	4,6
1,20	−4,4



Abscisses de la plaquette relevées par le capteur

1.

Mesure sur le document la période des oscillations. Comment évolue leur amplitude ?

INDICE

Outil : deux maximums successifs de x sont séparés d'une période.

CORRIGÉ

Période. Les maximums de x sont atteints à $t = 0$ et vers $t = 0{,}80\,\text{s}$: la période vaut environ $0{,}80\,\text{s}$.

Amplitude. Les maximums successifs diminuent : $5{,}0\,\text{cm}$, puis $4{,}6\,\text{cm}$.

Conclusion. La plaquette oscille avec une période d'environ $0{,}80\,\text{s}$, et son amplitude diminue lentement d'une oscillation à l'autre.

2.

Justifie qu'aux instants du tableau, l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x^2$ (référence : ressort à vide). Calcule E_m à $t = 0$ et à $t = 0{,}80\,\text{s}$, puis l'énergie perdue pendant cette oscillation et le pourcentage qu'elle représente.

INDICE

Outil : la vitesse de la plaquette à une position extrême.

CORRIGÉ

Positions extrêmes. La plaquette y change de sens : $v = 0$, donc $E_m = E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,K\,x^2$.

À $t = 0$.

$$\begin{aligned} E_m(0) &= \frac{1}{2} \times 36 \times 0{,}050^2 \\ &= 45{,}0\,\text{mJ} \end{aligned}$$

À $t = 0{,}80\,\text{s}$.

$$\begin{aligned} E_m(0{,}80) &= \frac{1}{2} \times 36 \\ &\quad \times 0{,}046^2 \\ &\approx 38{,}1\,\text{mJ} \end{aligned}$$

Perte. $45{,}0 - 38{,}1 \approx 6{,}9\,\text{mJ}$, soit $\dfrac{6{,}9}{45{,}0} \times 100 \approx 15\,\%$.

Conclusion. Pendant cette oscillation, la plaquette perd environ $6{,}9\,\text{mJ}$, soit environ $15\,\%$ de son énergie mécanique initiale.

3.

Déduis-en le travail de la force de freinage entre ces deux instants. Sous quelle forme l'énergie perdue se retrouve-t-elle ?

INDICE

Outil : la non-conservation de l'énergie mécanique en présence de frottements.

CORRIGÉ

Travail. La variation de l'énergie mécanique est égale au travail de la force de freinage $\vec{f}$:

$$W(\vec{f}) = \Delta E_m \approx -6{,}9\,\text{mJ}$$

Forme. Cette énergie est d'abord convertie en chaleur dans la plaquette, puis cédée à l'air et au rail.

Conclusion. Entre $t = 0$ et $t = 0{,}80\,\text{s}$, le travail de la force de freinage vaut environ $-6{,}9\,\text{mJ}$; l'énergie perdue devient de la chaleur.

4.

Chaque abscisse du tableau est connue à $0{,}1\,\text{cm}$ près. Encadre E_m à $t = 0$ et à $t = 0{,}80\,\text{s}$. La diminution mesurée peut-elle venir de la seule incertitude de lecture ?

INDICE

Outil : calcule E_m pour la plus petite et pour la plus grande abscisse compatibles avec chaque lecture.

CORRIGÉ

À $t = 0$. x est compris entre $4{,}9\,\text{cm}$ et $5{,}1\,\text{cm}$: $E_m(0)$ est compris entre $43{,}2\,\text{mJ}$ et $46{,}8\,\text{mJ}$.

À $t = 0{,}80\,\text{s}$. x est compris entre $4{,}5\,\text{cm}$ et $4{,}7\,\text{cm}$: $E_m(0{,}80)$ est compris entre $36{,}4\,\text{mJ}$ et $39{,}8\,\text{mJ}$.

Comparaison. Même dans le cas le plus défavorable, la diminution vaut au moins

$$43{,}2 - 39{,}8 \approx 3{,}4\,\text{mJ}$$

Conclusion. Les deux encadrements ne se recouvrent pas : la diminution de l'énergie mécanique est réelle, due au freinage, et non à l'incertitude de lecture.

Exercice 5

Pendule « de 400 jours » : balancier de torsion

Le balancier d'une pendule « de 400 jours » porte quatre boules ; il est suspendu à un fil de torsion vertical et tourne lentement d'un côté puis de l'autre. Le balancier a pour moment d'inertie, autour du fil, $J_\Delta = 2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Sur quelques oscillations, les frottements sont négligés.

L'abscisse angulaire θ vaut zéro quand le fil n'est pas tordu. Le document est le diagramme d'énergie du balancier : énergie potentielle de torsion (référence : fil non tordu) et énergie mécanique.

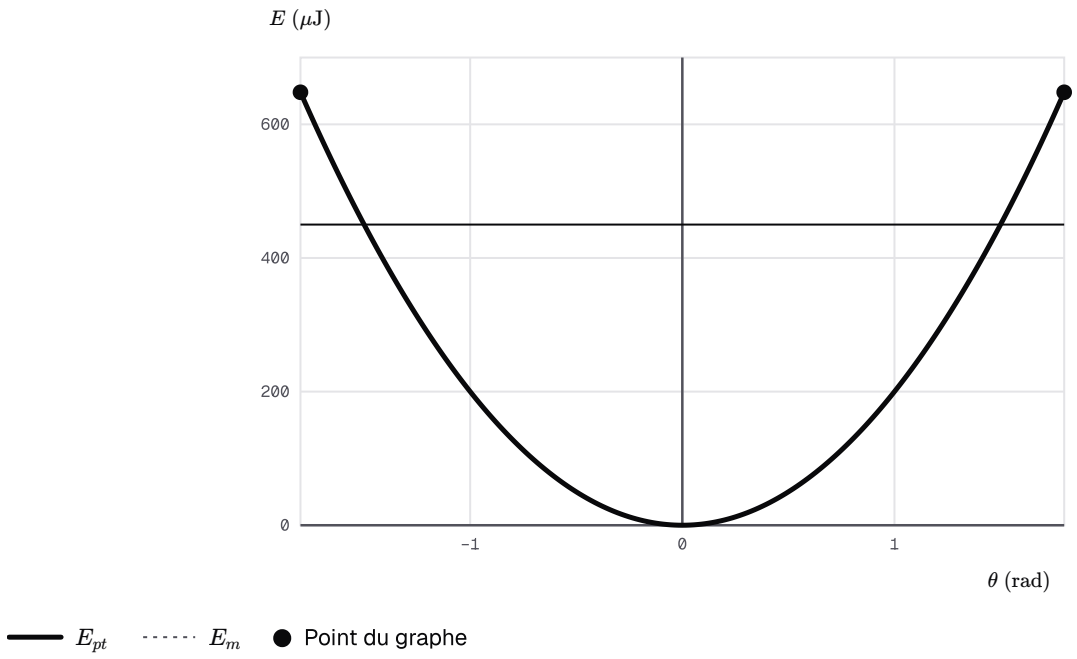


Diagramme d'énergie du balancier de torsion

1.

Lis l'amplitude angulaire θ_m et l'énergie mécanique. Exprime θ_m en degrés.

INDICE

Outil : les intersections de la droite de l'énergie mécanique et de la parabole.

CORRIGÉ

Lectures. La droite coupe la parabole en $\theta \approx \pm 1{,}5\,\mathrm{rad}$; elle est à $E_m \approx 450\,\mu\mathrm{J} = 4{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

Degrés. $\theta_m \approx 1{,}5 \times \dfrac{180}{\pi} \approx 86^\circ$.

Conclusion. L'amplitude vaut $\theta_m \approx 1{,}5\,\mathrm{rad}$, soit environ 86°, et l'énergie mécanique environ $4{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

2.

Déduis-en la constante de torsion C du fil.

INDICE

Outil : l'énergie mécanique d'un pendule de torsion à une position extrême.

CORRIGÉ

Relation. Aux extrêmes, $E_m = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^2$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\,E_m}{\theta_m^2} \\ &\approx \frac{2 \times 4{,}5 \times 10^{-4}}{1{,}5^2} \\ &\approx 4{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. La constante de torsion du fil vaut environ $4{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$.

3.

Calcule l'énergie cinétique du balancier quand $\theta = 0{,}75\,\mathrm{rad}$.

INDICE

Outil : l'énergie potentielle de torsion à cette position, retranchée de l'énergie mécanique.

CORRIGÉ

Énergie potentielle.

$$\begin{aligned} E_{pt} &= \frac{1}{2}\,C\,\theta^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \times 4{,}0 \times 10^{-4} \\ &\quad \times 0{,}75^2 \\ &\approx 1{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Énergie cinétique. $E_c = E_m - E_{pt} \approx 4{,}5 \times 10^{-4} - 1{,}125 \times 10^{-4} \approx 3{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

Conclusion. Pour $\theta = 0{,}75\,\mathrm{rad}$, l'énergie cinétique du balancier vaut environ $3{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

4.

Calcule la vitesse angulaire maximale du balancier.

INDICE

Outil : l'énergie cinétique de rotation au passage par la position du fil non tordu.

CORRIGÉ

Passage par $\theta = 0$. $E_{pt} = 0$, donc $\frac{1}{2} J_\Delta \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2_{\max} = E_m$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{2\,E_m}{J_\Delta}}$$
$$\approx \sqrt{\frac{9{,}0 \times 10^{-4}}{2{,}0 \times 10^{-3}}}$$
$$\approx 0{,}67\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

Conclusion. La vitesse angulaire maximale du balancier vaut environ $0{,}67\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

5.

Calcule le travail du couple de torsion quand le balancier va de θ_m à 0. Est-il moteur ou résistant ?

INDICE

Outil : le travail du couple de torsion entre deux abscisses angulaires.

CORRIGÉ

Calcul.

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2} C \left(\theta_m^2 - 0^2\right)$$
$$\approx 4{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

Conclusion. De θ_m à 0, le couple de torsion effectue un travail moteur d'environ $4{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$: le fil se détord.

6.

On arrête le mécanisme qui entretient les oscillations. Plusieurs heures plus tard, l'amplitude n'est plus que $\theta'_m = 1{,}2\,\mathrm{rad}$. L'énergie mécanique s'est-elle conservée ? Calcule le travail du couple de frottement pendant cette durée, avec $C = 4{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$.

INDICE

Outil : la non-conservation de l'énergie mécanique d'un pendule de torsion soumis à des frottements.

CORRIGÉ

Nouvelle énergie. À un extrême, la vitesse angulaire est nulle :

$$\begin{aligned} E'_m &= \frac{1}{2}\,C\,\theta'^2_m \\ &= \frac{1}{2} \times 4{,}0 \times 10^{-4} \\ &\quad \times 1{,}2^2 \\ &\approx 2{,}9 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Bilan. L'énergie mécanique a diminué : elle ne s'est pas conservée. Sa variation est égale au travail du couple de frottement :

$$\begin{aligned} W &= E'_m - E_m \\ &\approx -1{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Conclusion. Sans entretien, l'énergie mécanique du balancier diminue ; le travail du couple de frottement vaut environ $-1{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$, soit environ $36\,\%$ de l'énergie initiale.

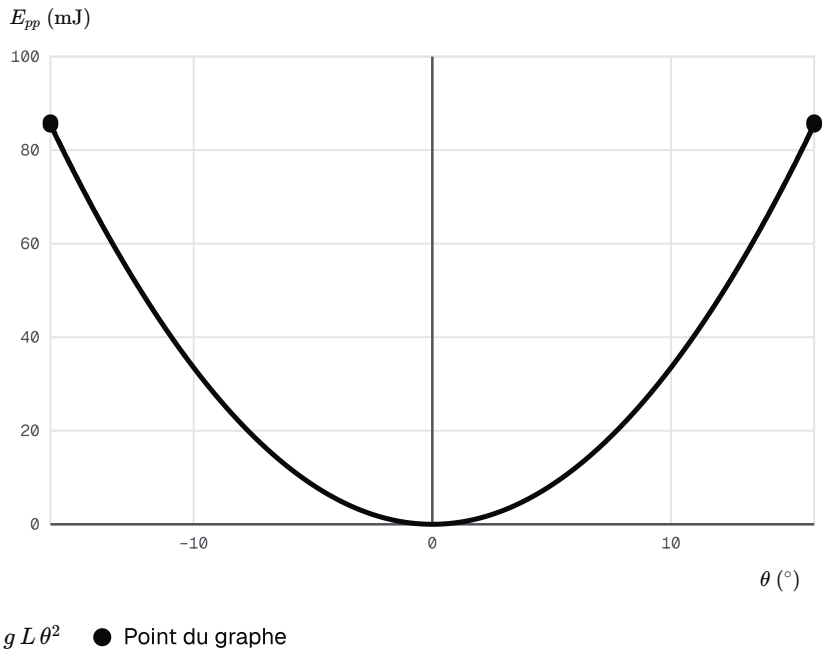
Exercice 6

Maquette de balançoire : énergie et petits angles

Une maquette de balançoire est modélisée par un pendule simple : une nacelle assimilée à un point, suspendue à deux fils de masse négligeable. On l'écarte de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse ; les frottements sont négligés. Pour ce pendule, $d = L$ et $J_\Delta = m\,L^2$.

Donnée	Valeur
masse de la nacelle	$m = 0{,}450\,\mathrm{kg}$
longueur des fils	$L = 0{,}500\,\mathrm{m}$
amplitude	$\theta_m = 14^\circ$
pesanteur	$g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Le document trace, en fonction de θ, l'énergie potentielle de pesanteur de la nacelle (référence : position d'équilibre) et son approximation des faibles oscillations.



Énergie potentielle de pesanteur de la nacelle, valeur exacte et approximation

1.

Écris l'énergie mécanique de la nacelle en fonction de θ et de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, avec sa référence. Pourquoi se conserve-t-elle ?

INDICE

Outil : l'énergie mécanique du pendule pesant, puis le travail de chaque force.

CORRIGÉ

Expression. Référence : $E_{pp} = 0$ à la position d'équilibre.

$$E_m = \frac{1}{2}\, m\, L^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m\, g\, L\, (1 - \cos\theta)$$

Conservation. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la nacelle subit son poids et la tension des fils. La tension est perpendiculaire à la vitesse : elle ne travaille pas. Le travail du poids vaut $-\Delta E_{pp}$.

Conclusion. Le théorème de l'énergie cinétique donne $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$: sans frottement, l'énergie mécanique de la nacelle se conserve.

2.

Calcule l'énergie mécanique avec l'expression exacte, puis avec l'approximation des faibles oscillations. Compare les deux valeurs.

INDICE

Outil : l'énergie à la position extrême, où la vitesse est nulle ; l'angle en radians pour l'approximation.

CORRIGÉ

Valeur exacte. $m\, g\, L = 2{,}205\,\mathrm{J}$ et $1 - \cos 14^\circ \approx 2{,}97 \times 10^{-2}$:

$$E_m \approx 6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

Approximation. $\theta_m = 14 \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}244\,\mathrm{rad}$:

$$E_m \approx \frac{1}{2}\, m\, g\, L\, \theta_m^2 \approx 6{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

Écart relatif. Environ $0{,}5\,\%$.

Document. Les deux courbes restent presque confondues jusqu'à 14°, ce que confirme ce faible écart.

Conclusion. L'expression exacte donne environ $6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$ et l'approximation environ $6{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$: à 14°, l'écart reste d'environ $0{,}5\,\%$.

3.

Calcule la vitesse de la nacelle au passage par la position d'équilibre.

INDICE

Outil : la conservation de l'énergie mécanique entre la position extrême et l'équilibre.

CORRIGÉ

Bilan. À l'équilibre, $E_{pp} = 0$ et $\dfrac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,g\,L\,(1-\cos\theta_m)$:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\theta_m)} \\ &\approx \sqrt{2\times 9{,}80\times 0{,}500}\\ &\quad\times\sqrt{2{,}97\times 10^{-2}} \\ &\approx 0{,}54\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. Au passage par l'équilibre, la nacelle se déplace à environ $0{,}54\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4.

Calcule la vitesse de la nacelle quand $\theta = 7{,}0^\circ$.

INDICE

Outil : l'énergie mécanique écrite à cette position, avec l'expression exacte de l'énergie potentielle.

CORRIGÉ

Énergie potentielle. $E_{pp} = 2{,}205\times(1-\cos 7{,}0^\circ) \approx 1{,}64\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$.

Énergie cinétique. $E_c \approx 6{,}55\times 10^{-2} - 1{,}64\times 10^{-2} \approx 4{,}91\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$.

Vitesse.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} \\ &\approx \sqrt{\frac{2\times 4{,}91\times 10^{-2}}{0{,}450}} \\ &\approx 0{,}47\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $\theta = 7{,}0^\circ$, la nacelle se déplace à environ $0{,}47\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

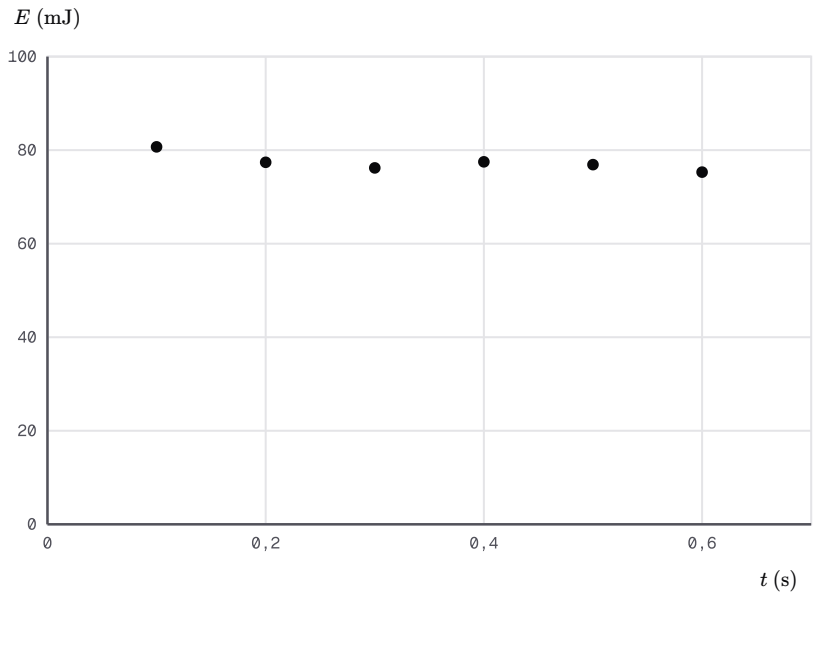
Exercice 7

TP : énergies d'un chariot filmé

En TP, un chariot de laboratoire de masse $m = 0{,}500\,\text{kg}$ roule sur un rail horizontal, lié à un ressort de raideur $K = 25{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ mesurée au préalable. Une caméra filme le mouvement ; un logiciel de pointage donne l'abscisse x du chariot, comptée à partir du ressort à vide, et sa vitesse v.

t (s)	x (cm)	v ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
$0{,}10$	$6{,}1$	$-0{,}37$
$0{,}20$	$1{,}2$	$-0{,}55$
$0{,}30$	$-4{,}1$	$-0{,}47$
$0{,}40$	$-7{,}5$	$-0{,}17$
$0{,}50$	$-7{,}2$	$0{,}22$
$0{,}60$	$-3{,}5$	$0{,}49$

Le document porte, pour chaque ligne, la valeur de E_m calculée par le logiciel (E_{pe} nulle pour le ressort à vide).



Énergie mécanique du chariot calculée à partir des mesures

1.

Propose un protocole pour mesurer la raideur du ressort avant l'enregistrement : montage, mesures et exploitation.

INDICE

Outil : la condition d'équilibre d'un solide suspendu au ressort.

CORRIGÉ

Montage. On suspend le ressort verticalement à une potence, avec une règle graduée à côté.

Mesures. On accroche successivement des masses marquées m_i (par exemple de $50\,\mathrm{g}$ à $300\,\mathrm{g}$). À l'équilibre, on mesure chaque allongement $\Delta\ell_i$.

Exploitation. À l'équilibre, $K\,\Delta\ell_i = m_i\,g$. On trace $m_i\,g$ en fonction de $\Delta\ell_i$: les points s'alignent sur une droite passant par l'origine, de coefficient directeur K.

Conclusion. La raideur s'obtient comme le coefficient directeur de la droite $m\,g$ en fonction de $\Delta\ell$, mesurée sur plusieurs masses à l'équilibre.

2.

Explique comment le logiciel peut obtenir la vitesse du chariot à partir des positions pointées sur la vidéo.

INDICE

Outil : la vitesse moyenne sur un petit intervalle de temps qui encadre l'instant étudié.

CORRIGÉ

Images successives. La caméra prend des images séparées d'une durée τ constante.

Vitesse. À l'image i, le logiciel divise le déplacement entre les images voisines par leur durée :

$$v_i \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,\tau}$$

Conclusion. La vitesse est calculée comme une vitesse moyenne sur l'intervalle de durée 2τ centré sur l'instant de la mesure.

3.

Calcule E_{pe}, E_c et E_m à $t = 0{,}30\,\mathrm{s}$, puis compare E_m au point du document.

INDICE

Outil : les expressions des deux énergies du système solide-ressort, avec les références de l'énoncé.

CORRIGÉ

Énergie potentielle élastique. $x = -0{,}041\,\mathrm{m}$:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,x^2 \approx 21\,\mathrm{mJ}$$

Énergie cinétique.

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \approx 55\,\mathrm{mJ}$$

Énergie mécanique. $E_m = E_{pe} + E_c \approx 76\,\mathrm{mJ}$.

Comparaison. Le document porte $E_m \approx 76{,}2\,\mathrm{mJ}$ à cet instant : les deux valeurs concordent.

Conclusion. À $t = 0{,}30\,\mathrm{s}$, $E_{pe} \approx 21\,\mathrm{mJ}$, $E_c \approx 55\,\mathrm{mJ}$ et $E_m \approx 76\,\mathrm{mJ}$, comme sur le document.

4.

D'après le document, l'énergie mécanique se conserve-t-elle ? Chiffre son écart relatif et propose deux causes.

INDICE

Outil : si l'énergie se conserve, E_m garde une valeur constante ; compare sa plus grande et sa plus petite valeur.

CORRIGÉ

Lecture. E_m varie de $80{,}7\,\mathrm{mJ}$ à $75{,}3\,\mathrm{mJ}$.

Écart relatif.

$$\frac{80{,}7 - 75{,}3}{80{,}7} \approx 7\,\%$$

Causes. Les frottements du rail et de l'air font baisser E_m au fil du temps. Les arrondis du pointage, au millimètre et au centième de $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, la font aussi varier d'une ligne à l'autre.

Conclusion. L'énergie mécanique est presque constante, à environ $7\,\%$ près : la conservation est vérifiée de façon approchée, limitée par de faibles frottements et par la précision des mesures.