BURHAN

Aspects énergétiques des oscillations mécaniques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Physiques · Physique-Chimie

Version en ligne : burhan.ma/2bac/pc/physique-chimie/aspects-energetiques-des-oscillations-mecaniques/cours

Chapitre	Semestre
Aspects énergétiques des oscillations mécaniques	Semestre 2

Travail d'une force variable : aire sous la courbe

Un ressort étiré au dynamomètre

Accroche un ressort par une extrémité à un support fixe. Tire l'autre extrémité avec un dynamomètre, lentement, le long de l'axe du ressort. Pour plusieurs allongements $\Delta\ell$, relève la force F indiquée.

Plus tu étires le ressort, plus l'aiguille du dynamomètre monte : la force varie pendant le déplacement.

Devine : Un allongement deux fois plus grand

Avant de regarder les mesures : quand l'allongement du ressort double, que fait la force indiquée par le dynamomètre ?

A. Elle double aussi.

Juste.

Juste : dans son domaine d'élasticité, un ressort exerce une force proportionnelle à son allongement. Les mesures le confirment.

B. Elle garde la même valeur.

Faux.

Faux. Il faut tirer de plus en plus fort pour étirer davantage : la force augmente avec l'allongement.

C. Elle est multipliée par quatre.

Faux.

Faux. Le carré de l'allongement apparaîtra dans une énergie, pas dans la force.

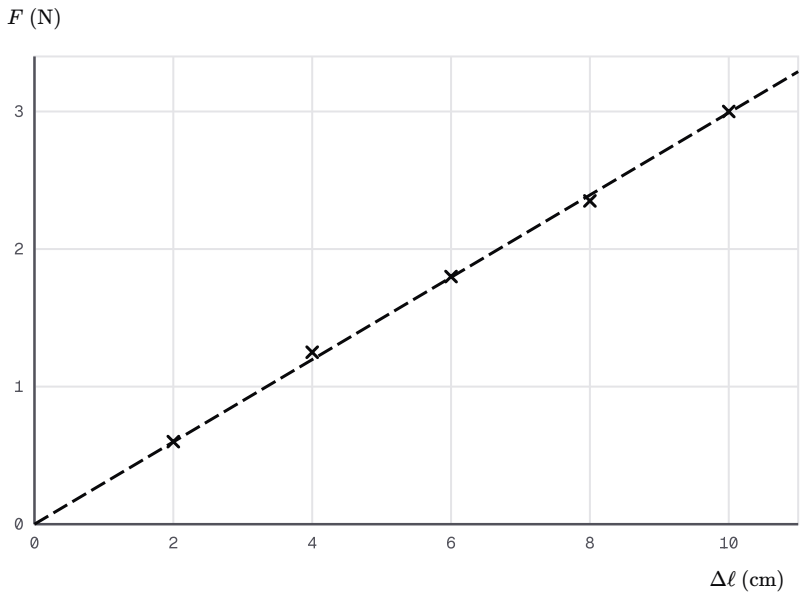
D. Elle diminue de moitié.

Faux.

Faux. Un ressort plus étiré tire plus fort ; il ne se relâche pas.

Correction

La force est proportionnelle à l'allongement : $F = K\,\Delta\ell$, où K est la raideur du ressort. Doubler $\Delta\ell$ double F. Sur la figure suivante, les points de mesure s'alignent sur une droite qui passe par l'origine.



Force indiquée par le dynamomètre en fonction de l'allongement du ressort : points de mesure et droite de modélisation.

Droite de modélisation calculée par moindres carrés sur 5 points : y = a x, avec a ≈ 0,2991.

Les croix s'alignent sur une droite passant par l'origine : F est proportionnelle à $\Delta\ell$. La droite de modélisation monte d'environ $0{,}30\,\mathrm{N}$ par centimètre. La raideur vaut donc $K \approx 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Pendant l'étirement, la force du dynamomètre passe de $0{,}60\,\mathrm{N}$ à $3{,}0\,\mathrm{N}$. Comment calculer son travail ?

Du rectangle à l'aire sous une courbe

Rappel : travail d'une force constante. Une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application va de A à B a pour travail $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Pour une force parallèle à l'axe $(O;\vec{i})$, ce travail vaut $F_x\,(x_B - x_A)$.

Sur le graphe de F_x en fonction de x, c'est l'aire d'un rectangle. Une force de $1{,}5\,\mathrm{N}$ sur $20\,\mathrm{cm}$ donne ainsi $1{,}5 \times 0{,}20 = 0{,}30\,\mathrm{J}$.

Devine : Étirer de zéro à six centimètres

Le dynamomètre étire le ressort de $\Delta\ell = 0$ à $\Delta\ell = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Sa force passe de 0 à $1{,}8\,\mathrm{N}$, proportionnellement à l'allongement. Quel est son travail ?

A. $1{,}8 \times 0{,}060 = 0{,}11\,\mathrm{J}$

Faux.

Faux. La force ne vaut $1{,}8\,\mathrm{N}$ qu'à la fin : ce produit suppose qu'elle garde cette valeur pendant tout le déplacement.

B. $\dfrac{1}{2} \times 1{,}8 \times 0{,}060 = 0{,}054\,\mathrm{J}$

Juste.

Juste : sous la droite, le domaine est un triangle, d'aire la moitié du rectangle.

C. $1{,}8 \times 6{,}0 = 11\,\text{J}$

Faux.

Faux. Le déplacement doit être en mètres : $6{,}0\,\text{cm} = 0{,}060\,\text{m}$.

D. $0\,\text{J}$, car la force part de zéro

Faux.

Faux. La force n'est nulle qu'au départ ; elle travaille ensuite à chaque petit déplacement.

Correction

Découpe le déplacement en petits morceaux : sur chacun, la force est presque constante, et son travail est l'aire d'un rectangle très fin. Ces rectangles remplissent le triangle sous la droite.

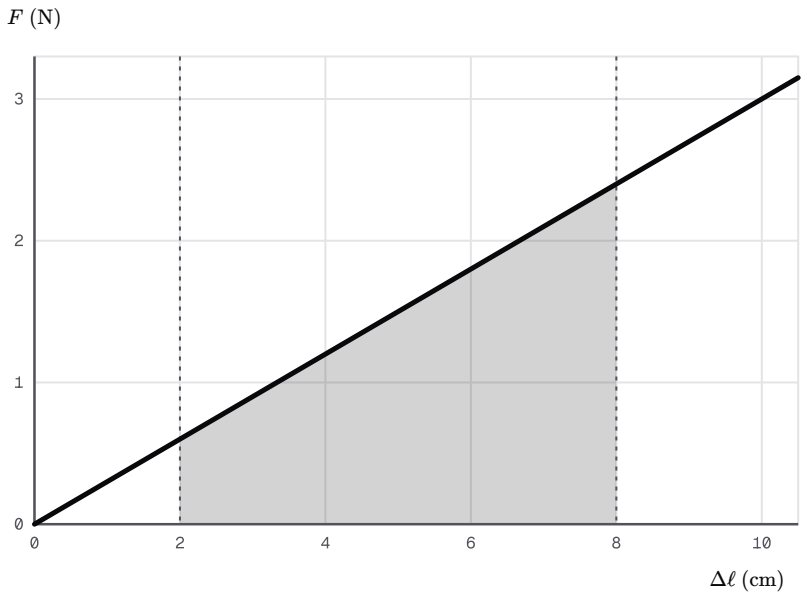
$$W = \frac{1}{2} \times 1{,}8 \times 0{,}060 = 0{,}054\,\text{J}$$

Définition : Travail d'une force ou d'un couple variable : aire sous la courbe

Un solide se déplace le long d'un axe $(O;\vec{i})$ de la position d'abscisse x_A à celle d'abscisse x_B, sous l'action d'une force $\vec{F} = F_x\,\vec{i}$ dont la coordonnée F_x varie avec l'abscisse x. Sur un déplacement très petit δx, la force est presque constante et son travail vaut $F_x\,\delta x$. Le **travail** de $\vec{F}$ entre A et B est la somme de ces travaux élémentaires : c'est l'**aire algébrique** comprise entre la courbe de F_x en fonction de x, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_A$ et $x = x_B$. Elle est comptée positivement là où F_x et le déplacement ont le même signe, négativement sinon.

De même, le travail d'un couple de moment $\mathcal{M}_\Delta$ variable, pour une rotation de l'abscisse angulaire θ_1 à θ_2, est l'aire algébrique sous la courbe de $\mathcal{M}_\Delta$ en fonction de θ. Le travail s'exprime en joules (J).

Lire un travail comme une aire



Force du dynamomètre en fonction de l'allongement : le domaine teinté, entre 2,0 cm et 8,0 cm, représente le travail de cette force.

Exemple : Travail du dynamomètre entre deux allongements

Le dynamomètre étire le ressort de $\Delta\ell_A = 2{,}0\,\text{cm}$ à $\Delta\ell_B = 8{,}0\,\text{cm}$. Sa force passe de $0{,}60\,\text{N}$ à $2{,}4\,\text{N}$. Le domaine sous la droite est un trapèze de hauteur $6{,}0\,\text{cm} = 0{,}060\,\text{m}$:

$$W = \frac{(0{,}60 + 2{,}4) \times 0{,}060}{2}$$
$$= 0{,}090\,\text{J}$$

La force et le déplacement ont le même sens : le travail est positif, il est **moteur**.

Vérifie : Un étirement plus court

Le dynamomètre étire le ressort de $\Delta\ell = 0$ à $\Delta\ell = 4{,}0\,\text{cm}$. Sur la droite de modélisation, sa force passe de 0 à $1{,}2\,\text{N}$. Que vaut son travail ?

A. $1{,}2 \times 0{,}040 = 0{,}048\,\text{J}$

Faux.

Faux. Ce produit suppose que la force vaut $1{,}2\,\text{N}$ pendant tout l'étirement ; elle n'atteint cette valeur qu'à la fin.

B. $\frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 4{,}0 = 2{,}4\,\text{J}$

Faux.

Faux. L'allongement doit être en mètres : $4{,}0\,\text{cm} = 0{,}040\,\text{m}$.

C. $\frac{1}{4} \times 1{,}2 \times 0{,}040 = 0{,}012\,\text{J}$

Faux.
Faux. L'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur, pas le quart.

D. $\dfrac{1}{2} \times 1{,}2 \times 0{,}040 = 0{,}024\,\mathrm{J}$
Juste.
Juste : sous la droite, de 0 à $4{,}0\,\mathrm{cm}$, le domaine est un triangle.

Correction
La force croît de 0 à $1{,}2\,\mathrm{N}$ en ligne droite : le domaine sous la droite est un triangle de base $0{,}040\,\mathrm{m}$ et de hauteur $1{,}2\,\mathrm{N}$.

$$W = \frac{1}{2} \times 1{,}2 \times 0{,}040$$

soit $W = 2{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$. Le travail est **moteur**.

Remarque : Une aire que les mathématiques nomment intégrale

En mathématiques, cette aire algébrique s'appelle l'intégrale de F_x entre x_A et x_B. Ce chapitre ne t'en demande aucun calcul : des triangles et des trapèzes suffisent, car les forces étudiées varient en ligne droite.

Travail de la force de rappel d'un ressort

Le palet relié à un ressort horizontal

Sur une table horizontale à coussin d'air, un palet de masse $m = 0{,}20\,\mathrm{kg}$ est accroché à un ressort de raideur $K = 20\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. L'autre extrémité du ressort est fixée à une paroi. Le coussin d'air rend les frottements négligeables.

On repère le centre d'inertie G du palet sur un axe horizontal $(O;\vec{i})$, orienté de la paroi vers le palet. L'origine O est la position de G quand le ressort n'est ni allongé ni comprimé. **Rappel** : le ressort exerce sur le palet la force $\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$.

Devine : Le palet s'éloigne de la paroi

Le palet passe de $x_A = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ à $x_B = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Quel est le signe du travail de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort ?

A. Positif : le palet avance.
Faux.
Faux. Le palet avance dans le sens de $\vec{i}$, mais la force est dirigée vers O, en sens contraire.

B. Nul : la force est perpendiculaire au déplacement.
Faux.
Faux. La force du ressort est portée par l'axe, comme le déplacement.

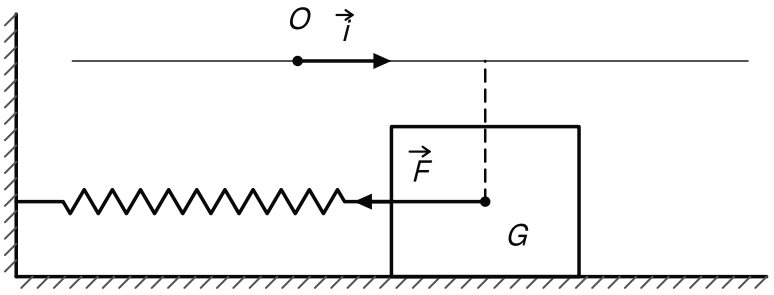
C. Négatif : la force s'oppose au déplacement.

Juste.

Juste : pour $x > 0$, $F_x = -K\,x$ est négative alors que le palet avance ; le ressort le freine.

Correction

Entre x_A et x_B, l'abscisse reste positive, donc $F_x = -K\,x < 0$. La force est opposée au déplacement à chaque instant. Chaque travail élémentaire $F_x\,\delta x$ est négatif, et leur somme aussi : le travail est **résistant**.



Palet relié à une paroi par un ressort horizontal et repéré sur l'axe (O, i) : le ressort est allongé, sa force F est dirigée vers O.

Un trapèze sous l'axe des abscisses

Propriété : Travail de la force de rappel d'un ressort

Un ressort de raideur K, de masse négligeable, a une extrémité fixe ; l'autre est liée à un solide qui se déplace le long d'un axe $(O;\vec{i})$ dont l'origine O est la position du solide lorsque le ressort n'est ni allongé ni comprimé. La force exercée par le ressort sur le solide est $\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$. Quand le solide passe de l'abscisse x_A à l'abscisse x_B, le travail de cette force vaut :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,K\left(x_A^2 - x_B^2\right).$$

Il est négatif (travail résistant) quand le ressort est plus déformé à l'arrivée qu'au départ ($|x_B| > |x_A|$), positif (travail moteur) quand il l'est moins ($|x_B| < |x_A|$), nul quand $|x_B| = |x_A|$.

Démonstration

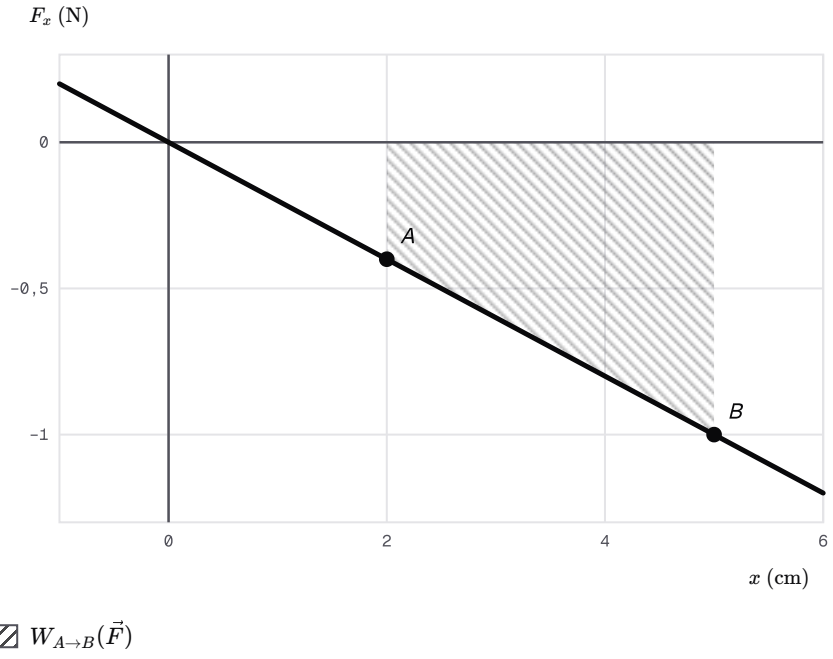
Étape 1. La coordonnée de la force est $F_x = -K\,x$: sa courbe en fonction de x est une droite qui passe par l'origine. D'après la définition du travail d'une force variable, $W_{A\to B}(\vec{F})$ est l'aire algébrique sous cette droite entre x_A et x_B.

Étape 2. Supposons d'abord $0 \le x_A < x_B$. Le domaine est un trapèze situé sous l'axe des abscisses, de bases $K\,x_A$ et $K\,x_B$ et de hauteur $x_B - x_A$. Son aire géométrique vaut :

$$\frac{(K\,x_A + K\,x_B)(x_B - x_A)}{2} = \frac{1}{2}\,K\left(x_B^2 - x_A^2\right).$$

Étape 3. Sur ce déplacement, $F_x < 0$ et le déplacement est positif : l'aire est comptée négativement, donc $W_{A\to B}(\vec{F}) = -\dfrac{1}{2}\,K\left(x_B^2 - x_A^2\right) = \dfrac{1}{2}\,K\left(x_A^2 - x_B^2\right)$.

Étape 4. Les autres cas se traitent de même. Si le solide va de x_B à x_A, chaque travail élémentaire change de signe, et le travail aussi : $\dfrac{1}{2}\,K\left(x_B^2 - x_A^2\right)$ est bien la formule écrite avec les abscisses de départ et d'arrivée. Si x_A et x_B sont de signes opposés, on découpe en $A \to O$ puis $O \to B$ et l'on ajoute les deux travaux : $\dfrac{1}{2}\,K\,x_A^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\,K\,x_B^2\right)$. Pour x_A et x_B négatifs, la figure est symétrique par rapport à O et le résultat ne dépend que des carrés. La relation vaut donc pour tout déplacement.



Coordonnée F_x de la force du ressort en fonction de l'abscisse du palet : le trapèze hachuré, sous l'axe, entre A et B, donne le travail.

Exemple : Le travail résistant du ressort entre A et B

Entre $x_A = 2{,}0\,\text{cm}$ et $x_B = 5{,}0\,\text{cm}$, F_x passe de $-0{,}40\,\text{N}$ à $-1{,}0\,\text{N}$. Le trapèze a pour hauteur $3{,}0\,\text{cm} = 0{,}030\,\text{m}$. Il est sous l'axe, donc compté négativement :

$$W = -\frac{(0{,}40 + 1{,}0) \times 0{,}030}{2}$$
$$= -0{,}021\,\text{J}$$

La relation du cours le confirme :

$$W_{A\to B}(\vec{F})$$
$$= \frac{1}{2} \times 20 \times \left(0{,}020^2 - 0{,}050^2\right)$$
$$= -0{,}021\,\text{J}$$

Le ressort a freiné le palet : $W_{A\to B}(\vec{F}) = -21\,\text{mJ}$.

Calculer un travail de force de rappel

Méthode : Travail d'une force de rappel par une aire

1. **Trace** la droite $F_x = -K\,x$, ou lis-la sur le document.
2. **Repère** le domaine compris entre la droite, l'axe des abscisses et les verticales $x = x_A$ (départ) et $x = x_B$ (arrivée).
3. **Calcule** son aire avec un triangle ou un trapèze, longueurs en mètres et forces en newtons.
4. **Donne le signe** : négatif si le ressort est plus déformé à l'arrivée qu'au départ ($|x_B| > |x_A|$), positif s'il l'est moins ($|x_B| < |x_A|$), même si le palet traverse O.
5. **Contrôle** avec $W_{A\to B}(\vec{F}) = \dfrac{1}{2}\,K\,\left(x_A^2 - x_B^2\right)$.

Chiffres significatifs. Garde dans un résultat le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en a le moins. Ici, $K = 20\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $x_B = 5{,}0\,\text{cm}$ en ont deux : on écrit $-21\,\text{mJ}$, et non $-21{,}0\,\text{mJ}$. Pour un calcul suivant, garde la valeur non arrondie ; n'arrondis qu'à la fin. Cette règle vaut pour tout le chapitre.

À toi : Un déplacement qui traverse l'origine

Le palet passe de $x_A = -3{,}0\,\text{cm}$ à $x_B = 1{,}0\,\text{cm}$. Calcule le travail de la force du ressort, puis dis s'il est moteur ou résistant. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Le domaine change de côté de l'axe en $x = 0$: découpe-le en deux triangles, ou emploie la relation du cours avec les abscisses de départ et d'arrivée.
Indice 2
Convertis : $x_A = -0{,}030\,\text{m}$ et $x_B = 0{,}010\,\text{m}$.
Indice 3
Point délicat : le signe. Le carré efface le signe de x_A ; le palet finit plus près de O qu'au départ.

Réponse

On a $x_A^2 - x_B^2 = (9{,}0 - 1{,}0) \times 10^{-4} = 8{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} K \left(x_A^2 - x_B^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times 8{,}0 \times 10^{-4} \\ &= 8{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Le travail vaut $8{,}0\,\mathrm{mJ}$: il est **moteur**. De $-3{,}0\,\mathrm{cm}$ à 0, le ressort pousse le palet vers O et fournit $9{,}0\,\mathrm{mJ}$; de 0 à $1{,}0\,\mathrm{cm}$, il le freine et en reprend $1{,}0\,\mathrm{mJ}$.

Une force qui change pendant le déplacement

Attention : Le travail d'une force de rappel n'est pas un simple produit

✗ « Le palet va de 0 à $4{,}0\,\mathrm{cm}$; à l'arrivée, $F_x = -0{,}80\,\mathrm{N}$, donc $W = -0{,}80 \times 0{,}040 = -0{,}032\,\mathrm{J}$. »

✓ La force passe de 0 à $-0{,}80\,\mathrm{N}$ pendant le déplacement : elle n'a sa valeur d'arrivée qu'à la fin. Le domaine est un triangle, d'aire moitié du rectangle :

$$W = -\frac{1}{2} \times 0{,}80 \times 0{,}040$$

soit $W = -0{,}016\,\mathrm{J}$. Le produit d'une force par une distance ne vaut que pour une force constante.

Vérifie : Retour vers la position d'équilibre

Le palet revient de $x = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ à $x = 0$. Que vaut le travail de la force du ressort ?

A. $-25\,\mathrm{mJ}$

Faux.

Faux. Le palet se rapproche de O : la force est dans le sens du mouvement, le travail est positif.

B. $+50\,\mathrm{mJ}$

Faux.

Faux. C'est le produit de la force de départ, $1{,}0\,\mathrm{N}$, par la distance : or la force diminue pendant le trajet.

C. $+25\,\mathrm{mJ}$

Juste.

Juste : le triangle sous l'axe est parcouru dans le sens négatif ; le travail est positif, donc moteur.

D. $0\,\mathrm{mJ}$

Faux.

Faux. La force n'est nulle qu'à l'arrivée ; elle travaille pendant tout le retour.

Correction

De $x_A = 0{,}050\,\mathrm{m}$ à $x_B = 0$:

$$W = \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}050^2$$
$$= 2{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

soit $25\,\mathrm{mJ}$. Le ressort se détend et pousse le palet vers O : le travail est **moteur**.

Énergie potentielle élastique

Un jouet lanceur à ressort

Un jouet lance une bille de $50\,\mathrm{g}$ vers le haut. Pour l'armer, on comprime son ressort, de raideur $K = 200\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, puis on le bloque. Au déclenchement, le ressort se détend et met la bille en mouvement.

Le ressort comprimé possède une énergie qu'il peut céder : c'est une **énergie potentielle**, liée à sa déformation.

Devine : Comprimer deux fois plus

On comprime le ressort du lanceur de $2{,}0\,\mathrm{cm}$, puis de $4{,}0\,\mathrm{cm}$. Par combien est multipliée l'énergie emmagasinée ?

A. Par 2
Faux.
Faux. La force augmente aussi pendant la compression : le travail fourni croît plus vite que la compression.

B. Par 8
Faux.
Faux. L'aire du triangle dépend de sa base et de sa hauteur, toutes deux doublées : 2×2, pas 2^3.

C. Par 1 : même ressort, même énergie
Faux.
Faux. L'énergie dépend de la déformation, pas seulement du ressort.

D. Par 4
Juste.
Juste : le travail fourni est l'aire d'un triangle, proportionnelle au carré de la compression.

Correction
Pour comprimer le ressort de $\Delta\ell$, l'opérateur exerce une force qui passe de 0 à $K\,\Delta\ell$. Son travail est l'aire d'un triangle de base $\Delta\ell$ et de hauteur $K\,\Delta\ell$, soit $\frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$. Doubler $\Delta\ell$ multiplie ce travail par 4. Le ressort le garde en réserve : c'est son énergie potentielle élastique.

Expression et état de référence

Définition : Énergie potentielle élastique

L'**énergie potentielle élastique** d'un ressort de raideur K, d'allongement $\Delta\ell$ (positif s'il est étiré, négatif s'il est comprimé), est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2 + C_{te}.$$

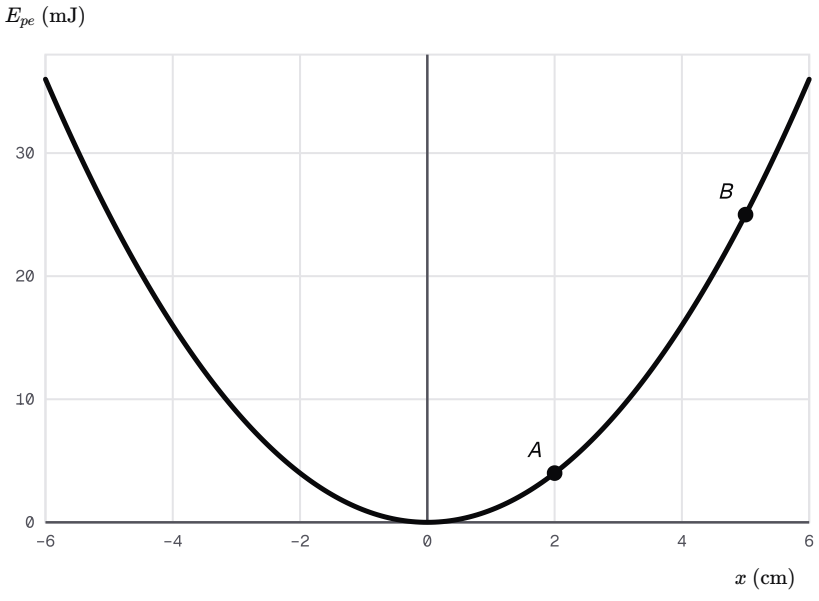
On choisit d'habitude la référence $E_{pe} = 0$ quand le ressort n'est pas déformé ; alors $E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2$. Pour un solide lié à un ressort horizontal et repéré depuis la position où le ressort n'est pas déformé, $\Delta\ell = x$ et $E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,x^2$. Elle s'exprime en joules, avec K en $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $\Delta\ell$ en mètres.

Exemple : Énergie emmagasinée par le lanceur armé

Le ressort du lanceur est comprimé de $3{,}0\,\mathrm{cm}$: $\Delta\ell = -0{,}030\,\mathrm{m}$. Référence : ressort non déformé.

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}\,K\,\Delta\ell^2 \\ &= \frac{1}{2}\times 200 \times (-0{,}030)^2 \\ &= 9{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Le ressort stocke $90\,\mathrm{mJ}$. Le signe de $\Delta\ell$ disparaît dans le carré : comprimé ou étiré de $3{,}0\,\mathrm{cm}$, il stocke la même énergie.



$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,x^2$

Énergie potentielle élastique du palet en fonction de son abscisse, avec la référence au ressort non déformé : une parabole de sommet O.

Travail du ressort et énergie stockée

Propriété : Travail de la force de rappel et variation de l'énergie potentielle élastique

Un ressort exerce une force sur le solide qui lui est lié. Entre deux positions A et B, le travail de cette force est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle élastique :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_{pe} \\ = E_{pe}(A) - E_{pe}(B).$$

Quand le ressort se déforme davantage, le travail est résistant et l'énergie potentielle élastique augmente ; quand il revient vers sa longueur à vide, le travail est moteur et elle diminue.

Démonstration

Étape 1. Repérons le solide sur l'axe $(O;\vec{i})$ dont l'origine correspond au ressort non déformé : l'allongement du ressort est $\Delta\ell = x$, et l'énergie potentielle élastique vaut $E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,K\,x^2$ (référence au ressort non déformé).

Étape 2. D'après le travail de la force de rappel d'un ressort, $W_{A\to B}(\vec{F}) = \dfrac{1}{2}\,K\,x_A^2 - \dfrac{1}{2}\,K\,x_B^2$.

Étape 3. On reconnaît $E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$, c'est-à-dire $-\left(E_{pe}(B) - E_{pe}(A)\right) = -\Delta E_{pe}$.

Étape 4. Le résultat ne dépend pas de la constante choisie pour l'énergie potentielle : elle disparaît dans la différence $E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$.

Exemple : Le travail du ressort retrouvé par les énergies

Pour le palet, $E_{pe} = \dfrac{1}{2} \times 20 \times x^2$. En A, où $x_A = 2{,}0\,\text{cm}$, $E_{pe}(A) = 4{,}0\,\text{mJ}$. En B, où $x_B = 5{,}0\,\text{cm}$, $E_{pe}(B) = 25\,\text{mJ}$. Donc :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) \\ = E_{pe}(A) - E_{pe}(B) \\ = 4{,}0 - 25 = -21\,\text{mJ}$$

On retrouve le travail obtenu par l'aire du trapèze. Le ressort s'allonge : son énergie augmente de $21\,\text{mJ}$, et le travail de sa force est résistant.

À toi : Le lanceur qui se détend

Le ressort du lanceur est comprimé de $4{,}0\,\text{cm}$. Calcule son énergie potentielle élastique, puis le travail de sa force quand il se détend jusqu'à sa longueur à vide. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1

Choisis la référence : ressort non déformé. Convertis la compression en mètres.

Indice 2

Le travail de la force du ressort se déduit de l'énergie potentielle au départ et à l'arrivée.

Indice 3

Point délicat : le signe. Le ressort revient vers sa longueur à vide.

Réponse

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \times 200 \times 0{,}040^2 \\ = 0{,}16\,\text{J}$$

À la longueur à vide, $E_{pe} = 0$. Le travail est l'énergie potentielle au départ moins celle à l'arrivée : $W = 0{,}16 - 0 = 0{,}16\,\text{J}$. Il est **moteur**, car le ressort se détend.

Ressort vertical : allongement et abscisse

Attention : L'énergie élastique dépend de l'allongement du ressort

Dans $E_{pe} = \frac{1}{2} K \, \Delta\ell^2$, $\Delta\ell$ est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide. Il se confond avec l'abscisse x du solide seulement si l'origine de l'axe correspond au ressort non déformé.

Pour un ressort vertical, on prend souvent l'origine à l'équilibre, où le ressort est déjà allongé de $\Delta\ell_0$. Avec un axe orienté vers le bas, l'allongement vaut alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$.

Trouve l'erreur : Le même ressort, accroché verticalement

Le ressort du palet est accroché verticalement et porte une masse de $0{,}20\,\text{kg}$. À l'équilibre, il est allongé de $\Delta\ell_0 = \frac{m\,g}{K} = 9{,}8\,\text{cm}$, avec $g = 9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. L'axe est orienté vers le bas, d'origine l'équilibre, et la masse est en $x = 2{,}0\,\text{cm}$. Quel calcul de l'énergie potentielle élastique est juste (référence : ressort non déformé) ?

A. $\frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}020^2 = 4{,}0\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. x est repérée depuis l'équilibre, pas depuis la longueur à vide : ce n'est pas l'allongement du ressort.

B. $\frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}118^2 \approx 0{,}14\,\text{J}$

Juste.

Juste : l'allongement vaut $\Delta\ell_0 + x = 11{,}8\,\text{cm}$.

C. $\frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}078^2 \approx 61\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. L'axe est orienté vers le bas : en $x = 2{,}0\,\text{cm}$, la masse est sous l'équilibre, et le ressort plus allongé.

Correction

Le ressort est allongé de $9{,}8\,\mathrm{cm}$ à l'équilibre, puis de $2{,}0\,\mathrm{cm}$ de plus : $\Delta\ell = 0{,}118\,\mathrm{m}$. Avec la référence au ressort non déformé :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}118^2$$

soit $E_{pe} \approx 0{,}14\,\mathrm{J}$.

Énergie mécanique du système solide-ressort

Énergies cinétique et de pesanteur

Rappel de la 1BAC. Un solide de masse m en translation, de vitesse v, a l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$. Son énergie potentielle de pesanteur vaut $E_{pp} = m\,g\,z + C_{te}$, où z est la cote de son centre d'inertie sur un axe vertical orienté vers le haut.

Pour le palet, il faut y ajouter l'énergie potentielle élastique du ressort. L'énergie mécanique E_m est celle du système formé du palet et du ressort. Le théorème de l'énergie cinétique, lui, s'appliquera au palet seul : la force du ressort est alors une force extérieure.

Devine : Une énergie qui ne change pas

Le palet oscille sur la table horizontale. Laquelle de ces énergies garde la même valeur pendant le mouvement ?

A. L'énergie cinétique E_c

Faux.

Faux. La vitesse du palet change : nulle aux positions extrêmes, maximale au passage par O.

B. L'énergie potentielle élastique E_{pe}

Faux.

Faux. L'allongement du ressort change, donc E_{pe} aussi.

C. Aucune des trois

Faux.

Faux. L'une des trois ne dépend que de l'altitude du palet, qui ne change pas.

D. L'énergie potentielle de pesanteur E_{pp}

Juste.

Juste : G reste à la même cote z, donc E_{pp} ne varie pas.

Correction

Le mouvement est horizontal : la cote z de G est constante, et $E_{pp} = m\,g\,z + C_{te}$ aussi. Avec la référence $E_{pp} = 0$ au niveau du plan du mouvement, elle disparaît du bilan.

Somme des énergies du système

Définition : Énergie mécanique d'un système solide-ressort

L'**énergie mécanique** d'un système solide-ressort est la somme de l'énergie cinétique du solide et des énergies potentielles du système :

$$E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp}.$$

Prenons un solide de masse m qui glisse sur un plan horizontal, lié à un ressort horizontal de raideur K. L'origine de son abscisse x correspond au ressort non déformé. L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas ; en la prenant nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,K\,x^2,$$

où $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse du centre d'inertie du solide.

Exemple : Énergie mécanique du palet à un instant

À un instant donné, le palet est en $x = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ et va à $v = 0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Références : ressort non déformé, plan de la table.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \times 0{,}20 \times 0{,}40^2 \\ &= 1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}030^2 \\ &= 9{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Donc $E_m = 16 + 9{,}0 = 25\,\mathrm{mJ}$.

Les références comptent. Les valeurs de E_{pe}, de E_{pp} et donc de E_m dépendent des références choisies. Changer de référence ajoute la même constante à E_m à tous les instants. Ses **variations**, elles, ne changent pas : ce sont elles que l'on exploite.

Calculer une énergie mécanique à un instant

À toi : Le palet du côté comprimé

Plus tard, le palet est en $x = -4{,}0\,\mathrm{cm}$ et va à $0{,}30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calcule son énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique et l'énergie mécanique, en millijoules. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Écris les deux termes de E_m ; l'énergie potentielle de pesanteur est nulle avec la référence du plan de la table.
Indice 2

Convertis l'abscisse : $x = -0{,}040\,\mathrm{m}$.

Indice 3

Point délicat : le signe de x. Il disparaît dans le carré : avec la référence au ressort non déformé, l'énergie potentielle élastique n'est jamais négative.

Réponse

$$E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}20 \times 0{,}30^2$$
$$= 9{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}040^2$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

D'où $E_m = 9{,}0 + 16 = 25\,\mathrm{mJ}$: la même valeur qu'à l'instant précédent.

Remarque : Joules et millijoules

Avec m en kilogrammes, v en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, K en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et x en mètres, chaque énergie s'obtient en joules. Les énergies d'un oscillateur de laboratoire valent quelques millijoules : $1\,\mathrm{mJ} = 10^{-3}\,\mathrm{J}$.

Vérifie : Une énergie élastique négative ?

Avec la référence au ressort non déformé, un élève trouve $E_{pe} = -16\,\mathrm{mJ}$ pour le palet en $x = -4{,}0\,\mathrm{cm}$. Que penser de ce résultat ?

A. Il est juste : le ressort est comprimé.

Faux.

Faux. Comprimé ou étiré, le ressort stocke de l'énergie : E_{pe} est positive.

B. Il est faux : x intervient au carré.

Juste.

Juste : avec la référence au ressort non déformé, $E_{pe} \geq 0$ en toute position.

C. Il est juste si l'on change de référence.

Faux.

Faux. La référence est fixée par l'énoncé : ressort non déformé. L'erreur vient du carré, pas de la référence.

Correction

Le carré $(-0{,}040)^2 = 1{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$ est positif. Avec la référence au ressort non déformé, $E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,K\,x^2$ est nulle en O et positive partout ailleurs : ici, $E_{pe} = +16\,\mathrm{mJ}$.

Conservation de l'énergie mécanique sans frottement

Une énergie mécanique qui garde sa valeur

Devine : Au passage par la position d'équilibre

Le palet est lâché sans vitesse en $x = 5{,}0\,\text{cm}$, sans frottement. Que prévois-tu pour son énergie cinétique au passage par $x = 0$?

A. $0\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. En $x = 0$, le palet passe à sa plus grande vitesse : il n'est pas arrêté.

B. $25\,\text{mJ}$

Juste.

Juste, si l'énergie mécanique garde sa valeur : au lâcher, elle vaut $E_{pe} = 25\,\text{mJ}$; en $x = 0$, $E_{pe} = 0$ et toute l'énergie est cinétique.

C. $50\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. L'énergie cinétique ne peut pas dépasser l'énergie mécanique, puisque $E_{pe} \geq 0$.

D. Impossible à prévoir sans la vitesse

Faux.

Faux. Si l'énergie mécanique garde sa valeur, elle suffit : la vitesse s'en déduit.

Correction

Au lâcher, $E_c = 0$ et $E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2 = 25\,\text{mJ}$. Si E_m reste égale à $25\,\text{mJ}$, alors en $x = 0$, où $E_{pe} = 0$, on a $E_c = 25\,\text{mJ}$. Reste à justifier que E_m ne change pas : c'est le rôle du théorème de l'énergie cinétique.

Rappel : théorème de l'énergie cinétique. Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux positions est égale à la somme des travaux des forces extérieures qu'il subit.

Le palet subit trois forces : son poids $\vec{P}$, l'action $\vec{R}$ de la table et la force $\vec{F}$ du ressort. Sans frottement, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticales et ne travaillent pas : seule $\vec{F}$ travaille.

Établir la conservation

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur solide-ressort sans frottement

Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique d'un oscillateur solide-ressort horizontal se conserve. Pour des oscillations d'amplitude x_m, elle vaut, à chaque instant :

$$E_m = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2,$$

où v_m est la vitesse maximale, atteinte au passage par la position d'équilibre. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique s'échangent : quand l'une augmente, l'autre diminue d'autant.

Démonstration

Étape 1. Système : le solide de masse m. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Forces extérieures : le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du plan, perpendiculaire au plan puisque les frottements sont négligeables, et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort.

Étape 2. Entre deux positions quelconques A et B, le théorème de l'énergie cinétique (acquis de la 1BAC) donne $E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{F})$.

Étape 3. Le déplacement est horizontal : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ lui sont perpendiculaires et leurs travaux sont nuls. D'après la relation entre le travail de la force de rappel et l'énergie potentielle élastique, $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$.

Étape 4. Il vient $E_c(B) - E_c(A) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$, soit $E_c(B) + E_{pe}(B) = E_c(A) + E_{pe}(A)$: l'énergie mécanique a la même valeur en toute position.

Étape 5. Aux positions extrêmes $x = \pm x_m$, la vitesse est nulle : $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$. À la position d'équilibre $x = 0$, l'énergie potentielle élastique est nulle et la vitesse est maximale : $E_m = \dfrac{1}{2}\,m\,v_m^2$.

Exemple **: Vitesse maximale du palet**

Le palet oscille avec l'amplitude $x_m = 5{,}0\,\text{cm}$, sans frottement. La conservation donne $\dfrac{1}{2}\,m\,v_m^2 = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$, donc :

$$\begin{aligned} v_m &= x_m\sqrt{\frac{K}{m}} \\ &= 0{,}050 \times \sqrt{\frac{20}{0{,}20}} \\ &= 0{,}50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Contrôle : $\dfrac{1}{2} \times 0{,}20 \times 0{,}50^2 = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\text{J}$, soit les $25\,\text{mJ}$ de E_m.

Échanges entre énergie cinétique et potentielle

Devine : Du bord vers le centre

Le palet va de $x = 5{,}0\,\text{cm}$ à $x = 0$. Comment évoluent ses deux énergies ?

A. E_{pe} diminue et E_c augmente d'autant.

Juste.

Juste : le ressort se détend et cède son énergie au palet, qui accélère.

B. Les deux augmentent ensemble.

Faux.

Faux. Leur somme garde sa valeur : si l'une augmente, l'autre diminue.

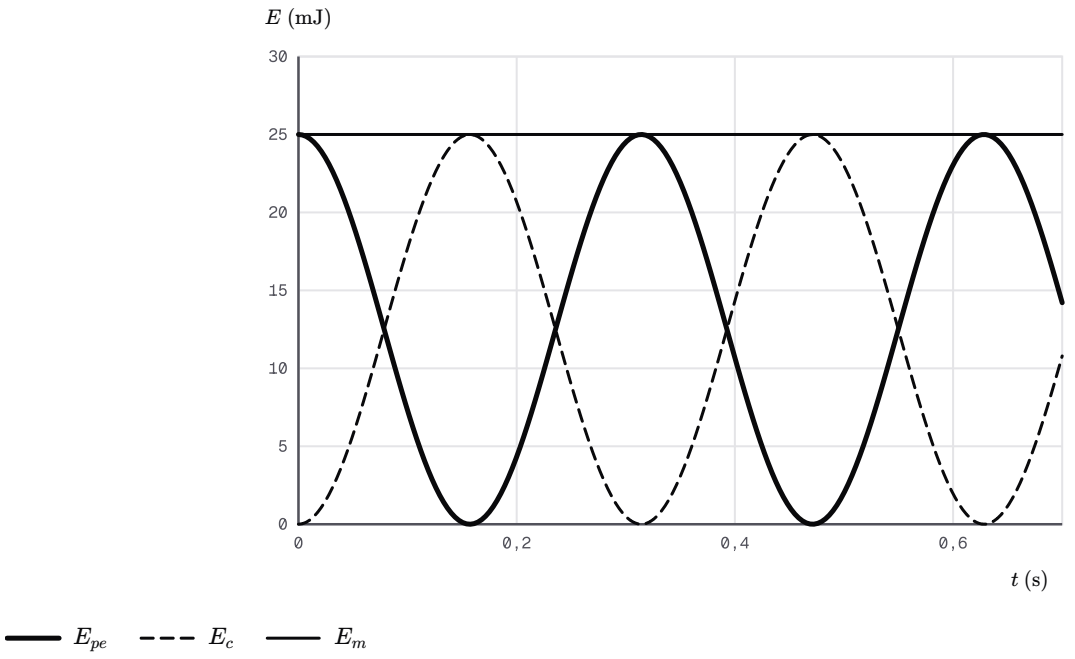
C. E_{pe} augmente et E_c diminue.

Faux.

Faux. C'est le trajet inverse, de O vers une position extrême.

Correction

Le ressort revient vers sa longueur à vide : E_{pe} passe de $25\,\mathrm{mJ}$ à 0. Comme E_m se conserve, E_c passe de 0 à $25\,\mathrm{mJ}$. Les courbes suivantes montrent ces échanges au cours du temps.



Énergies cinétique, potentielle élastique et mécanique du palet en fonction du temps, sans frottement, pour une amplitude de 5,0 cm.

Quand le palet est à une position extrême, E_{pe} est maximale et E_c nulle. Au passage par O, c'est l'inverse. À chaque instant, la somme des deux reste égale à $25\,\mathrm{mJ}$: la courbe de E_m est une droite horizontale.

Remarque : Contrôle par l'équation horaire

Le chapitre précédent donne $x(t) = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi\right)$, avec $m\,\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = K$. Note $(\ldots)$ l'argument du cosinus. En dérivant :

$$v = -x_m\,\frac{2\pi}{T_0}\,\sin(\ldots)$$

En remplaçant $m\,\dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$ par K dans E_c, il vient :

$$E_c = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2\,\sin^2(\ldots)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2\,\cos^2(\ldots)$$

Leur somme vaut $\frac{1}{2}\,K\,x_m^2$ à chaque instant, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ce contrôle confirme la conservation établie plus haut.

Vitesse ou amplitude par la conservation

Méthode : Exploiter la conservation de l'énergie mécanique

1. **Vérifie l'hypothèse** : les frottements sont négligeables. Sinon, E_m ne se conserve pas.
2. **Nomme le système et les références** : ressort non déformé, plan horizontal du mouvement.
3. **Écris E_m dans deux états**, dont un connu : position extrême ($v = 0$), passage par O ($x = 0$), lâcher sans vitesse.
4. **Égale** les deux expressions et isole l'inconnue : vitesse, position ou amplitude.
5. **Contrôle** l'unité et l'ordre de grandeur : de quelques $\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ à quelques $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ au laboratoire.

Exemple : Vitesse du palet à deux centimètres de O

Le palet est lâché sans vitesse en $x = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. On étudie le palet dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Les frottements sont négligeables : E_m se conserve. En $x = 2{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,K\,x^2 = \frac{1}{2}\,K\,x_m^2$$

Avec $\dfrac{K}{m} = 100\,\mathrm{s^{-2}}$ et $x_m^2 - x^2 = 2{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{K}{m}\,(x_m^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{100 \times 2{,}1 \times 10^{-3}} \\ &= 0{,}46\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

À toi : Un lancer depuis la position d'équilibre

Le palet est maintenant lancé depuis $x = 0$ avec la vitesse $v_0 = 0{,}30\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, sans frottement. Calcule l'amplitude de ses oscillations, en centimètres. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Les deux états utiles : le lancer en $x = 0$, et une position extrême, où la vitesse s'annule.
Indice 2
Écris l'énergie mécanique dans chacun de ces deux états, puis égale les deux expressions.
Indice 3
Point délicat : isole x_m sans inverser le rapport de m et de K ; contrôle l'unité obtenue.

Réponse

Frottements négligeables : E_m se conserve. Au lancer, $E_m = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2$; à une position extrême, $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$.

$$\begin{aligned} x_m &= v_0\sqrt{\frac{m}{K}} \\ &= 0{,}30 \times \sqrt{\frac{0{,}20}{20}} \\ &= 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

L'amplitude vaut $3{,}0\,\mathrm{cm}$.

Diagrammes d'énergie et courbes des énergies

Le diagramme d'énergie du palet

Devine : Où le palet peut-il aller ?

Sur le graphe de E_{pe} en fonction de x, on trace la droite horizontale $E = 25\,\mathrm{mJ}$, l'énergie mécanique du palet. Dans quelle zone le palet peut-il se trouver ?

A. Là où la parabole passe au-dessus de la droite

Faux.

Faux. Il faudrait $E_{pe} > E_m$, donc $E_c < 0$: c'est impossible.

B. Sur tout l'axe des abscisses

Faux.

Faux. Le palet ne dépasse pas les points où sa vitesse s'annule.

C. Là où la parabole reste sous la droite

Juste.

Juste : $E_c = E_m - E_{pe}$ doit rester positive ou nulle.

D. Seulement en $x = 0$

Faux.

Faux. Le palet oscille : il parcourt tout un segment autour de O.

Correction

Comme $E_c = E_m - E_{pe}$ et $E_c \geq 0$, le palet n'occupe que les positions où $E_{pe} \leq E_m$: la parabole y reste sous la droite de E_m. Les bornes de cette zone sont les **positions extrêmes**.

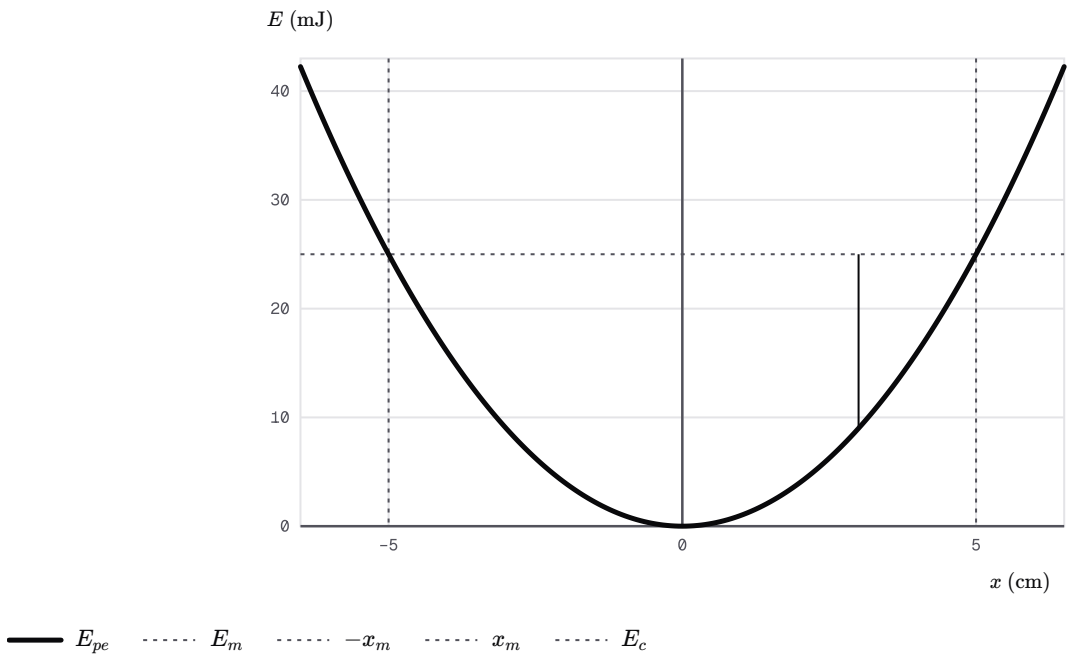


Diagramme d'énergie du palet : parabole de l'énergie potentielle élastique, droite de l'énergie mécanique et positions extrêmes en pointillés.

La droite $E_m = 25\,\text{mJ}$ coupe la parabole en $x = -5{,}0\,\text{cm}$ et $x = 5{,}0\,\text{cm}$: ce sont les positions extrêmes $\pm x_m$. En $x = 3{,}0\,\text{cm}$, la parabole est à $9{,}0\,\text{mJ}$. Le segment vertical jusqu'à la droite mesure $E_c = 25 - 9{,}0 = 16\,\text{mJ}$: c'est la valeur calculée plus haut avec la vitesse.

Lire positions extrêmes et énergie cinétique

Méthode : Exploiter un diagramme d'énergie

1. **Reconnais** les deux tracés : la courbe de l'énergie potentielle en fonction de la position, et la droite horizontale de E_m quand elle se conserve.
2. **Lis les positions extrêmes** : abscisses des points où la droite coupe la courbe. Le mouvement reste entre elles.
3. **Lis E_c en une position** : écart vertical entre la droite et la courbe, $E_c = E_m - E_p$.
4. **Déduis** une vitesse par $E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$, ou l'amplitude à partir de E_m.

À toi : Un palet lancé moins fort

Le palet est relancé : son énergie mécanique vaut maintenant $16\,\text{mJ}$. Sur le diagramme, lis ses positions extrêmes, puis calcule sa vitesse en $x = 2{,}0\,\text{cm}$. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Imagine la droite horizontale $E = 16\,\text{mJ}$ sur le diagramme : où coupe-t-elle la parabole ?

Indice 2

En $x = 2{,}0\,\text{cm}$, lis E_{pe} sur la parabole, puis fais la différence avec E_m.

Indice 3

Point délicat : convertis E_c en joules avant d'isoler v.

Réponse

La parabole vaut $16\,\text{mJ}$ en $x = \pm 4{,}0\,\text{cm}$: ce sont les positions extrêmes. En $x = 2{,}0\,\text{cm}$, $E_{pe} = 4{,}0\,\text{mJ}$, donc $E_c = 12\,\text{mJ}$.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 1{,}2 \times 10^{-2}}{0{,}20}} \\ &= 0{,}35\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Courbes des énergies en fonction du temps

Méthode : Exploiter les courbes des énergies au cours du temps

1. **Repère la courbe de E_m** : horizontale sans frottement, décroissante avec frottement.
2. **Distingue les deux autres** : E_{pe} est maximale aux positions extrêmes, E_c au passage par la position d'équilibre ; leur somme vaut E_m.
3. **Mesure la période des énergies**, égale à $\dfrac{T_0}{2}$, et déduis-en la période propre T_0.
4. **Calcule l'énergie perdue** entre deux instants : c'est la diminution de E_m.

Exemple : Période propre lue sur les courbes du palet

Sur les courbes des énergies du palet, le premier maximum de E_{pe} est en $t = 0$ et le troisième vers $t \approx 0{,}63\,\text{s}$. Ils sont séparés de deux périodes des énergies, soit $T_0 \approx 0{,}63\,\text{s}$. La relation du chapitre précédent le confirme :

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20}{20}} \\ &= 0{,}63\,\text{s} \end{aligned}$$

Vérifie : Période d'un autre oscillateur

Pour un autre oscillateur sans frottement, deux maximums successifs de E_c sont séparés de $0{,}40\,\text{s}$. Que vaut sa période propre ?

A. $T_0 = 0{,}40\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. C'est la période des énergies, la moitié de la période propre.

B. $T_0 = 0{,}20\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. Le rapport est dans l'autre sens : T_0 est plus longue que la période des énergies.

C. $T_0 = 0{,}80\,\mathrm{s}$

Juste.

Juste : les énergies ont pour période $\dfrac{T_0}{2}$.

D. $T_0 = 1{,}6\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. Un seul facteur 2 sépare les deux périodes.

Correction

Pendant une période propre, E_c passe deux fois par son maximum, à chaque passage par la position d'équilibre. La période des énergies vaut donc $\dfrac{T_0}{2} = 0{,}40\,\mathrm{s}$, d'où $T_0 = 0{,}80\,\mathrm{s}$.

Le facteur deux des périodes

Attention : Période des énergies et période propre

Pendant une période propre T_0, l'élongation atteint une fois x_m et une fois $-x_m$. L'énergie potentielle élastique, elle, est maximale à ces deux instants, car x y intervient au carré. Les énergies cinétique et potentielle ont donc pour période $\dfrac{T_0}{2}$. Lire T_0 entre deux maximums d'une énergie donne une valeur deux fois trop petite.

Trouve l'erreur : Une lecture de diagramme à corriger

Sur le diagramme du palet, un élève lit en $x = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ la valeur de la parabole, $16\,\mathrm{mJ}$, et écrit $E_c = 16\,\mathrm{mJ}$. Que penser de sa lecture ?

A. Il a lu E_{pe} : $E_c = 25 - 16 = 9{,}0\,\mathrm{mJ}$.

Juste.

Juste : E_c est l'écart vertical entre la droite de E_m et la parabole.

B. Elle est juste : la parabole donne E_c.

Faux.

Faux. La parabole donne l'énergie potentielle ; E_c est ce qui manque pour atteindre E_m.

C. Il fallait ajouter : $E_c = 25 + 16 = 41\,\mathrm{mJ}$.

Faux.

Faux. E_c ne peut pas dépasser E_m : on retranche.

Correction
En $x = 4{,}0\,\text{cm}$, $E_{pe} = 16\,\text{mJ}$. L'énergie cinétique est l'écart vertical jusqu'à la droite : $E_c = E_m - E_{pe} = 9{,}0\,\text{mJ}$. Elle est plus faible qu'en $x = 3{,}0\,\text{cm}$: le palet ralentit en approchant de la position extrême.

Frottements et non-conservation de l'énergie mécanique

Un palet freiné par les frottements

On réduit le débit d'air sous le palet : il frotte un peu sur la table. On l'écarte de $5{,}0\,\text{cm}$, puis on le lâche sans vitesse. Un capteur enregistre ses positions : d'un extrême au suivant, l'amplitude diminue.

Devine : L'énergie d'un palet qui frotte

Au cours de ces oscillations, comment évolue l'énergie mécanique du palet ?

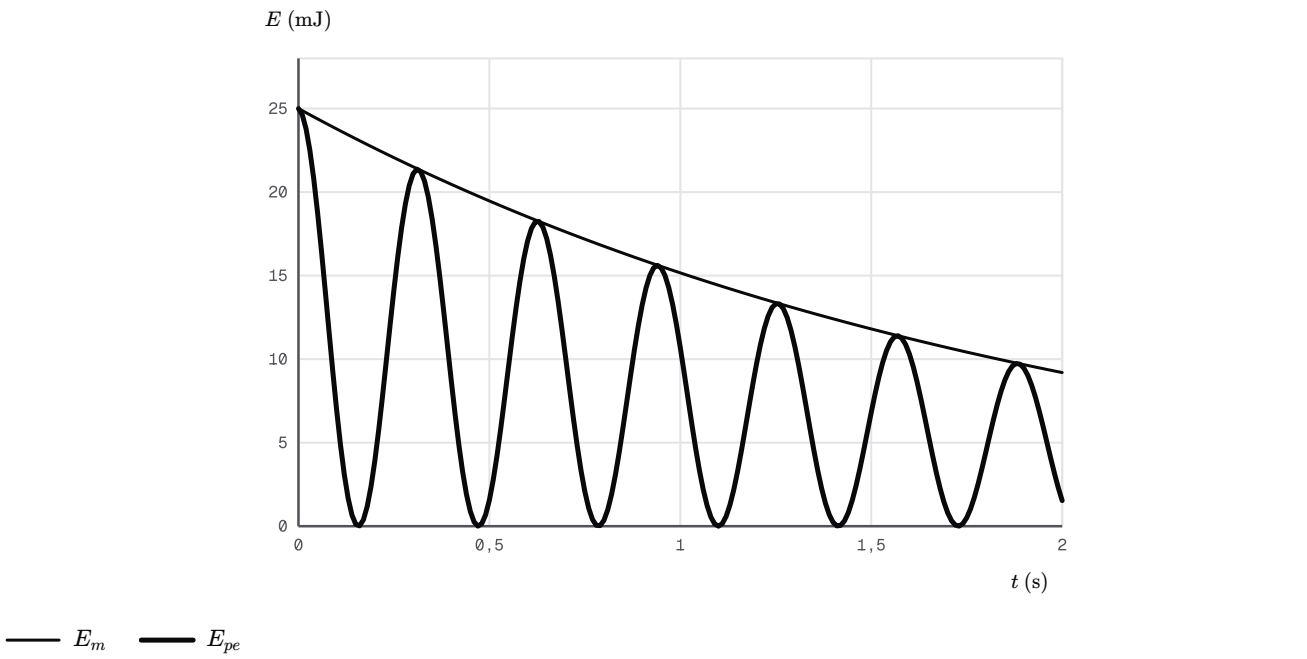
A. Elle reste égale à $25\,\text{mJ}$.
Faux.
Faux. La conservation suppose des frottements négligeables : ce n'est plus le cas.

B. Elle augmente peu à peu.
Faux.
Faux. Aucune force ne fournit d'énergie au palet ; le frottement en retire.

C. Elle diminue peu à peu.
Juste.
Juste : à chaque extrême, $E_m = \dfrac{1}{2} K\, x_m^2$, et x_m diminue.

D. Elle oscille entre 0 et $25\,\text{mJ}$.
Faux.
Faux. Ce sont E_c et E_{pe} qui oscillent ; E_m est leur somme.

Correction
Aux positions extrêmes, la vitesse est nulle et $E_m = \dfrac{1}{2} K\, x_m^2$. L'amplitude diminue d'un extrême au suivant : l'énergie mécanique diminue. La figure suivante en donne un modèle.



Modèle d'oscillateur faiblement amorti : énergie mécanique et énergie potentielle élastique du palet en fonction du temps, toutes deux calculées par le modèle.

L'énergie perdue est le travail des frottements

Propriété : Non-conservation de l'énergie mécanique en présence de frottements

Le solide d'un oscillateur solide-ressort horizontal subit des frottements, représentés par une force $\vec{f}$. Entre deux positions A et B, l'énergie mécanique varie d'une quantité égale au travail de cette force :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) \\ = W_{A\to B}(\vec{f}).$$

Ce travail est négatif : l'énergie mécanique diminue, et l'énergie perdue par l'oscillateur est transférée au milieu extérieur, principalement sous forme de chaleur. L'amplitude des oscillations décroît.

Démonstration

Étape 1. Système : le solide. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Forces extérieures : le poids $\vec{P}$, la composante normale $\vec{R}_N$ de la réaction du plan, la force de frottement $\vec{f}$ et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort.

Étape 2. Le théorème de l'énergie cinétique entre A et B s'écrit $E_c(B) - E_c(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{f}) + W(\vec{F})$, chaque travail étant calculé de A à B.

Étape 3. Le déplacement est horizontal : $W(\vec{P}) = 0$ et $W(\vec{R}_N) = 0$. D'après la relation entre le travail de la force de rappel et l'énergie potentielle élastique, $W(\vec{F}) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$.

Étape 4. En regroupant les termes, $(E_c(B)+E_{pe}(B))-(E_c(A)+E_{pe}(A))=W_{A\to B}(\vec{f})$, soit $\Delta E_m = W_{A\to B}(\vec{f})$.

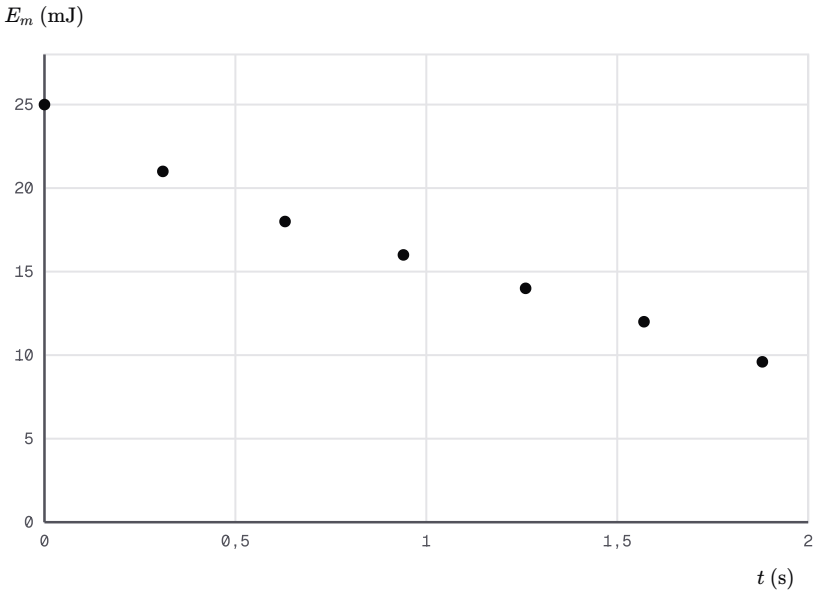
Étape 5. La force de frottement est à chaque instant opposée au vecteur vitesse : chacun de ses travaux élémentaires est négatif, donc $W_{A\to B}(\vec{f}) < 0$ dès que le solide se déplace. L'énergie mécanique diminue.

Le travail des frottements est négatif, mais l'énergie perdue par l'oscillateur ne disparaît pas. Elle est transférée à la table et à l'air, surtout par **transfert thermique** (chaleur). Aucune expression de la force de frottement n'est nécessaire : il suffit de connaître E_m à deux instants.

Énergie mécanique aux extrêmes successifs

À chaque position extrême, la vitesse est nulle et $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$. Le tableau donne les amplitudes relevées sur l'enregistrement et les énergies calculées.

t (s)	x_m (cm)	E_m (mJ)
0,00	5,0	25
0,31	4,6	21
0,63	4,3	18
0,94	4,0	16
1,26	3,7	14
1,57	3,4	12
1,88	3,1	9,6



● E_m

Énergie mécanique du palet freiné, calculée à chaque position extrême de l'enregistrement.

Méthode : Mesurer l'effet des frottements par l'énergie

1. **Calcule E_m à deux instants**, de préférence à deux positions extrêmes, où $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$.
2. **Écris $\Delta E_m = W(\vec{f})$** : la variation, négative, de l'énergie mécanique est le travail des frottements.
3. **Exprime la perte** en joules, puis en pourcentage de l'énergie de départ si on te le demande.
4. **Conclus** : l'énergie perdue est transférée au milieu extérieur, surtout sous forme de chaleur.

Exemple : Énergie perdue pendant la première demi-oscillation

Note $x_0 = 5{,}0\,\text{cm}$ l'amplitude au lâcher et $x_1 = 4{,}6\,\text{cm}$ celle de l'extrême suivant :

$$\begin{aligned}\Delta E_m &= \frac{1}{2}\,K\left(x_1^2 - x_0^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 20 \times \left(0{,}046^2 - 0{,}050^2\right)\\ &= -3{,}8\times 10^{-3}\,\text{J}\end{aligned}$$

Le travail des frottements vaut $W(\vec{f}) = -3{,}8\,\text{mJ}$. Rapportée aux $25\,\text{mJ}$ du départ, la perte vaut $15\,\%$ en une demi-période.

Vérifier l'hypothèse avant de conclure

> **À toi : Perte sur une période entière**

D'après le tableau, calcule l'énergie perdue entre $t = 0{,}63\,\mathrm{s}$ et $t = 1{,}26\,\mathrm{s}$, en millijoules, puis en pourcentage de l'énergie à $0{,}63\,\mathrm{s}$. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Ces deux instants sont des positions extrêmes : l'énergie mécanique s'y calcule avec l'amplitude.
Indice 2
Lis les amplitudes : $4{,}3\,\mathrm{cm}$, puis $3{,}7\,\mathrm{cm}$.
Indice 3
Point délicat : calcule la différence à partir des amplitudes, sans réutiliser les énergies arrondies du tableau.

Réponse
Avec $E_m = \dfrac{1}{2}\,K\,x_m^2$ et $\dfrac{1}{2}\,K = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, les énergies non arrondies valent :

$$E_m(0{,}63) = 18{,}49\,\mathrm{mJ}$$
$$E_m(1{,}26) = 13{,}69\,\mathrm{mJ}$$
$$\Delta E_m = -4{,}8\,\mathrm{mJ}$$

L'oscillateur perd $4{,}8\,\mathrm{mJ}$ en une période, soit $26\,\%$ de son énergie à $0{,}63\,\mathrm{s}$.

Attention : Pas de conservation sans absence de frottement

Écrire $E_m = C_{te}$ suppose que les seules forces qui travaillent sont la force de rappel, ou le couple de torsion, et le poids. Dès qu'un frottement agit, l'énergie mécanique diminue, même si les oscillations semblent durer longtemps. Avant d'égaler deux énergies mécaniques, cherche dans l'énoncé l'hypothèse « frottements négligeables ».

Travail du couple de torsion et énergie potentielle de torsion

Un plateau suspendu à un fil de torsion

Un plateau horizontal est suspendu par son centre à un fil vertical, fixé en haut à un support. Quand on tourne le plateau d'un angle θ, le fil se tord. **Rappel** : le fil exerce alors un couple de rappel de moment $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$, où C est la constante de torsion. Ici, $C = 2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$, et θ est repéré depuis la position où le fil n'est pas tordu.

Devine : Tordre le fil davantage

On tourne le plateau de $\theta_1 = 0{,}10\,\mathrm{rad}$ à $\theta_2 = 0{,}30\,\mathrm{rad}$. Quel est le signe du travail du couple de torsion ?

A. Négatif
Juste.
Juste : $\mathcal{M}_C < 0$ alors que θ augmente ; le travail est résistant.

B. Positif

Faux.

Faux. Le couple de torsion tend à ramener le plateau vers $\theta = 0$: il s'oppose à cette rotation.

C. Nul : le fil ne se déplace pas

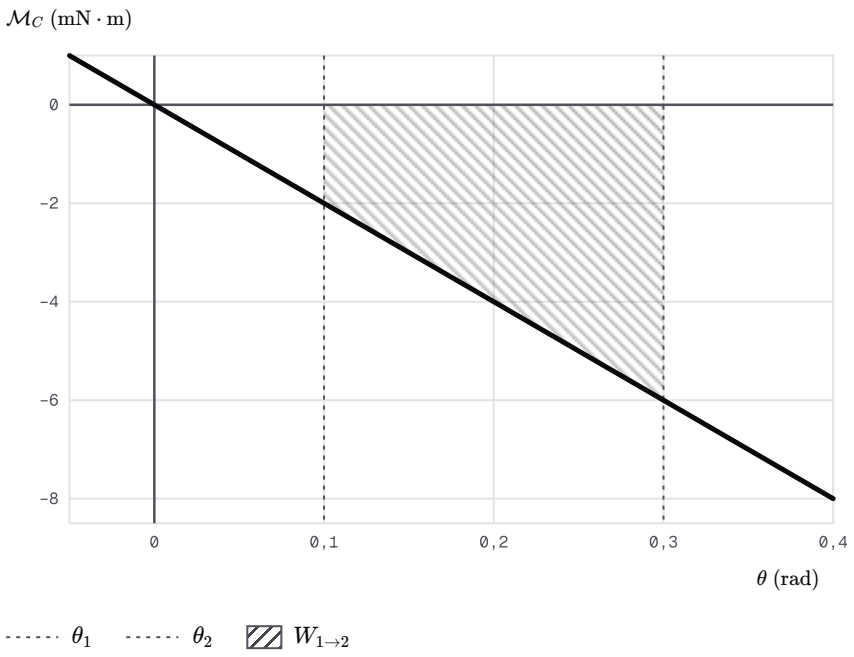
Faux.

Faux. Le couple agit sur le plateau, qui tourne : il travaille.

Correction

Pour $\theta > 0$, $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$ est négatif, alors que la rotation se fait dans le sens positif. Chaque travail élémentaire $\mathcal{M}_C\,\delta\theta$ est négatif : le travail du couple de torsion est **résistant**, comme celui d'un ressort qu'on allonge.

Travail d'un couple de moment variable



Moment du couple de torsion en fonction de l'angle de rotation : le trapèze hachuré, sous l'axe, entre 0,10 rad et 0,30 rad, représente le travail du couple.

Propriété : Travail du couple de torsion

Un fil de torsion de constante C exerce sur le solide qu'il porte un couple de rappel de moment $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$. L'abscisse angulaire θ du solide est repérée depuis la position où le fil n'est pas tordu. Quand le solide tourne de θ_1 à θ_2, le travail du couple de torsion vaut :

$$W_{1\to2} = \frac{1}{2}\,C\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right),$$

avec C en $\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$, les angles en radians et le travail en joules.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition du travail d'un couple de moment variable, $W_{1\to 2}$ est l'aire algébrique sous la courbe de $\mathcal{M}_C$ en fonction de θ, entre θ_1 et θ_2.

Étape 2. Cette courbe est la droite d'équation $\mathcal{M}_C = -C\,\theta$, qui passe par l'origine. Pour $0 \leq \theta_1 < \theta_2$, le domaine est un trapèze situé sous l'axe des abscisses, de bases $C\,\theta_1$ et $C\,\theta_2$, de hauteur $\theta_2 - \theta_1$; son aire géométrique vaut $\dfrac{1}{2}\,C\left(\theta_2^2 - \theta_1^2\right)$.

Étape 3. Le moment et la rotation sont de signes opposés : l'aire est comptée négativement, d'où $W_{1\to 2} = \dfrac{1}{2}\,C\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right)$.

Étape 4. Comme pour le ressort, une rotation de sens contraire change le signe de chaque travail élémentaire, et un passage par $\theta = 0$ se découpe en deux trapèzes devenus triangles : la relation vaut pour toutes les valeurs de θ_1 et θ_2.

Exemple : Travail du couple de torsion entre deux angles

Entre $\theta_1 = 0{,}10\,\text{rad}$ et $\theta_2 = 0{,}30\,\text{rad}$, le moment passe de $-2{,}0$ à $-6{,}0\,\text{mN}\cdot\text{m}$. Le trapèze, compté négativement, a pour aire :

$$W_{1\to 2} = -\frac{(2{,}0 + 6{,}0)\times 0{,}20}{2}$$

soit $W_{1\to 2} = -0{,}80\,\text{mJ}$: un moment en $\text{mN}\cdot\text{m}$ multiplié par un angle en radians donne des mJ. Avec $\dfrac{1}{2}\,C = 1{,}0\times 10^{-2}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$, la relation du cours le confirme :

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= \frac{1}{2}\,C\left(\theta_1^2 - \theta_2^2\right) \\ &= 10^{-2}\times(0{,}010 - 0{,}090) \\ &= -8{,}0\times 10^{-4}\,\text{J} \end{aligned}$$

Énergie potentielle de torsion

Définition : Énergie potentielle de torsion

L'**énergie potentielle de torsion** d'un fil de constante de torsion C, tordu d'un angle θ, est :

$$E_{pt} = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2 + C_{te}.$$

Avec la référence $E_{pt} = 0$ quand le fil n'est pas tordu, $E_{pt} = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta^2$, en joules, avec θ en radians.

Exemple : Énergie stockée par le fil tordu

Le plateau est tourné de $\theta = 0{,}30\,\text{rad}$. Référence : fil non tordu.

$$\begin{aligned} E_{pt} &= \frac{1}{2}\,C\,\theta^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2{,}0 \times 10^{-2} \times 0{,}30^2 \\ &= 9{,}0 \times 10^{-4}\,\text{J} \end{aligned}$$

Le fil stocke $0{,}90\,\text{mJ}$. En $\theta_1 = 0{,}10\,\text{rad}$, on trouve de même $0{,}10\,\text{mJ}$.

Propriété : Travail du couple de torsion et variation de l'énergie potentielle de torsion

Le travail du couple de torsion entre deux positions angulaires θ_1 et θ_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle de torsion :

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= -\Delta E_{pt} \\ &= E_{pt}(\theta_1) - E_{pt}(\theta_2). \end{aligned}$$

Démonstration

Étape 1. Avec la référence au fil non tordu, $E_{pt} = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2$.

Étape 2. D'après le travail du couple de torsion, $W_{1\to 2} = \frac{1}{2}\,C\,\theta_1^2 - \frac{1}{2}\,C\,\theta_2^2 = E_{pt}(\theta_1) - E_{pt}(\theta_2)$.

Étape 3. Cette différence vaut $-\left(E_{pt}(\theta_2) - E_{pt}(\theta_1)\right) = -\Delta E_{pt}$, quelle que soit la constante choisie pour l'énergie potentielle.

Vérifie : Le plateau revient vers sa position de repos

Le plateau revient de $0{,}30\,\text{rad}$ à $0{,}10\,\text{rad}$. Que vaut le travail du couple de torsion ?

A. $-0{,}80\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. C'est le travail de l'aller ; au retour, le couple agit dans le sens de la rotation.

B. $+0{,}90\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. Le plateau ne revient pas jusqu'à $\theta = 0$: il garde $0{,}10\,\text{mJ}$ d'énergie potentielle.

C. $+0{,}80\,\text{mJ}$

Juste.

Juste : le fil se détord, il cède $0{,}90 - 0{,}10 = 0{,}80\,\text{mJ}$.

D. $+1{,}0\,\text{mJ}$

Faux.

Faux. On retranche les deux énergies potentielles, on ne les ajoute pas.

Correction

Le travail du couple de torsion est l'énergie potentielle de torsion au départ moins celle à l'arrivée :

$$W = 0{,}90 - 0{,}10 = 0{,}80\,\text{mJ}$$

> Le fil se détord : le travail est **moteur**.

Angles en radians dans les énergies

> **Attention : Un angle en degrés fausse l'énergie**
>
> La relation $E_{pt} = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta^2$ suppose θ en radians. Pour $15°$, soit $0{,}262\,\text{rad}$, le fil du plateau stocke $E_{pt} \approx 0{,}69\,\text{mJ}$. Avec $\theta = 15$, on trouverait $2{,}3\,\text{J}$: plus de $3\,000$ fois trop. Il en ira de même pour le pendule pesant.

> **À toi : Un plateau tourné de vingt degrés**
>
> Le plateau est tourné de $20°$ à partir de sa position de repos. Calcule l'énergie potentielle de torsion du fil, en millijoules. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.
>
> **Indice 1**
> Choisis la référence : fil non tordu.
> **Indice 2**
> Convertis l'angle en radians : multiplie par $\dfrac{\pi}{180}$.
> **Indice 3**
> Point délicat : garde la valeur non arrondie de θ dans le carré.
>
> **Réponse**
> $\theta = 20 \times \dfrac{\pi}{180} = 0{,}349\,\text{rad}$. Avec $\dfrac{1}{2}\,C = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$:
>
> $$\begin{aligned} E_{pt} &= \frac{1}{2}\,C\,\theta^2 \\ &= 10^{-2} \times 0{,}349^2 \\ &= 1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{J} \end{aligned}$$
>
> Le fil stocke $1{,}2\,\text{mJ}$, avec la référence au fil non tordu.

Énergie mécanique du pendule de torsion

Le plateau oscille autour du fil

Le moment d'inertie du plateau par rapport à l'axe du fil vaut $J_\Delta = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. On le tourne de $\theta_m = 0{,}30\,\text{rad}$, puis on le lâche sans vitesse ; les frottements sont négligeables. **Rappel de la 1BAC** : un solide qui tourne autour d'un axe fixe a l'énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2}\,J_\Delta \left(\dfrac{\text{d}\theta}{\text{d}t}\right)^2$.

> **Devine : Vitesse angulaire la plus grande**
>
> Pendant les oscillations du plateau, à quelle position sa vitesse angulaire est-elle la plus grande ?

A. Aux positions extrêmes $\theta = \pm\theta_m$

Faux.

Faux. Le plateau s'y arrête un instant pour repartir en sens inverse.

B. Au passage par $\theta = 0$

Juste.

Juste : le fil n'y est plus tordu, toute l'énergie est cinétique.

C. Elle est la même partout

Faux.

Faux. Le plateau accélère vers $\theta = 0$, puis ralentit.

Correction

Comme pour le palet, l'énergie mécanique passe d'une forme à l'autre. En $\theta = 0$, $E_{pt} = 0$: l'énergie cinétique est maximale, et la vitesse angulaire aussi.

Bilan d'énergie du plateau oscillant

Propriété : Énergie mécanique du pendule de torsion

Un pendule de torsion est formé d'un solide de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe du fil et d'un fil de constante de torsion C. Avec la référence au fil non tordu, son énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}\,J_\Delta \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,C\,\theta^2.$$

Si les frottements sont négligeables, elle se conserve et vaut $E_m = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^2$, où θ_m est l'amplitude angulaire. En présence de frottements, elle diminue : sa variation est égale au travail du couple des frottements, qui est négatif.

Démonstration

Étape 1. Système : le solide suspendu au fil. Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Actions extérieures : le poids et la tension du fil, dont les moments par rapport à l'axe du fil sont nuls (droites d'action sur l'axe), et le couple de torsion ; on ajoute un couple de frottement s'il y en a.

Étape 2. L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est $E_c = \dfrac{1}{2}\,J_\Delta \left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$ (acquis de la 1BAC). Le centre d'inertie reste sur l'axe : l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas, on la prend nulle. Donc $E_m = E_c + E_{pt}$.

Étape 3. Le théorème de l'énergie cinétique entre deux positions θ_1 et θ_2 s'écrit $E_c(\theta_2) - E_c(\theta_1) = W_{1\to 2} + W_f$, où W_f est le travail du couple de frottement ; le poids et la tension ne travaillent pas.

Étape 4. D'après la relation entre le travail du couple de torsion et l'énergie potentielle de torsion, $W_{1\to 2} = E_{pt}(\theta_1) - E_{pt}(\theta_2)$. Il vient $E_m(\theta_2) - E_m(\theta_1) = W_f$.

Étape 5. Sans frottement, $W_f = 0$ et l'énergie mécanique se conserve. Aux positions extrêmes $\theta = \pm\theta_m$, la vitesse angulaire est nulle : $E_m = \dfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^2$. Avec frottement, le couple de frottement s'oppose à la rotation, $W_f < 0$ et l'énergie mécanique diminue.

Exemple : Énergie et vitesse angulaire maximale du plateau

Avec la référence au fil non tordu, l'énergie mécanique vaut, à la position extrême :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\,C\,\theta_m^2 \\ &= 9{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Au passage par $\theta = 0$, elle est toute cinétique. Avec $\dfrac{C}{J_\Delta} = 5{,}0\,\mathrm{s}^{-2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\max} &= \theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} \\ &= 0{,}30 \times \sqrt{5{,}0} \\ &= 0{,}67\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

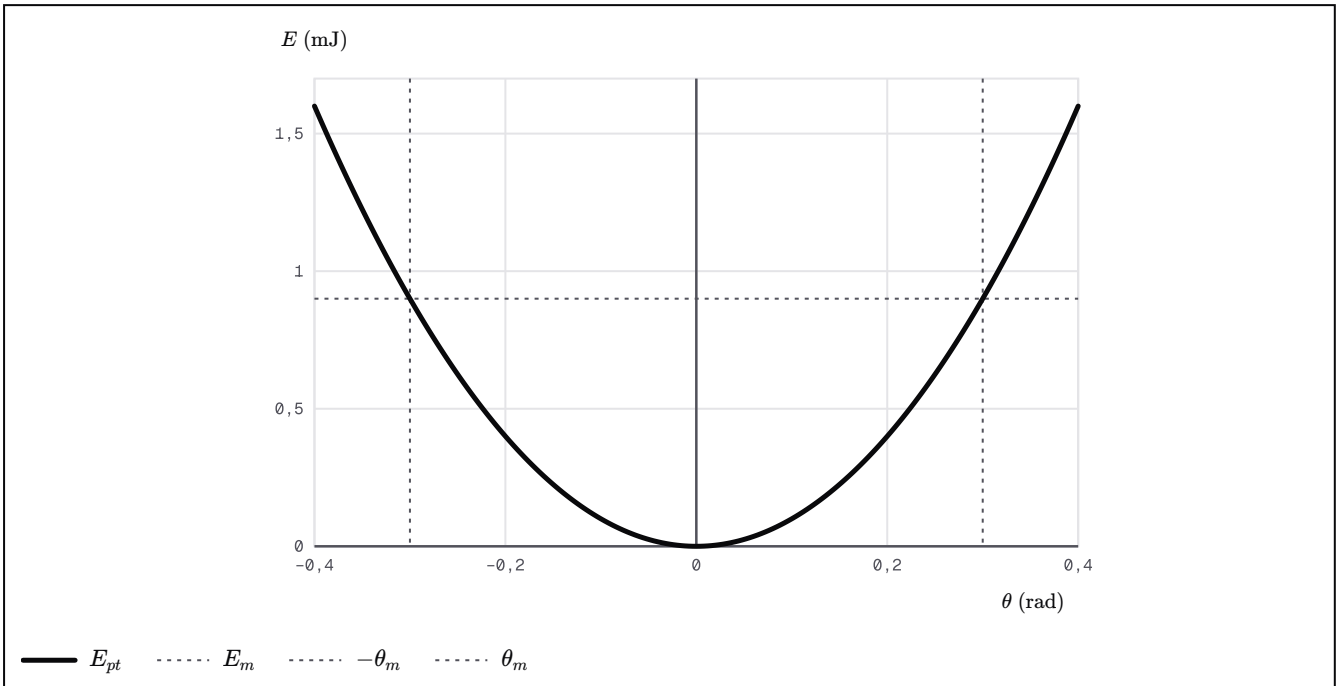


Diagramme d'énergie du plateau : parabole de l'énergie potentielle de torsion et droite de l'énergie mécanique, sans frottement.

Écrire l'énergie d'un pendule

Méthode : Énergie mécanique d'un pendule, pas à pas

1. **Nomme** le pendule, son axe de rotation, son moment d'inertie J_Δ et le sens positif de θ.

2. **Écris l'énergie cinétique de rotation** $\frac{1}{2}\,J_\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$.
3. **Écris l'énergie potentielle et sa référence** : $\frac{1}{2}\,C\,\theta^2$ pour un fil de torsion, fil non tordu ; pour un pendule pesant, celle de la section suivante, référence à l'équilibre.
4. **Exploite la conservation** sans frottement : E_m calculée à une position extrême donne la vitesse angulaire au passage par l'équilibre.

À toi : Vitesse angulaire à un dixième de radian

Le plateau passe par $\theta = 0{,}10\,\mathrm{rad}$. Calcule son énergie cinétique, puis sa vitesse angulaire. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
L'énergie mécanique se conserve : elle vaut toujours $0{,}90\,\mathrm{mJ}$.
Indice 2
Calcule E_{pt} en $\theta = 0{,}10\,\mathrm{rad}$, puis retranche-la de E_m.
Indice 3
Point délicat : isole la vitesse angulaire, puis prends la racine d'un nombre en $\mathrm{s^{-2}}$.

Réponse
En $\theta = 0{,}10\,\mathrm{rad}$, $E_{pt} = 1{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

$$\begin{aligned} E_c &= E_m - E_{pt} \\ &= (9{,}0 - 1{,}0) \times 10^{-4} \\ &= 8{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{2\,E_c}{J_\Delta}} \\ &= \sqrt{0{,}40} \\ &= 0{,}63\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

C'est la valeur absolue de la vitesse angulaire, dans un sens comme dans l'autre.

Plateau freiné et période des énergies

Si l'air freine le plateau, un couple de frottement s'oppose à la rotation. Son travail est négatif : l'énergie mécanique diminue, et l'amplitude angulaire aussi. Le bilan se lit comme pour le palet freiné, avec $E_m = \frac{1}{2}\,C\,\theta_m^2$ à chaque position extrême.

Vérifie : Période de l'énergie de torsion

La période propre du plateau vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$. Avec quelle période l'énergie potentielle de torsion varie-t-elle ?

A. $2{,}8\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. C'est la période propre ; l'énergie atteint son maximum deux fois par période.

B. $5{,}6\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. L'énergie varie plus vite que l'angle, pas plus lentement.

C. $0{,}70\,\mathrm{s}$

Faux.

Faux. Un seul facteur 2 sépare les deux périodes.

D. $1{,}4\,\mathrm{s}$

Juste.

Juste : l'énergie varie avec la période $\dfrac{T_0}{2}$.

Correction

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$
$$= 2\pi\sqrt{0{,}20} = 2{,}8\,\mathrm{s}$$

L'énergie E_{pt} est maximale à chaque position extrême, deux fois par période : sa période vaut $\dfrac{T_0}{2} = 1{,}4\,\mathrm{s}$.

Énergie mécanique du pendule pesant

Une tige qui oscille autour d'un axe

Une tige rigide de masse $m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$ peut tourner autour d'un axe horizontal fixe Δ, qui passe par l'une de ses extrémités. Son centre d'inertie G est à $d = 0{,}30\,\mathrm{m}$ de l'axe, et $J_\Delta = 6{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. On l'écarte de $\theta_m = 10^\circ$ de la verticale, puis on la lâche sans vitesse. Les frottements sont négligeables et $g = 9{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Devine : De combien monte le centre d'inertie ?

La tige est écartée d'un angle θ de sa position d'équilibre. De quelle hauteur son centre d'inertie G est-il monté ?

A. $d\cos\theta$

Faux.

Faux. C'est la distance verticale entre l'axe et G : elle diminue quand G monte.

B. $d\sin\theta$

Faux.

Faux. C'est le déplacement horizontal de G.

C. $d\,(1-\cos\theta)$

Juste.
Juste : G était à d sous l'axe, il n'est plus qu'à $d\cos\theta$ sous lui.

D. $d\,\theta$

Faux.
Faux. C'est la longueur de l'arc parcouru par G, pas une hauteur.

Correction
À l'équilibre, G est à la distance d sous l'axe. Écarté de θ, il n'est plus qu'à $d\cos\theta$ sous l'axe. Il est donc monté de $d - d\cos\theta = d\,(1-\cos\theta)$.

Énergie potentielle de pesanteur du pendule

Propriété : Énergie mécanique du pendule pesant pour de faibles oscillations

Un pendule pesant de masse m oscille autour d'un axe horizontal fixe Δ ; son centre d'inertie G est à la distance d de l'axe et son moment d'inertie par rapport à Δ est J_Δ. On repère sa position par l'abscisse angulaire θ depuis la position d'équilibre stable et l'on prend l'énergie potentielle de pesanteur nulle à cette position. Alors :

$$E_{pp} = m\,g\,d\,(1-\cos\theta)\,,$$

$$E_m = \frac{1}{2}\,J_\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m\,g\,d\,(1-\cos\theta)\,.$$

Pour de faibles oscillations (θ en radians, petit), $1-\cos\theta \approx \dfrac{\theta^2}{2}$ et $E_{pp} \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$. Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique se conserve et vaut $E_m = m\,g\,d\,(1-\cos\theta_m) \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta_m^2$.

Démonstration

Étape 1. Prenons un axe vertical Oz orienté vers le haut. À la position d'équilibre stable, G est à la verticale au-dessous de l'axe, à la distance d. Pour l'abscisse angulaire θ, la cote de G est plus haute de $d - d\cos\theta$. L'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = m\,g\,z_G + C_{te}$ (acquis de la 1BAC), nulle à l'équilibre, vaut donc $m\,g\,d\,(1-\cos\theta)$.

Étape 2. Le solide tourne autour de l'axe fixe Δ : $E_c = \dfrac{1}{2}\,J_\Delta\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$, d'où l'expression de $E_m = E_c + E_{pp}$.

Étape 3. Système : le pendule ; référentiel terrestre supposé galiléen ; actions extérieures : le poids et la réaction de l'axe. Sans frottement, la réaction de l'axe a un moment nul par rapport à Δ et ne travaille pas. Le travail du poids entre deux positions est l'opposé de la variation de E_{pp} (acquis de la 1BAC). Le théorème de l'énergie cinétique donne alors $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$, soit $\Delta E_m = 0$.

Étape 4. Aux positions extrêmes $\theta = \pm\theta_m$, la vitesse angulaire est nulle : $E_m = m\,g\,d\,(1-\cos\theta_m)$.

Étape 5. Pour de faibles oscillations, on admet l'approximation $1-\cos\theta \approx \dfrac{\theta^2}{2}$, avec θ en radians (outil admis ; pour 10°, l'écart relatif est d'environ $0{,}25\,\%$). Elle donne $E_{pp} \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta^2$ et $E_m \approx \dfrac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta_m^2$.

Exemple : Énergie mécanique de la tige lâchée à dix degrés

Référence : $E_{pp}=0$ à la position d'équilibre. On calcule d'abord $m\,g\,d = 0{,}50\times 9{,}80\times 0{,}30 = 1{,}47\,\text{J}$. La tige est lâchée sans vitesse, donc :

$$\begin{aligned} E_m &= m\,g\,d\,(1-\cos\theta_m)\\ &= 1{,}47\times(1-\cos 10^\circ)\\ &= 2{,}2\times 10^{-2}\,\text{J} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de la tige vaut $22\,\text{mJ}$.

Approximation des faibles oscillations

Devine : Deux expressions pour un petit angle

Pour un petit angle θ en radians, on compare $1-\cos\theta$ et $\dfrac{\theta^2}{2}$. Que prévois-tu ?

A. Elles sont très proches ; l'écart grandit avec l'angle.

Juste.

Juste : la figure suivante montre les deux courbes confondues près de 0, puis séparées.

B. Elles diffèrent d'un facteur 2 environ.

Faux.

Faux. Le facteur $\dfrac{1}{2}$ est déjà dans $\dfrac{\theta^2}{2}$: pour $0{,}1\,\text{rad}$, les deux valent environ $0{,}005$.

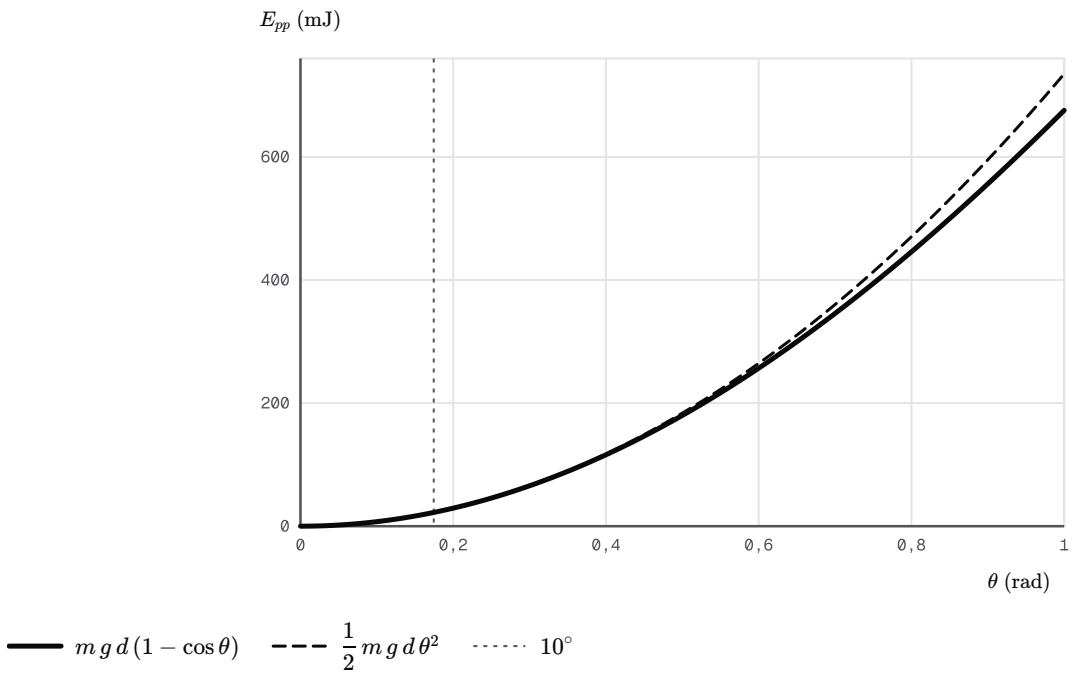
C. Elles sont égales pour tout angle.

Faux.

Faux. Pour $\theta = 1\,\text{rad}$, $1-\cos\theta \approx 0{,}46$ alors que $\dfrac{\theta^2}{2} = 0{,}50$.

Correction

Pour les petits angles, $1-\cos\theta$ et $\dfrac{\theta^2}{2}$ sont presque égales : c'est l'**approximation des faibles oscillations**, un outil admis. L'écart grandit avec l'angle ; il reste faible jusqu'à une quinzaine de degrés.



Énergie potentielle de pesanteur de la tige en fonction de l'angle : expression exacte et expression approchée des faibles oscillations.

Contrôle numérique. Pour $\theta_m = 10^\circ$, soit $0{,}1745\,\text{rad}$:

$$1-\cos\theta_m = 0{,}01519$$
$$\frac{\theta_m^2}{2} = 0{,}01523$$

L'écart relatif est d'environ $0{,}25\,\%$. L'expression approchée $E_m \approx \frac{1}{2}\,m\,g\,d\,\theta_m^2$ donne donc aussi $22\,\text{mJ}$.

Vitesse au passage par la position d'équilibre

Exemple : Vitesse angulaire de la tige au point le plus bas

On étudie la tige dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le poids travaille ; la réaction de l'axe ne travaille pas, faute de frottement. L'énergie mécanique se conserve. À l'équilibre, $E_{pp} = 0$ et E_m est toute cinétique :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{2\,E_m}{J_\Delta}} \\ &= \sqrt{\frac{2\times 2{,}233\times 10^{-2}}{6{,}0\times 10^{-2}}} \\ &= 0{,}86\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Le centre d'inertie passe alors à $v_G = d\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

À toi : La tige lâchée à six degrés

La tige est maintenant lâchée sans vitesse à $6{,}0°$ de la verticale. Avec l'approximation des faibles oscillations, calcule son énergie mécanique, puis sa vitesse angulaire au passage par l'équilibre. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Convertis l'angle en radians avant tout calcul.
Indice 2
Écris l'énergie mécanique approchée à la position extrême, puis égale-la à l'énergie cinétique au point le plus bas.
Indice 3
Point délicat : J_Δ est en $\mathrm{kg\cdot m^2}$ et E_m en joules ; la racine donne des $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Réponse
$\theta_m = 6{,}0 \times \dfrac{\pi}{180} = 0{,}105\,\mathrm{rad}$, et $m\,g\,d = 1{,}47\,\mathrm{J}$.

$$\begin{aligned} E_m &\approx \frac{1}{2} \times 1{,}47 \times 0{,}105^2 \\ &= 8{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{2\,E_m}{J_\Delta}} \\ &= 0{,}52\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

Ces échanges entre deux formes d'énergie ont un équivalent électrique : dans un circuit LC, l'énergie passe de même du condensateur à la bobine.

Mesurer les énergies d'un oscillateur

Montage et protocole de mesure

Devine : Ce qu'il faut pour l'énergie cinétique

Un capteur relève la position x_i d'un mobile toutes les $\tau = 50\,\mathrm{ms}$. Comment obtenir sa vitesse à l'instant t_i, pour calculer E_c ?

A. $v_i = \dfrac{x_i}{t_i}$
Faux.
Faux. Ce quotient est une vitesse moyenne depuis l'origine des dates, pas la vitesse à l'instant t_i.

B. $v_i = \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,\tau}$
Juste.
Juste : la vitesse moyenne entre deux positions qui encadrent t_i approche la vitesse à cet instant.

C. $v_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2\,\tau}$
Faux.

Faux. Entre x_i et x_{i+1}, la durée est τ, pas $2\,\tau$.

Correction
Sur une durée courte, la vitesse moyenne approche la vitesse instantanée. On prend les deux positions qui encadrent t_i : $v_i = \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,\tau}$. Cette valeur est d'autant plus juste que τ est court devant la période.

Méthode : Montage, protocole et exploitation au banc à coussin d'air

Montage. Un mobile de masse $m = 0{,}250\,\text{kg}$ glisse sur un banc horizontal à coussin d'air. Il est relié à un ressort de raideur $K = 10{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, mesurée au préalable par l'allongement sous une masse connue. Un capteur relève sa position.

Protocole. Repère l'origine O, ressort non déformé, et oriente l'axe. Écarte le mobile de $8{,}0\,\text{cm}$, lâche-le sans vitesse et enregistre x toutes les $50\,\text{ms}$.

Exploitation. Calcule v_i, puis E_c, E_{pe} et E_m à chaque instant, et compare les valeurs de E_m.

Positions, vitesses et énergies mesurées

Le mobile est lâché en $t = 0$ depuis $x_0 = 8{,}0\,\text{cm}$; en $t = 0{,}45\,\text{s}$, il est en $x_9 = -7{,}7\,\text{cm}$. Entre les deux, le capteur donne :

t (s)	x (cm)	v ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
$0{,}05$	$7{,}6$	$-0{,}15$
$0{,}10$	$6{,}5$	$-0{,}29$
$0{,}15$	$4{,}7$	$-0{,}41$
$0{,}20$	$2{,}4$	$-0{,}48$
$0{,}25$	$-0{,}1$	$-0{,}50$
$0{,}30$	$-2{,}6$	$-0{,}47$
$0{,}35$	$-4{,}8$	$-0{,}39$
$0{,}40$	$-6{,}5$	$-0{,}29$

Devine : L'énergie mécanique au fil des lignes

Avant de calculer les énergies ligne par ligne : comment prévois-tu que varie E_m entre $t = 0{,}05\,\text{s}$ et $t = 0{,}40\,\text{s}$?

A. Elle tombe à 0 au passage par O.
Faux.

Faux. En O, seule E_{pe} s'annule ; le mobile y a sa plus grande vitesse.

B. Elle oscille comme E_{pe}.

Faux.

Faux. E_c et E_{pe} oscillent en opposition ; leur somme varie peu.

C. Elle double au passage par O.

Faux.

Faux. Aucune force ne fournit d'énergie au mobile pendant le mouvement.

D. Elle reste presque constante.

Juste.

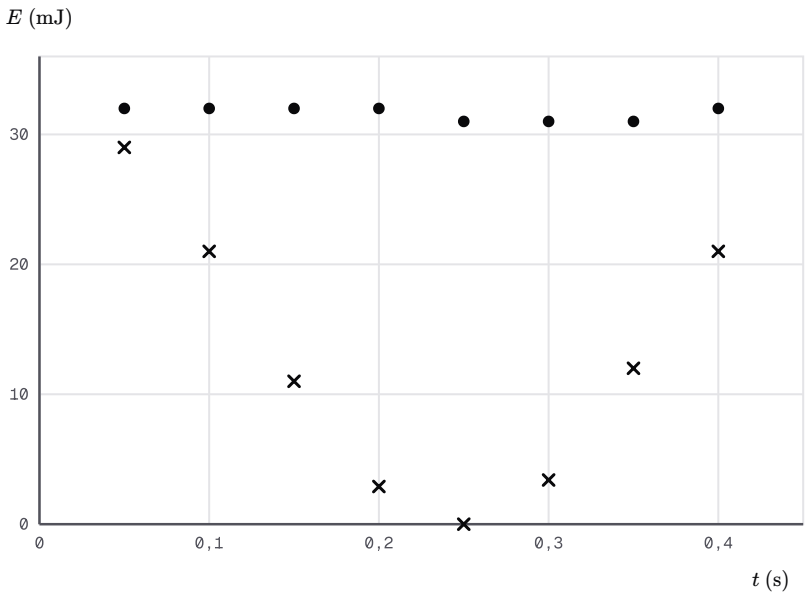
Juste : sur coussin d'air, les frottements sont faibles ; E_m doit rester proche de sa valeur au lâcher.

Correction

Sur le banc à coussin d'air, les frottements sont faibles : on attend une énergie mécanique presque constante, égale à sa valeur au lâcher. Les mesures, avec leurs incertitudes, permettent de le vérifier.

Les énergies, en mJ, se calculent ligne par ligne avec $E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$ et $E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,K\,x^2$:

t (s)	E_c	E_{pe}	E_m
$0{,}05$	$2{,}8$	29	32
$0{,}10$	11	21	32
$0{,}15$	21	11	32
$0{,}20$	29	$2{,}9$	32
$0{,}25$	31	≈ 0	31
$0{,}30$	28	$3{,}4$	31
$0{,}35$	19	12	31
$0{,}40$	11	21	32



× E_{pe} ● E_m

Énergies potentielle élastique et mécanique calculées depuis l'enregistrement du mobile, en fonction du temps.

Exploiter les mesures et discuter les écarts

Exemple : Une énergie mécanique presque constante

L'énergie potentielle élastique passe de $29\,\text{mJ}$ à presque 0, puis remonte. Pendant ce temps, E_m reste entre 31 et $32\,\text{mJ}$. Au lâcher, la vitesse est nulle :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\,K\,x_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10{,}0 \times 0{,}080^2 \\ &= 3{,}2 \times 10^{-2}\,\text{J} \end{aligned}$$

Toutes les valeurs du tableau s'écartent de ces $32\,\text{mJ}$ de moins de $5\,\%$. Aux incertitudes près, les mesures confirment la conservation de l'énergie mécanique.

À toi : L'énergie mécanique d'une ligne du tableau

À $t = 0{,}20\,\text{s}$, recalcule E_c, E_{pe} et E_m à partir de x et de v du premier tableau. Rédige ton calcul, puis compare avec la correction.

Indice 1
Lis la ligne : $x = 2{,}4\,\text{cm}$ et $v = -0{,}48\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Indice 2
Convertis x en mètres ; le signe de v disparaît dans le carré.
Indice 3
Point délicat : additionne les énergies non arrondies avant d'arrondir E_m.

Réponse

$$E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}250 \times 0{,}48^2$$
$$= 2{,}9 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \times 10{,}0 \times 0{,}024^2$$
$$= 2{,}9 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

D'où $E_m = 28{,}8 + 2{,}88 = 32\,\mathrm{mJ}$, la valeur du tableau.

Remarque : D'où viennent les écarts ?

Plusieurs causes expliquent que E_m ne soit pas tout à fait constante. La vitesse calculée sur $2\,\tau$ est une moyenne, un peu plus faible que la vitesse instantanée près de O. Les positions sont lues au millimètre. Un frottement résiduel subsiste sur le banc. Enfin, la raideur K, mesurée à part, a sa propre incertitude.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Aspects énergétiques des oscillations mécaniques » (2bac · pc · physique-chimie)