BURHAN

Résumé : Vecteurs et translation

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/vecteurs-et-translation/resume

Chapitre	Semestre
Vecteurs et translation	Semestre 2

Le vecteur et ses trois caractéristiques

À retenir : Un vecteur, c'est un déplacement

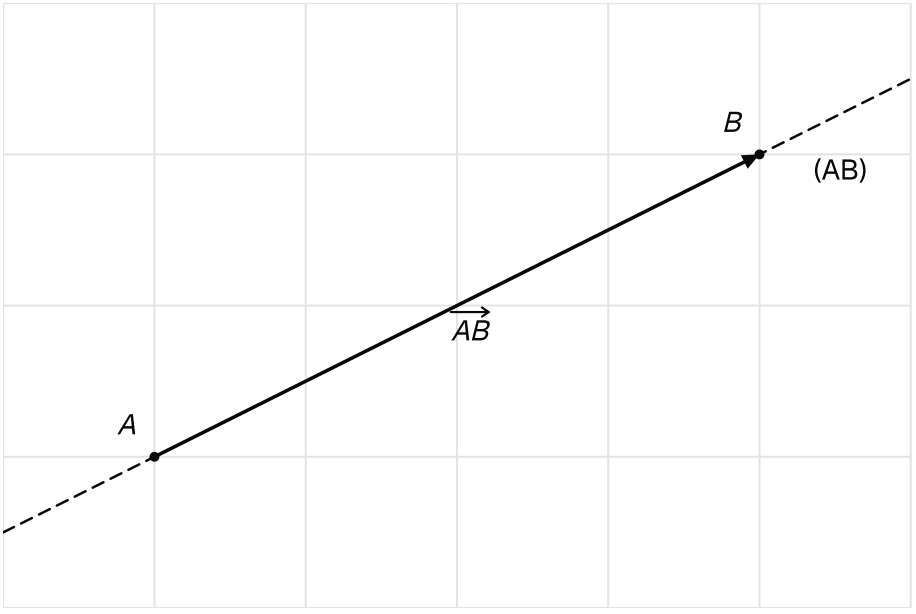
Un vecteur décrit un déplacement en ligne droite. Pour le connaître, il te faut trois informations : la direction, le sens et la longueur. Sur un quadrillage, tu les lis en comptant les carreaux.

Définition : Vecteur

Soit A et B deux points distincts. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement qui mène de A à B. Il est défini par trois caractéristiques :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **longueur** : la longueur AB du segment $[AB]$.

Le point A est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le point B son **extrémité**. Deux droites parallèles ont la même direction.



Un vecteur AB : sa droite support fixe la direction, la pointe en B fixe le sens, la flèche mesure la longueur.

Méthode : décrire un vecteur

1. **Direction** : donne la droite qui porte le vecteur. Une droite parallèle à celle-ci convient aussi.
2. **Sens** : indique le point de départ et le point d'arrivée.
3. **Longueur** : mesure le segment à la règle graduée, ou compte les carreaux du quadrillage.

Exemple

Figure. Sur ton cahier, place un point K sur un nœud du quadrillage. Place L à 5 carreaux vers la gauche de K.

Description. La direction de $\overrightarrow{KL}$ est celle de la droite (KL), une ligne horizontale du quadrillage. Son sens va de K vers L, donc vers la gauche. Sa longueur vaut 5 carreaux.

Vecteurs égaux, vecteur nul, vecteurs opposés

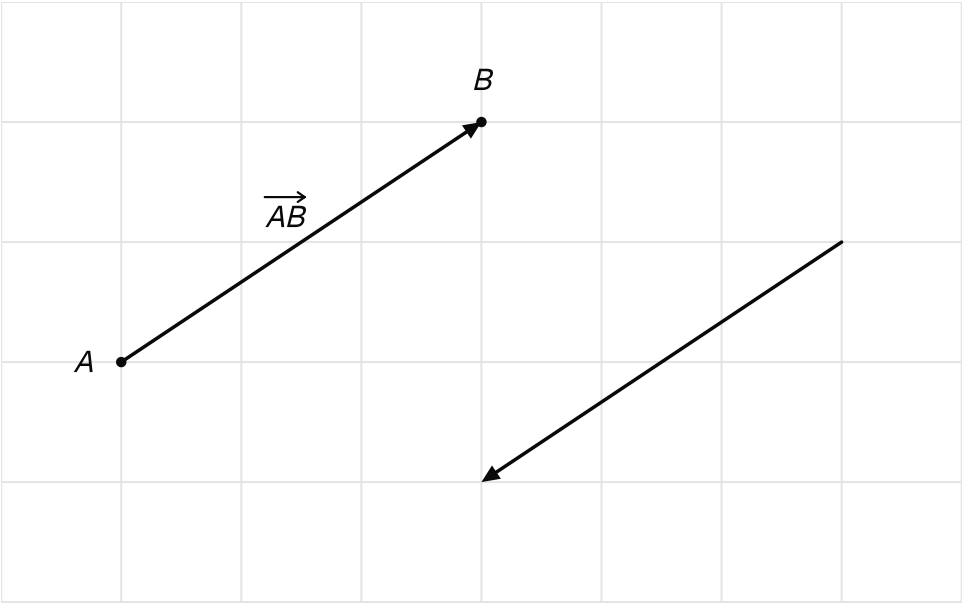
Définition : Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Deux vecteurs égaux décrivent le même déplacement, à partir de deux points de départ qui peuvent être différents.

Définition : Vecteur nul et vecteurs opposés

- Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**. Sa longueur est 0. Il est noté $\vec{0}$: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- Deux vecteurs qui ont la même direction et la même longueur, mais des sens contraires, sont dits **opposés**. Par exemple, si A et B sont distincts, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.



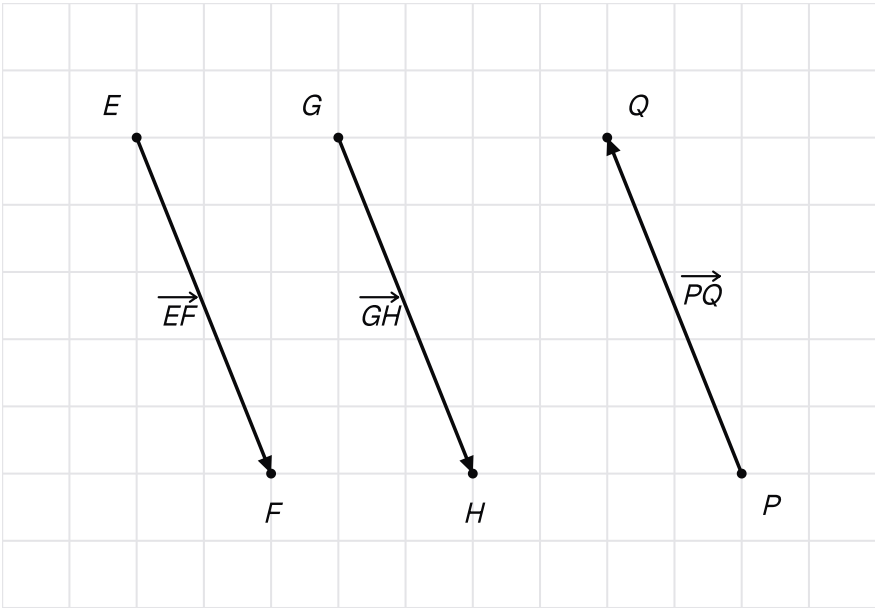
À gauche, la flèche de A vers B ; à droite, une flèche de même direction et de même longueur, en sens inverse, représente BA.

Exemple

Figure. Sur un quadrillage, F est à 2 carreaux vers la droite et 5 vers le bas de E. Le point H est à 2 carreaux vers la droite et 5 vers le bas de G. Enfin, Q est à 2 carreaux vers la gauche et 5 vers le haut de P.

Égaux. Les déplacements de E à F et de G à H sont les mêmes : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

Opposés. De P à Q, on garde la direction et la longueur, avec un sens inversé : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{FE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont donc opposés.



EF et GH, même déplacement vers le bas, sont égaux ; PQ, qui remonte, leur est opposé.

Attention : Une longueur commune ne suffit pas

Un déplacement de 3 carreaux vers le haut et un déplacement de 3 carreaux vers la droite ont la même longueur. Pourtant, leurs directions sont différentes : ces deux vecteurs ne sont donc pas égaux.

Contrôle toujours la direction, le sens et la longueur, l'une après l'autre.

Attention : L'ordre des lettres compte

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ part de E et arrive en F. Le vecteur $\overrightarrow{FE}$ fait le trajet inverse : ils sont opposés, et non égaux.

Lis toujours les lettres dans l'ordre, de l'origine vers l'extrémité.

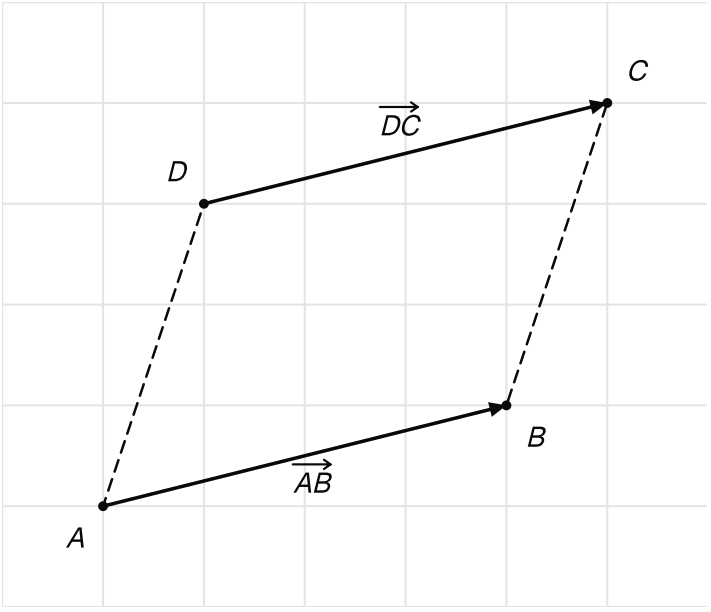
Vecteurs égaux et parallélogramme

Propriété : Vecteurs égaux et parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points tels que A, B et C ne soient pas alignés.

- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Attention à l'ordre des lettres : on lit $A \to B$ et $D \to C$.

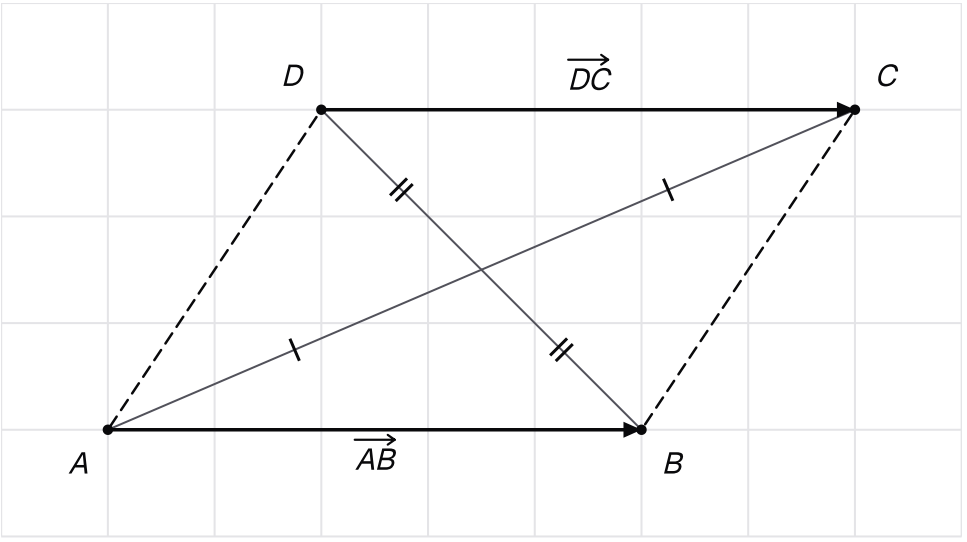


ABCD parallélogramme : le déplacement qui mène de A à B est aussi celui qui mène de D à C, d'où l'égalité des vecteurs AB et DC.

Propriété : Égalité de deux vecteurs et diagonales

Soit A, B, C et D quatre points. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Cette propriété reste vraie quand les quatre points sont alignés : on dit alors que $ABCD$ est un parallélogramme **aplati**.



Quand les vecteurs AB et DC sont égaux, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu : leurs moitiés portent le même codage deux à deux.

Remarque : Résultats admis

Ces deux propriétés sont admises en 2e année : tu les emploies sans les démontrer. Dans une rédaction, cite celle que tu utilises par son nom.

Méthode : prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. **Nomme** le quadrilatère en suivant ses sommets, par exemple $RSTU$.
2. **Établis** l'égalité $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$: en comptant les carreaux, par une translation ou par la relation de Chasles.
3. **Vérifie** que R, S et T ne sont pas alignés.
4. **Conclus** en citant la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme ».

Exemple

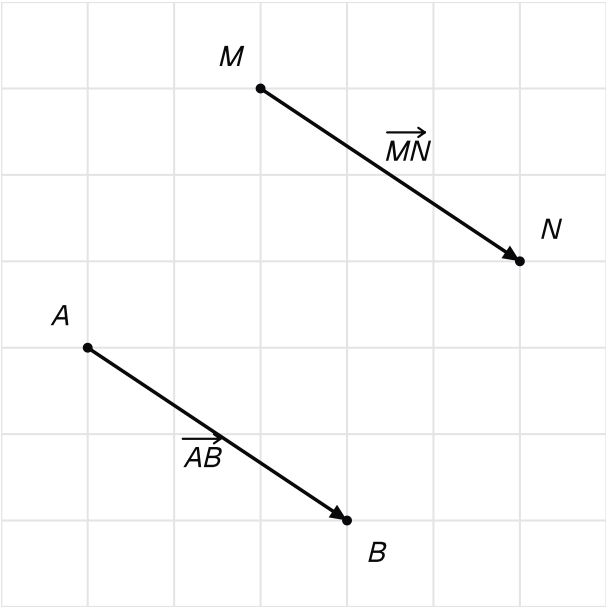
Soit $RSTU$ un parallélogramme. D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$. Parcouru dans l'autre sens, ce parallélogramme se nomme $RUTS$: on a donc aussi $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$. En revanche, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont opposés, car $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{SR}$.

Construire un point ; milieu d'un segment

Propriété : Construire un point à partir d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et M un point. Il existe **un seul** point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Pour le construire, on part de M et on fait le même déplacement que de A à B : même direction, même sens, même longueur.



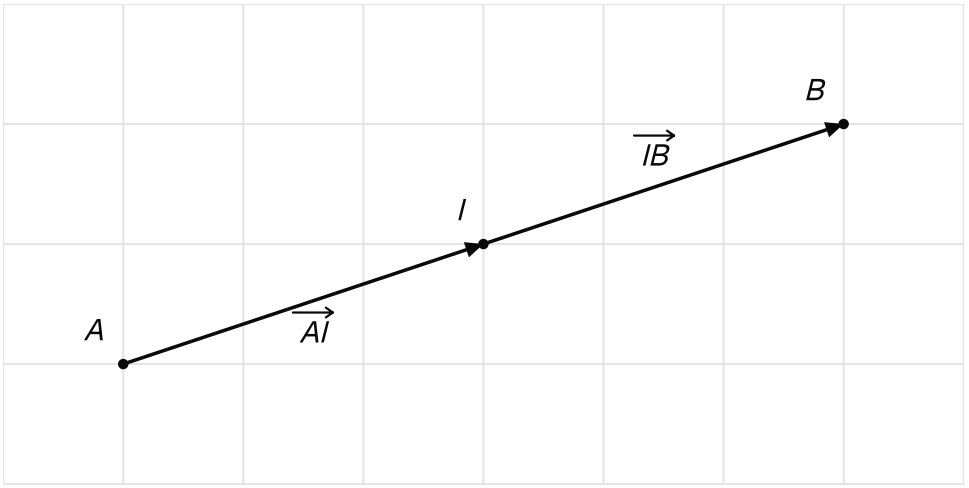
Depuis M, on refait le déplacement de A à B : on obtient l'unique point N pour lequel le vecteur MN est égal au vecteur AB.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il assure qu'une construction de ce type donne toujours un point, et un seul.

Propriété : Milieu d'un segment

Soit A et B deux points distincts et I un point. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



I milieu de [AB] : le vecteur AI et le vecteur IB décrivent le même déplacement, l'un à la suite de l'autre.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Pour écrire que J est le milieu de $[EF]$, tu écris $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{JF}$. Réciproquement, cette égalité suffit pour conclure que J est le milieu.

Remarque : Symétrique d'un point

Rappel. Le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point N tel que O soit le milieu de $[MN]$. Avec les vecteurs, cela s'écrit $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

Translation d'un point

Définition : Translation qui transforme A en B

Soit A et B deux points distincts. La **translation qui transforme A en B** fait glisser tous les points du plan de la même façon : dans la direction de la droite (AB), dans le sens de A vers B, et d'une longueur égale à AB.

Soit M un point. Son **image** par cette translation est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété : Image d'un point par une translation

Soit A et B deux points distincts, M un point et M' son image par la translation qui transforme A en B.

- L'image du point A est le point B.
- Si M n'est pas sur la droite (AB), alors $ABM'M$ est un parallélogramme.
- Si M est sur la droite (AB), alors son image M' est aussi sur la droite (AB).

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il sert de contrôle : après avoir construit l'image d'un point, regarde si le quadrilatère obtenu est bien un parallélogramme.

Méthode : construire l'image d'un point

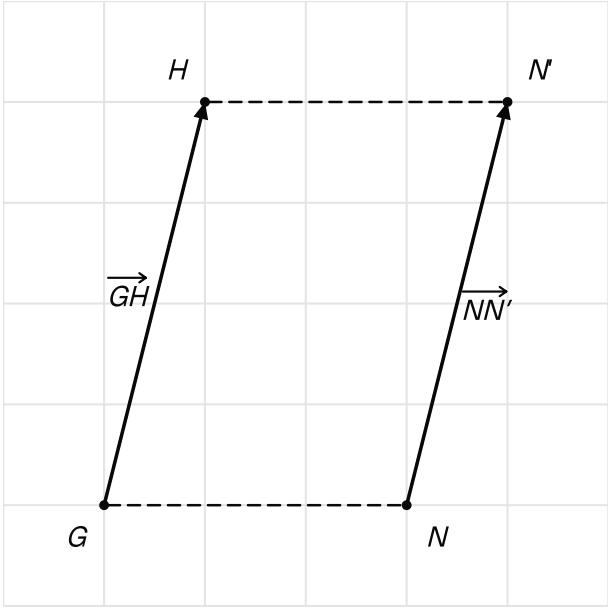
1. **Lis** le déplacement qui mène de A à B : nombre de carreaux vers la droite ou la gauche, puis vers le haut ou le bas.
2. **Refais** exactement ce déplacement en partant de M : le point d'arrivée est M'.
3. **Contrôle** : si M n'est pas sur la droite (AB), le quadrilatère $ABM'M$ doit être un parallélogramme.

Exemple

Figure. Le point H est à 1 carreau vers la droite et 4 vers le haut de G. Le point N est à 3 carreaux vers la droite de G.

Image. Pour l'image de N par la translation qui transforme G en H, pars de N et fais le même déplacement : N' est à 1 carreau vers la droite et 4 vers le haut de N.

Contrôle. Le point N n'est pas sur la droite (GH) : $GHN'N$ est un parallélogramme.



L'image N' de N par la translation qui transforme G en H, avec le parallélogramme de contrôle GHN'N.

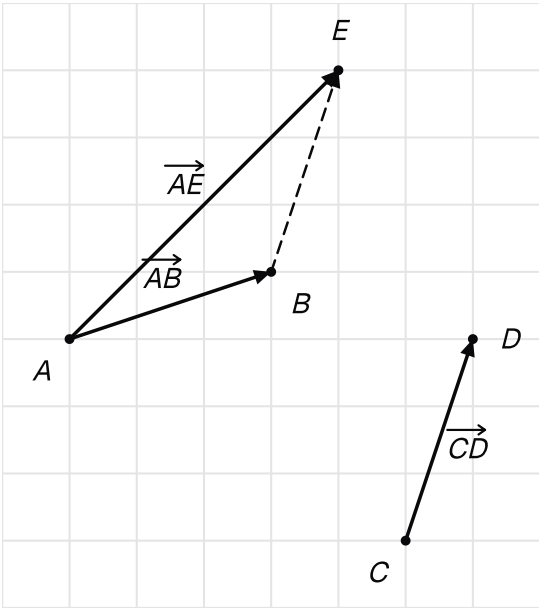
Somme de deux vecteurs ; relation de Chasles

Définition : Somme de deux vecteurs

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. On construit le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. La **somme** des deux vecteurs est le vecteur $\overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}.$$

On enchaîne les deux déplacements : d'abord de A à B, puis de B à E.



Pour additionner AB et CD, on place en B un vecteur égal à CD : il mène en E, et AE est la somme.

Attention : Somme de vecteurs et somme de longueurs

Place E, puis F à 5 carreaux vers la droite de E, puis G à 2 carreaux vers la gauche de F. On a $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$.

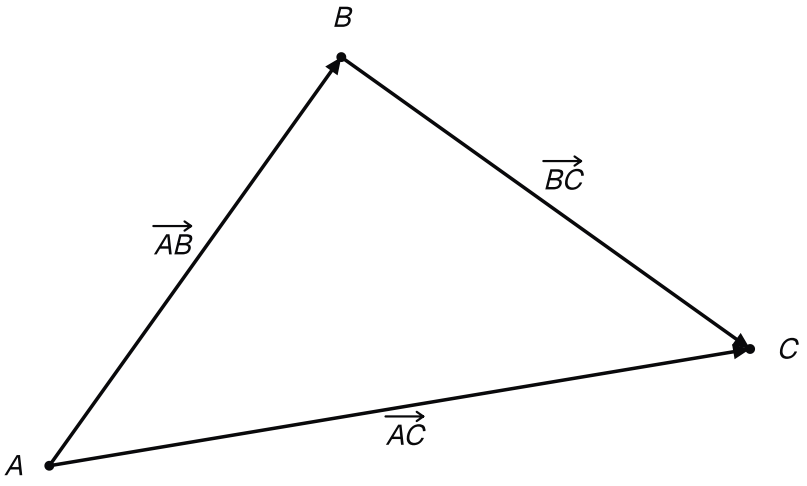
Pourtant, $EF + FG$ vaut 7 carreaux, alors que EG ne mesure que 3 carreaux. Additionner des vecteurs n'est pas additionner leurs longueurs.

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

L'extrémité du premier vecteur est l'origine du second : la lettre B « s'efface ». En particulier, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.



Deux vecteurs qui se suivent, AB puis BC, se remplacent par le seul vecteur AC.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il permet de remplacer deux vecteurs qui se suivent par un seul vecteur, sans aucune figure.

Méthode : réduire une somme avec la relation de Chasles

1. **Vérifie** que chaque vecteur commence là où finit le précédent.
2. **Remplace** sinon un vecteur par un vecteur égal bien choisi.
3. **Supprime** les lettres du milieu, deux vecteurs à la fois, jusqu'à un seul vecteur.

Exemple

Énoncé. Réduis $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML}$.

Vérification. Chaque vecteur commence là où finit le précédent.

Réduction. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LM}$, puis $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LL} = \vec{0}$.

Avec un vecteur égal. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, les lettres ne se suivent pas. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme ».

On remplace donc $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{DC}$, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

Attention : Les lettres doivent se suivre

Dans $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$, l'extrémité F n'est pas l'origine G : aucune lettre ne s'efface. De même, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ ne vaut pas, en général, $\overrightarrow{FG}$, car les deux vecteurs partent du même point.

Remplace d'abord un vecteur par un vecteur égal, ou utilise un parallélogramme.

Attention : Un vecteur et son opposé

Avec $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE}$, tu vas de E à F, puis tu reviens en E. Le résultat est le vecteur nul : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$.

Ce n'est ni $2\overrightarrow{EF}$, ni le nombre 0.

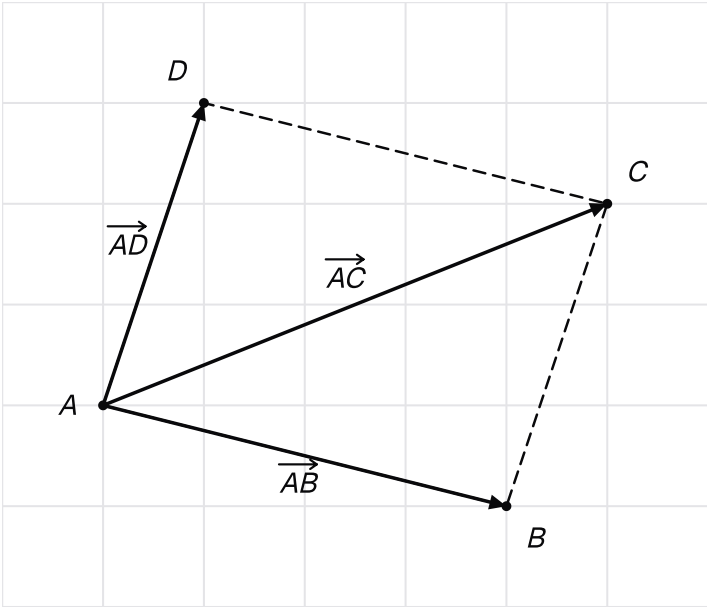
Somme et parallélogramme ; sommes de vecteurs égaux

Propriété : Somme de deux vecteurs et parallélogramme

Soit A, B et D trois points non alignés, et C le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

La somme de deux vecteurs de même origine A se lit sur la **diagonale** issue de A du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.



Deux vecteurs de même origine A : leur somme est portée par la diagonale [AC] du parallélogramme construit sur eux.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il donne une seconde construction de la somme quand les deux vecteurs ont la même origine.

Méthode : construire la somme de deux vecteurs

1. **Bout à bout** : à partir de l'extrémité du premier vecteur, trace un vecteur égal au second. Le vecteur somme va de l'origine du premier jusqu'à l'extrémité du second.
2. **Même origine**, quand les deux vecteurs ont des directions différentes : complète le parallélogramme dont deux côtés sont ces vecteurs. Trace sa diagonale qui part de l'origine commune : c'est la somme. Sinon, place-les bout à bout.

Exemple

Figure. Le point P est à 4 carreaux vers la droite de O, et Q est à 2 carreaux vers le haut de O.

Bout à bout. À partir de P, fais le déplacement de O à Q : tu arrives en S, à 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de O. Donc $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS}$.

Contrôle. Le quadrilatère $OPSQ$ est un parallélogramme : sa diagonale issue de O donne la même somme.

Définition : Somme de vecteurs égaux

Soit A et B deux points distincts.

- On écrit $2\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$, puis $3\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$, et ainsi de suite.
- On écrit $-\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur opposé $\overrightarrow{BA}$, puis $-2\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$, et ainsi de suite.

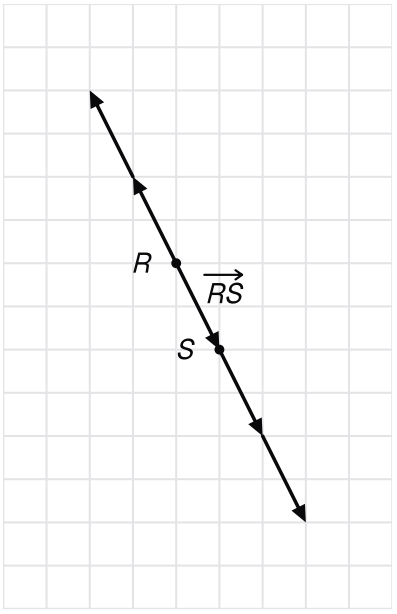
Le nombre écrit devant le vecteur est toujours un **entier**.

Exemple

Figure. Le point S est à 1 carreau vers la droite et 2 vers le bas de R.

Trois fois. Le vecteur $3\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RS}$ correspond à 3 carreaux vers la droite et 6 vers le bas.

Opposé. Le vecteur $-2\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SR}$ correspond à 2 carreaux vers la gauche et 4 vers le haut.



Depuis R, trois fois RS vers le bas donne 3RS ; deux fois SR vers le haut donne -2RS.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Décrire** un vecteur : direction, sens, longueur, ou carreaux comptés sur le quadrillage.
- **Comparer** deux vecteurs : même déplacement, vecteurs égaux ; sens contraire seulement, vecteurs opposés.
- **Prouver** un parallélogramme : une égalité de vecteurs, les lettres dans l'ordre, trois sommets non alignés.
- **Traduire** un milieu ou un symétrique : deux vecteurs égaux qui se suivent.
- **Construire** une image par une translation : le même déplacement, puis le contrôle par un parallélogramme.
- **Construire** une somme : bout à bout, ou diagonale du parallélogramme pour deux vecteurs de même origine.
- **Réduire** une somme : la relation de Chasles, après avoir remplacé au besoin un vecteur par un vecteur égal.
- **Écrire** une somme de vecteurs égaux : un entier devant le vecteur.

Parallélogramme ABCD, avec A, B, C non alignés

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

I milieu de [AB]

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

M' image de M par la translation qui transforme A en B

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Vecteurs opposés

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

Somme et parallélogramme ABCD

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Somme de vecteurs égaux

$$3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, écris l'égalité de vecteurs avant de conclure. Cite la propriété employée par son nom, par exemple « d'après la relation de Chasles ».

Pour un parallélogramme, vérifie que trois sommets ne sont pas alignés. Décris chaque construction : le point de départ et le déplacement.