BURHAN

Vecteurs et translation : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/vecteurs-et-translation/exercices/examen

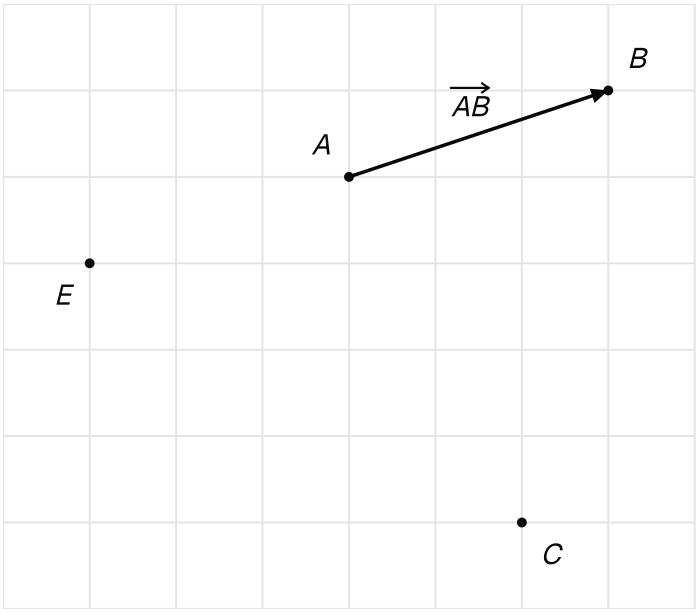
Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs et translation	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une vitre de vitrine qui coulisse

Dans une boutique, une vitre coulisse : chacun de ses points glisse selon la translation qui transforme A en B. On travaille sur un quadrillage, à reproduire sur ta copie. Le point A est un nœud du quadrillage, c'est-à-dire un croisement de deux lignes.

- B est à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de A.
- C est à 2 carreaux vers la droite et 4 vers le bas de A.
- E est à 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas de A.



La vitre coulisse comme de A à B ; les points C et E sont à placer par rapport à A.

1. 1 pts

Construis le point C', image de C par la translation qui transforme A en B. Décris sa position à partir de C.

INDICE

Outil : l'image C' vérifie $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.

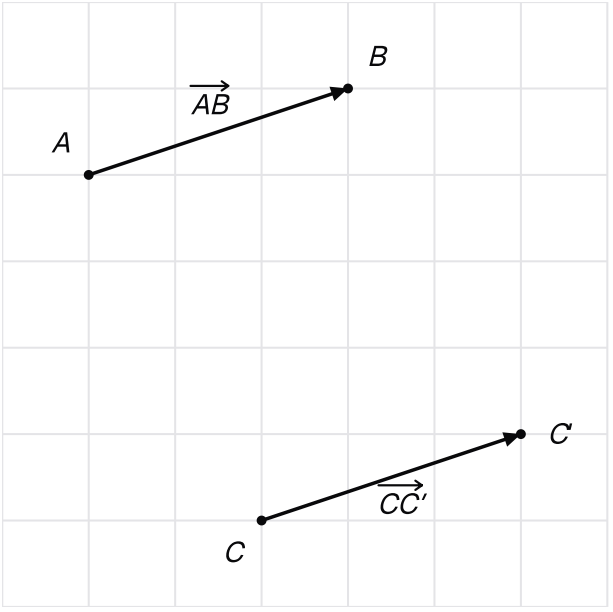
CORRIGÉ

Par définition, l'image C' de C est le point tel que :

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$$

On part de C et l'on refait le déplacement de A à B.

Conclusion. Le point C' est à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de C.



Corrigé de la question 1 : le point C' est atteint depuis C par le même déplacement que de A à B.

2. 1,5 pts

Justifie que le quadrilatère $ABC'C$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : la propriété « image d'un point par une translation ».

Point délicat : vérifie la position de C par rapport à la droite (AB).

CORRIGÉ

Non-alignement. De A à B : 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut ; de A à C : 2 carreaux vers la droite et 4 vers le bas. Leurs directions diffèrent : le point C est donc hors de la droite (AB).

Conclusion. Le point C' est l'image de C par la translation qui transforme A en B, et C n'est pas sur (AB). D'après la propriété « image d'un point par une translation », $ABC'C$ est un parallélogramme.

3. 1 pts

Quelle est l'image du point E par cette translation ? Justifie.

INDICE

Outil : la propriété « construire un point à partir d'un vecteur ».

CORRIGÉ

Déplacement. De E à A, on compte 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut : c'est le déplacement de A à B. Donc :

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$$

Image. La propriété « construire un point à partir d'un vecteur » assure qu'il existe un seul point E' tel que $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AB}$. Le point A convient.

Conclusion. Par cette translation, l'image de E est le point A.

4. 1,5 pts

En déduire que $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Chasles. D'après la relation de Chasles, en passant par A : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$.

Remplacement. D'après la question 3, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Par définition de la somme de vecteurs égaux :

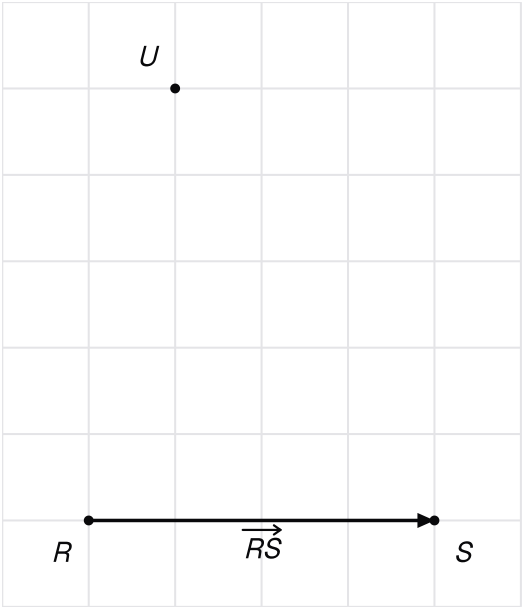
$$\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB}$$

Exercice 2 — 4 pts

Réduire des sommes, puis lire un parallélogramme

Sur un quadrillage, à reproduire sur ta copie, on place trois points R, S et U. Place R sur un nœud, là où deux lignes se croisent.

- S est à 4 carreaux vers la droite de R.
- U est à 1 carreau vers la droite et 5 vers le haut de R.



Les trois points R, S et U du quadrillage, avec le vecteur RS horizontal.

1. — 1 pts

Réduis les sommes $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU}$ et $\overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RU}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles.

Point délicat : la seconde somme est un vecteur, pas un nombre.

CORRIGÉ

Première somme. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RU}$.

Seconde somme. De même, $\overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{UU} = \vec{0}$. C'est le vecteur nul, pas le nombre 0.

Conclusion. La première somme vaut $\overrightarrow{RU}$ et la seconde vaut $\vec{0}$.

2. 1,5 pts

On place un point V quelconque. Réduis la somme $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UV}$.

INDICE

Outil : la question 1, puis la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Deux premiers vecteurs. D'après la question 1, $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RU}$.

Troisième vecteur. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RV}$.

Conclusion. La somme vaut $\overrightarrow{RV}$, quel que soit le point V.

3. 0,5 pts

On choisit maintenant V tel que $RSVU$ soit un parallélogramme. Construis V et décris sa position à partir de R.

INDICE

Outil : la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », avec les sommets dans l'ordre.

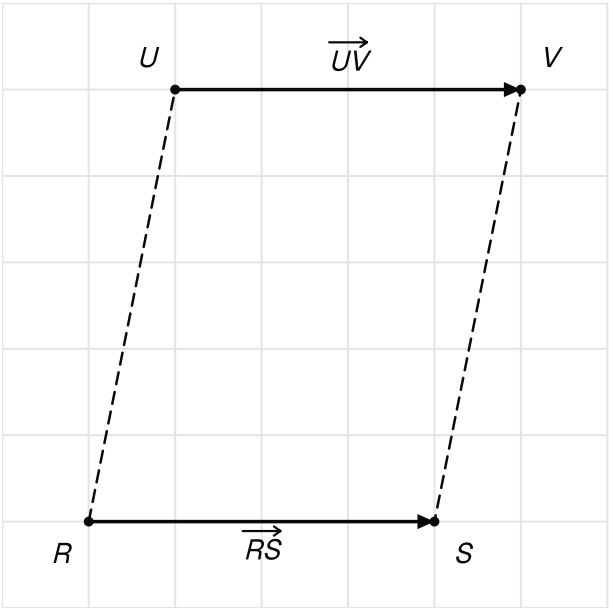
CORRIGÉ

Égalité. Comme $RSVU$ est un parallélogramme, la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » donne :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UV}$$

Position. On part de U et l'on refait le déplacement de R à S, soit 4 carreaux vers la droite. Depuis R : $1 + 4 = 5$ carreaux vers la droite et 5 vers le haut.

Conclusion. Le point V est à 5 carreaux vers la droite et 5 vers le haut de R.



Corrigé de la question 3 : depuis U, le déplacement de R à S mène à V, quatrième sommet du parallélogramme RSVU.

4. 1 pts

En déduire, à l'aide de la question 2 et de la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme », que $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU}$.

INDICE

Point délicat : cette propriété demande que R, S et U ne soient pas alignés.

CORRIGÉ

Non-alignement. De R à S : 4 carreaux vers la droite ; de R à U : 1 carreau vers la droite et 5 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point U est donc hors de la droite (RS). Ainsi, R, S et U ne sont pas alignés.

Somme. De plus, $RSVU$ est un parallélogramme. D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme » :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RV}$$

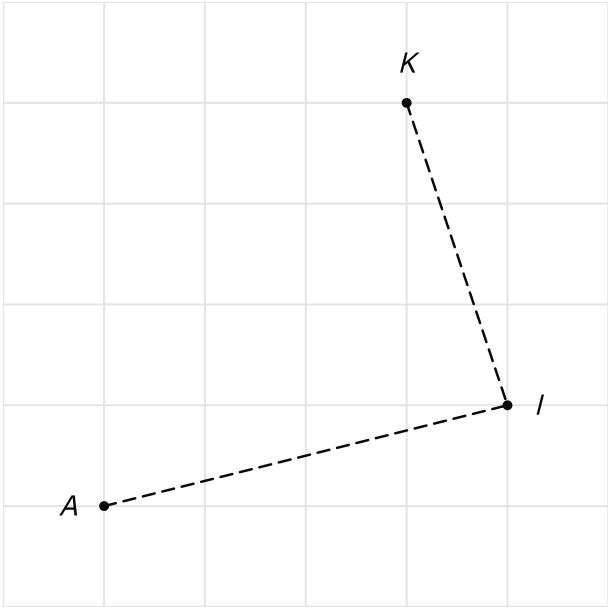
Conclusion. D'après la question 2, la somme $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UV}$ vaut aussi $\overrightarrow{RV}$. Les deux sommes sont égales.

Exercice 3 — 4 pts

Deux symétriques et un parallélogramme

Fais la figure sur ta copie. Les trois points I, A et K sont des nœuds d'un quadrillage, c'est-à-dire des croisements de deux lignes.

- A est à 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas de I.
- K est à 1 carreau vers la gauche et 3 vers le haut de I.



Les trois nœuds I, A et K, avec A et K reliés au point I.

1. — 1 pts

Le point B est le symétrique de A par rapport à I. Écris l'égalité de vecteurs qui traduit que I est le milieu de $[AB]$, puis construis B.

INDICE

Outil : la propriété « milieu d'un segment ».

CORRIGÉ

Égalité. Le point B est le symétrique de A par rapport à I : I est donc le milieu de $[AB]$. D'après la propriété « milieu d'un segment », cela s'écrit :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

Construction. De A à I, on compte 4 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. On refait ce déplacement en partant de I.

Conclusion. Le point B est à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de I.

2. 1,5 pts

Construis le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KI}$. Justifie que I est le milieu de $[KL]$.

INDICE

Début : pars de I et fais le déplacement de K à I.

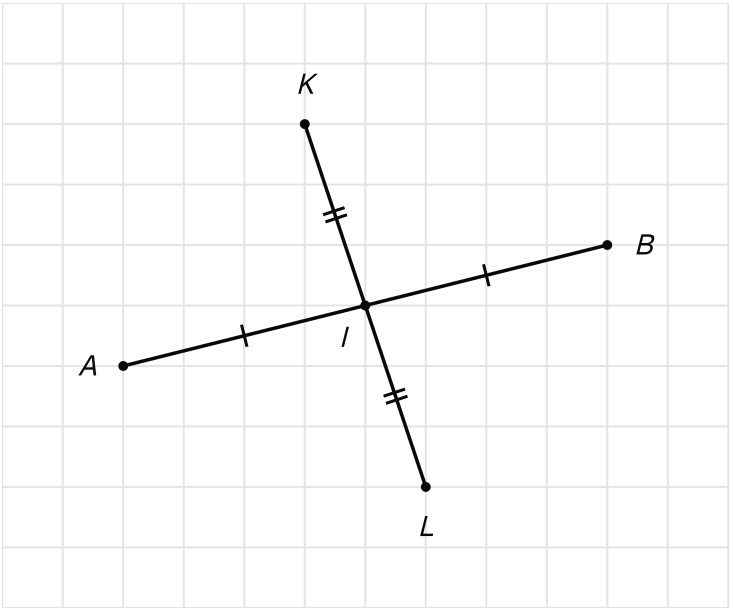
Ensuite : relis l'égalité dans l'ordre $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{IL}$.

CORRIGÉ

Construction. De K à I, on compte 1 carreau vers la droite et 3 vers le bas. En partant de I, on refait ce déplacement : L est à 1 carreau vers la droite et 3 vers le bas de I.

Milieu. L'égalité $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KI}$ se lit aussi $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{IL}$. On applique alors la propriété « milieu d'un segment ».

Conclusion. Le point I est le milieu de $[KL]$.



Corrigé : B et L sont obtenus en refaisant à partir de I les déplacements de A à I et de K à I.

3. 1,5 pts

D'après les questions 1 et 2, les segments $[AB]$ et $[KL]$ ont le même milieu I. En déduire que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{LB}$, puis que $AKBL$ est un parallélogramme.

INDICE

Outil : la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales », puis la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme ».

CORRIGÉ

Égalité. Les segments $[AB]$ et $[KL]$ ont le même milieu I. On applique la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales » aux points A, K, B et L, pris dans cet ordre :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{LB}$$

Non-alignement. De A à B : 8 carreaux vers la droite et 2 vers le haut ; de A à K : 3 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point K est donc hors de la droite (AB). Ainsi, A, K et B ne sont pas alignés.

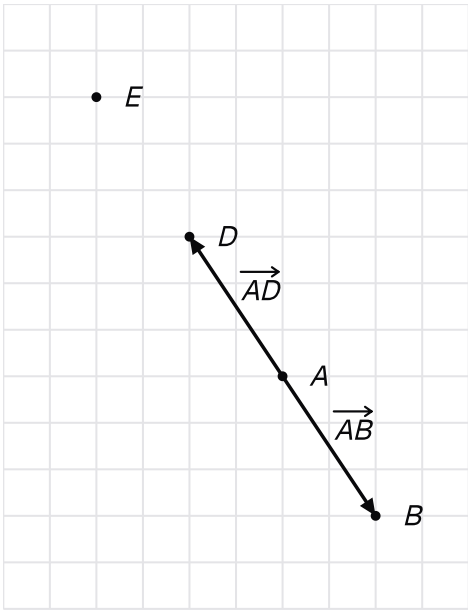
Conclusion. Avec $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{LB}$, la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » donne : $AKBL$ est un parallélogramme.

Exercice 4 5 pts

Un pion qui avance et recule

Sur le plateau quadrillé d'un jeu de société, un pion se déplace en ligne droite d'un nœud à un autre, c'est-à-dire d'un croisement de deux lignes à un autre. Reproduis la figure sur ta copie.

- B est à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas de A.
- D est à 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut de A.
- E est à 4 carreaux vers la gauche et 6 vers le haut de A.



Le plateau de jeu : depuis A, la flèche vers B descend et la flèche vers D monte ; E est plus haut encore.

1. 1 pts

Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: direction, sens et longueur. Écris $\overrightarrow{AD}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{BA}$, puis à l'aide de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : la définition de deux vecteurs opposés.

Point délicat : lis chaque vecteur de son origine vers son extrémité.

CORRIGÉ

Comparaison. De A à B : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas ; de A à D : 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut. C'est le même déplacement, fait à l'envers.

Les deux vecteurs sont portés par la même droite et ont la même longueur : seul le sens change. Ils sont opposés.

Écriture. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ fait aussi 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut. Donc :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$$

Conclusion. On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$.

2. 1,5 pts

En déduire que A est le milieu de $[BD]$, puis que D est le symétrique de B par rapport à A.

INDICE

Outil : la propriété « milieu d'un segment », avec l'égalité $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Milieu. D'après la question 1, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$. D'après la propriété « milieu d'un segment », A est le milieu de $[BD]$.

Symétrique. Le symétrique de B par rapport à A est le point qui forme avec B un segment de milieu A. Ce point est D.

Conclusion. A est le milieu de $[BD]$, et D est le symétrique de B par rapport à A.

3. 1,5 pts

Compte le déplacement de D à E. En déduire que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Début : compare le déplacement de D à E à celui de A à D.

Ensuite : la relation de Chasles, puis la question 1.

CORRIGÉ

Déplacement. De D à E, on compte 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut : c'est le déplacement de A à D. Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Chasles. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$. On remplace $\overrightarrow{DE}$ par $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$.

Remplacement. D'après la question 1, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$.

Conclusion. Par définition de la somme de vecteurs égaux, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$ s'écrit $-2\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$$

4. 1 pts

Le pion va maintenant de B à E en ligne droite. Écris $\overrightarrow{BE}$ avec un entier devant le vecteur $\overrightarrow{BA}$, puis contrôle ton résultat en comptant les carreaux.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par A, puis la question 3.

CORRIGÉ

Chasles. D'après la relation de Chasles, en passant par A : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$.

Remplacement. D'après la question 3, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BA}$$

Contrôle. De B à E, on compte 6 carreaux vers la gauche et 9 vers le haut. Or $2 + 2 + 2 = 6$ et $3 + 3 + 3 = 9$: c'est trois fois le déplacement de B à A, qui est de 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le haut.

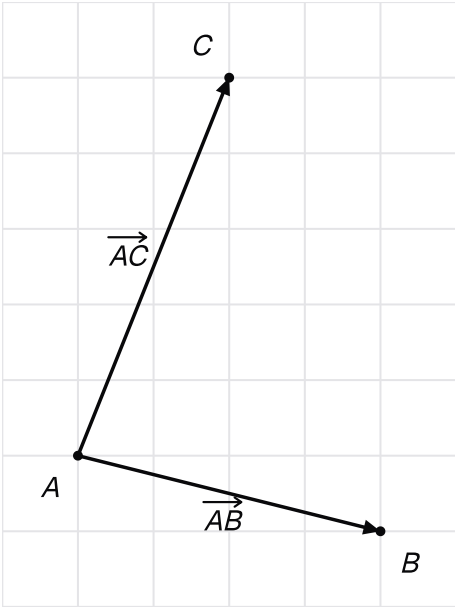
Conclusion. $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BA}$, et le comptage des carreaux le confirme.

Exercice 5 — 4 pts

Deux vecteurs de même origine et un milieu

Sur le plan quadrillé d'une place, trois lampadaires sont placés aux points A, B et C. On veut installer un kiosque. Fais la figure sur ta copie, en plaçant A là où deux lignes du quadrillage se coupent.

- B est à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de A.
- C est à 2 carreaux vers la droite et 5 vers le haut de A.



Les trois lampadaires A, B et C de la place, avec les vecteurs AB et AC qui partent de A.

1. — 0,5 pts

Construis le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Décris sa position à partir de A.

INDICE

Outil : la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », avec les sommets dans l'ordre A, B, D, C.

CORRIGÉ

Égalité. Comme $ABDC$ est un parallélogramme, la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » donne :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Position. On part de C et l'on refait le déplacement de A à B : 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Depuis A : $2 + 4 = 6$ carreaux vers la droite ; verticalement, 5 vers le haut puis 1 vers le bas, soit 4 vers le haut.

Conclusion. Le point D est à 6 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de A.

2. 1 pts

En déduire la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, écrite comme un seul vecteur.

INDICE

Outil : la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme ».

Point délicat : elle demande que A, B et C ne soient pas alignés.

CORRIGÉ

Non-alignement. De A à B : 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas ; de A à C : 2 carreaux vers la droite et 5 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point C est donc hors de la droite (AB). Ainsi, A, B et C ne sont pas alignés.

Somme. De plus, $ABDC$ est un parallélogramme. D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme » :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Conclusion. La somme s'écrit $\overrightarrow{AD}$: elle se lit sur la diagonale du parallélogramme issue de A.

3. 1 pts

Le kiosque est placé au point I, milieu de $[BC]$. Justifie que I est aussi le milieu de $[AD]$, puis décris la position de I à partir de A.

INDICE

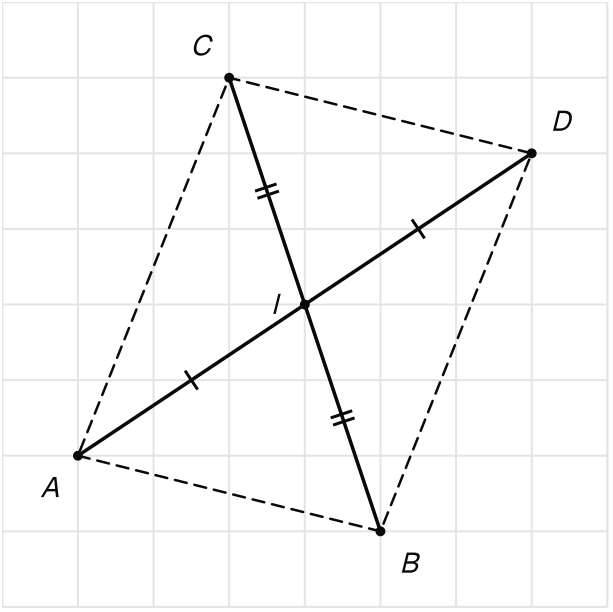
Outil : la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales », avec l'égalité de la question 1.

CORRIGÉ

Diagonales. D'après la question 1, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D'après la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales », $[AD]$ et $[BC]$ ont donc le même milieu. Ce milieu est I, le milieu de $[BC]$.

Position. D'après la propriété « milieu d'un segment », $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$: de A à I, on fait la moitié du déplacement de A à D, soit 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Conclusion. Le point I est aussi le milieu de $[AD]$, et I est à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.



Corrigé de la question 3 : dans le parallélogramme ABDC, le kiosque I est le milieu commun des diagonales [BC] et [AD].

4. 1,5 pts

En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles avec le point I, puis les questions 2 et 3.

CORRIGÉ

Chasles. D'après la relation de Chasles, en passant par I : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$.

Vecteurs égaux. D'après la question 3, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$.

Conclusion. D'après la question 2, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Donc :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$