BURHAN

Vecteurs et translation : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/vecteurs-et-translation/exercices/entrainement

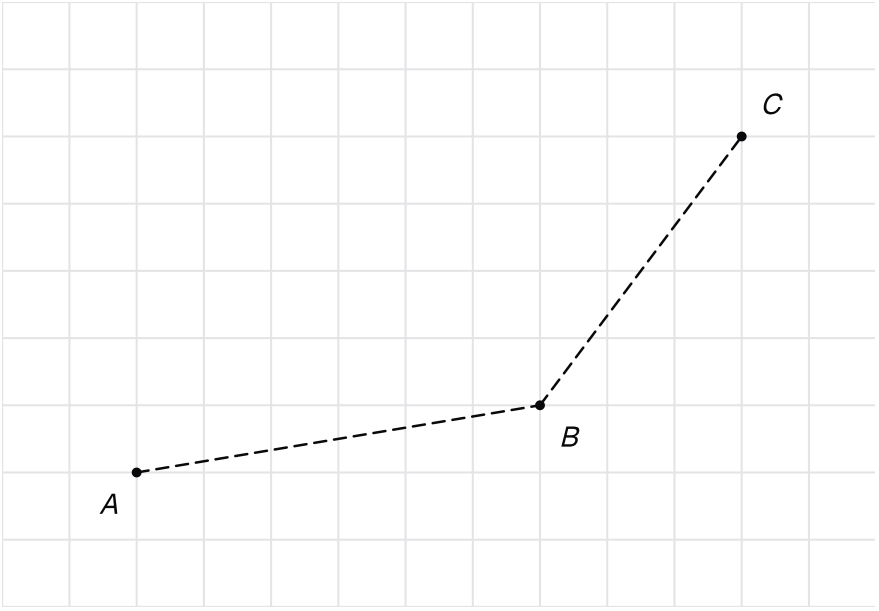
Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs et translation	Entraînement	7

Exercice 1

Quatre piquets dans un potager

Pour délimiter une parcelle de légumes, Yassine plante des piquets sur le plan quadrillé de son potager. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de A.
- C est à 3 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de B.



Le plan du potager avec les trois piquets A, B et C, reliés en pointillés.

1.

Construis le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Décris sa position à partir de A.

INDICE

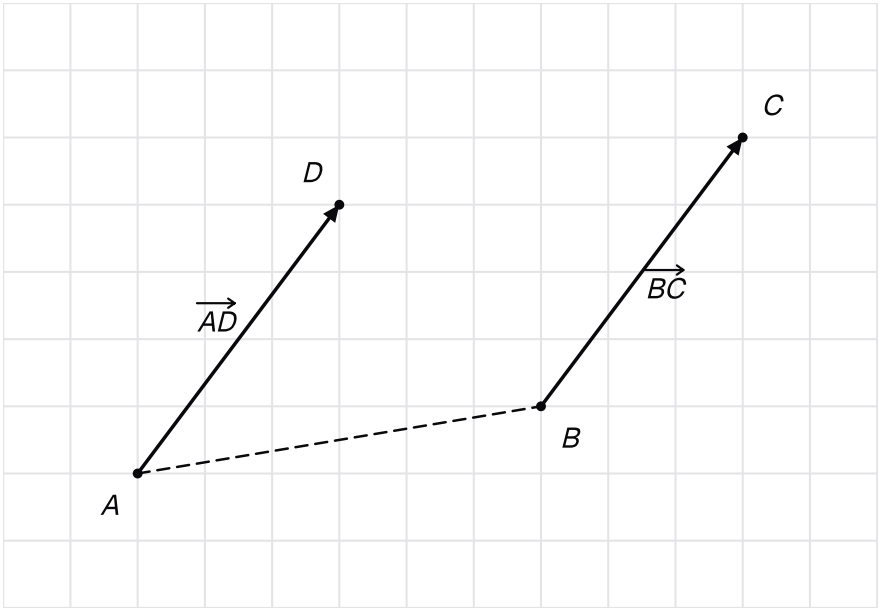
Outil : la propriété « construire un point à partir d'un vecteur » : pars de A et fais le déplacement de B à C.

CORRIGÉ

La propriété « construire un point à partir d'un vecteur » assure qu'il existe un seul point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Pour le construire, on part de A et l'on refait le déplacement de B à C : 3 carreaux vers la droite et 4 vers le haut.

Conclusion. Le point D est à 3 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de A.



Corrigé de la question 1 : depuis A, le déplacement de B à C conduit au point D.

2.

Compte le déplacement de D à C. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

INDICE

Début : pars de D et compte les carreaux jusqu'à C, d'abord vers la droite, puis vers le haut.

CORRIGÉ

En partant de D, on compte 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut pour atteindre C. C'est exactement le déplacement de A à B.

Conclusion. Les deux vecteurs décrivent le même déplacement :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

3.

Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

INDICE

Point délicat : avant de conclure, vérifie que A, B et C ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Égalité. D'après la question 2, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Non-alignement. De A à B : 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut ; de A à C : 9 carreaux vers la droite et 5 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point C est donc hors de la droite (AB). Ainsi, A, B et C ne sont pas alignés.

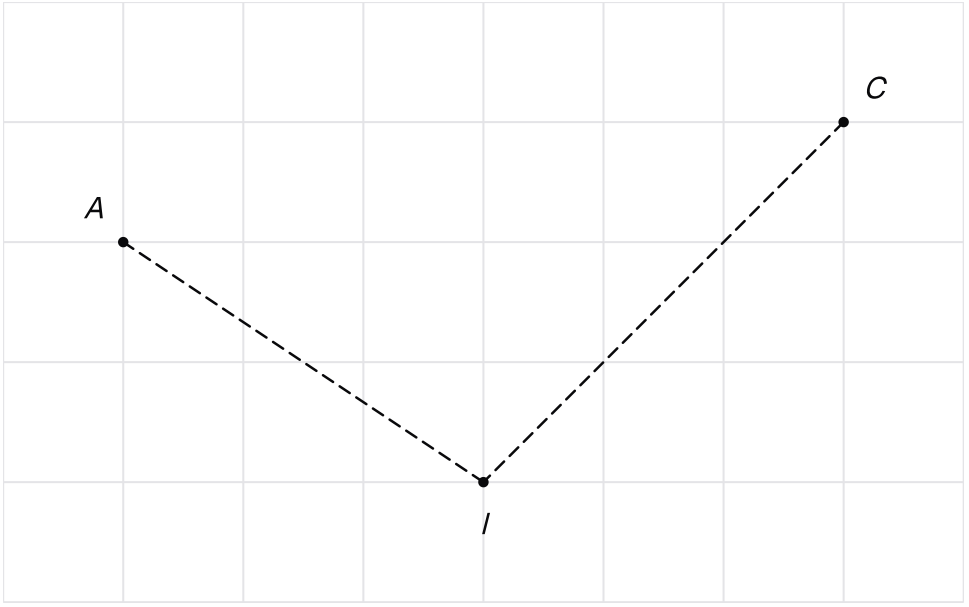
Conclusion. Les deux conditions de la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » sont vérifiées : $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 2

Des bancs symétriques autour d'une fontaine

Sur le plan quadrillé d'un jardin public, une fontaine est placée au point I. On installe des bancs aux points A et C, puis à leurs symétriques par rapport à I. Fais la figure sur ton cahier.

- A est à 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut de I.
- C est à 3 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de I.



Le jardin public : la fontaine I et les deux bancs A et C, chacun relié à la fontaine.

1.

Le point B est le symétrique de A par rapport à I. Écris l'égalité de vecteurs qui traduit cette phrase, puis construis B.

INDICE

Outil : le symétrique B de A par rapport à I est tel que I soit le milieu de $[AB]$.

CORRIGÉ

Égalité. Dire que B est le symétrique de A par rapport à I, c'est dire que I est le milieu de $[AB]$. D'après la propriété « milieu d'un segment », cela s'écrit :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

Construction. De A à I, on compte 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. On refait ce déplacement en partant de I.

Conclusion. Le point B est à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de I.

2.

Le point D est le symétrique de C par rapport à I. Construis D de la même façon.

INDICE

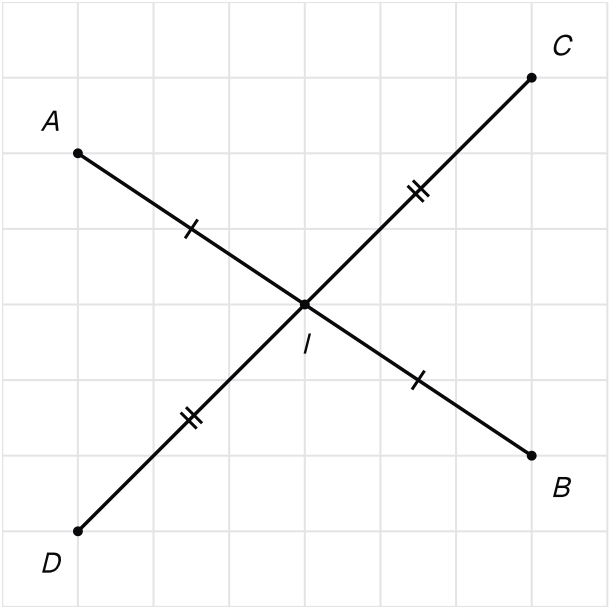
Début : écris $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$, puis compte le déplacement de C à I.

CORRIGÉ

Égalité. Le point I est le milieu de $[CD]$. D'après la propriété « milieu d'un segment », $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$.

Construction. De C à I, on compte 3 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas. On refait ce déplacement en partant de I.

Conclusion. Le point D est donc à 3 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas de I.



Corrigé : B et D, symétriques de A et de C par rapport à I ; les segments [AB] et [CD] ont pour milieu commun I.

3.

Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont le même milieu. En déduire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, puis vérifie-le en comptant les carreaux.

INDICE

Outil : la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales », avec les quatre points dans l'ordre A, C, B, D.

Ensuite : compte de A à C, puis de D à B.

CORRIGÉ

Propriété. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont le même milieu I. On applique la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales » aux points A, C, B et D, pris dans cet ordre :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$$

Vérification. De A à C : 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. De D à B : encore 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

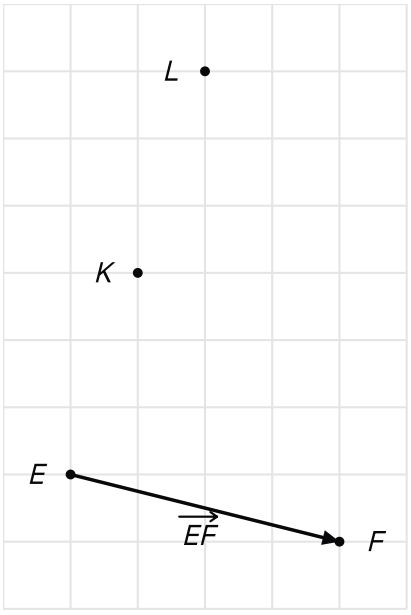
Conclusion. Les deux déplacements sont les mêmes : le comptage confirme l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

Exercice 3

Un décor de jeu vidéo qui glisse

Sur l'écran quadrillé d'un jeu vidéo, tout le décor glisse selon la translation qui transforme E en F. Fais la figure sur ton cahier.

- F est à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de E.
- K est à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de E.
- L est à 2 carreaux vers la droite et 6 vers le haut de E.



L'écran du jeu : le décor glisse comme de E à F, et les points K et L sont à faire glisser.

1.

Construis les images K' et L' des points K et L par cette translation.

INDICE

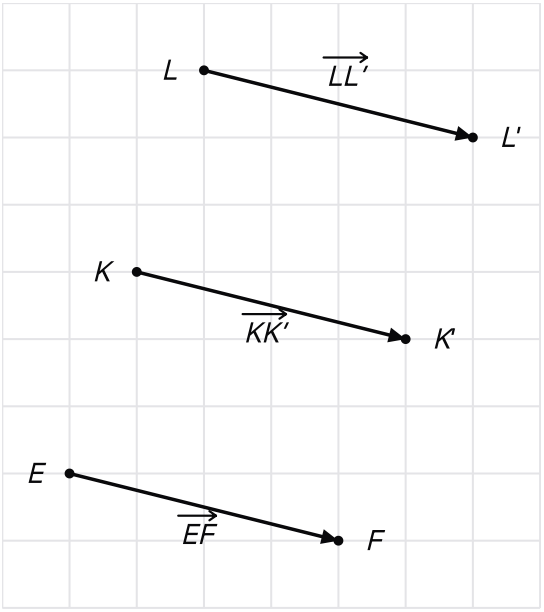
Outil : l'image K' vérifie $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{EF}$; refais le déplacement de E à F à partir de K, puis de L.

CORRIGÉ

Par définition, l'image K' vérifie $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{EF}$, et l'image L' vérifie $\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{EF}$.

On refait donc le déplacement de E à F, soit 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas, d'abord en partant de K, puis en partant de L.

Conclusion. Le point K' est à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de K ; le point L' est à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de L.



Corrigé de la question 1 : K et L font chacun le déplacement de E à F et arrivent en K' et en L'.

2.

Justifie que le quadrilatère $KK'L'L$ est un parallélogramme.

INDICE

Début : les deux vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{LL'}$ sont égaux au même vecteur.

Point délicat : vérifie que K, K' et L' ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Égalité. D'après la question 1, les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{LL'}$ sont tous les deux égaux à $\overrightarrow{EF}$. Donc :

$$\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{LL'}$$

Non-alignement. De K à K' : 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas ; de K à L' : 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point L' est donc hors de la droite (KK'). Ainsi, K, K' et L' ne sont pas alignés.

Conclusion. La propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » s'applique aux points K, K', L' et L : $KK'L'L$ est un parallélogramme.

3.

Le point P est à 8 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut de E : il est sur la droite (EF). Construis son image P'. Où se trouve P' ?

INDICE

Outil : relis la propriété « image d'un point par une translation » pour un point de la droite (EF).

CORRIGÉ

Construction. On part de P et l'on fait 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Depuis E, cela donne $8 - 4 = 4$ carreaux vers la gauche et $2 - 1 = 1$ vers le haut : P' est à 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut de E.

Position. Le point P est sur la droite (EF). D'après la propriété « image d'un point par une translation », son image P' est aussi sur la droite (EF).

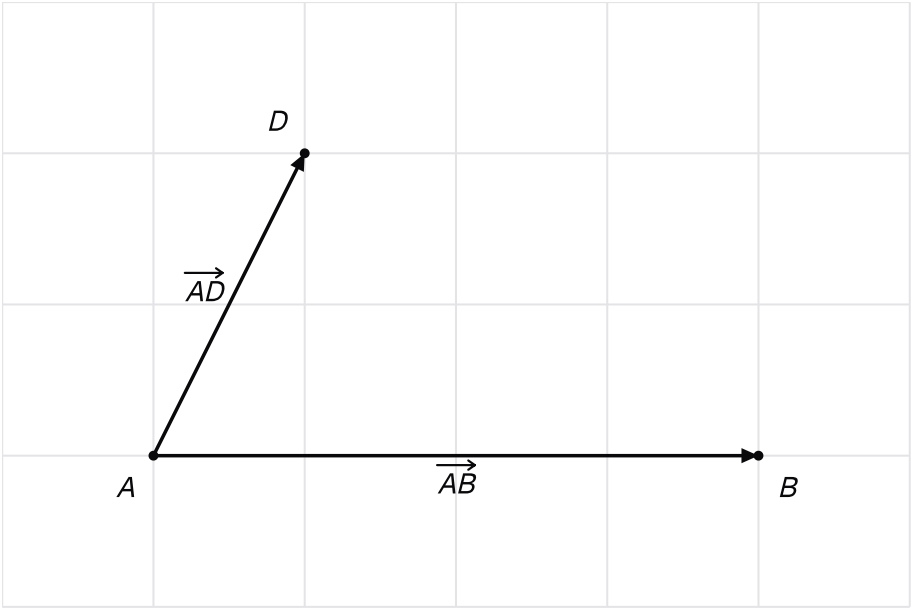
Conclusion. Le point P' se trouve sur la droite (EF), entre P et E.

Exercice 4

Une somme construite par deux chemins

Depuis un refuge A, deux sentiers droits mènent aux points B et D. Une randonneuse marche d'abord comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis comme le vecteur $\overrightarrow{AD}$. Fais la figure sur ton cahier, sur un quadrillage.

- B est à 4 carreaux vers la droite de A.
- D est à 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut de A.



Depuis le refuge A, les deux sentiers droits : le vecteur AB vers la droite, le vecteur AD vers le haut.

1.

Bout à bout : construis le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$. Écris $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ comme un seul vecteur.

INDICE

Outil : la définition de la somme de deux vecteurs ; pars de B et fais le déplacement de A à D.

CORRIGÉ

Construction. À partir de B, on fait 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut, comme de A à D. On obtient le point E, à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.

Somme. On a $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$. D'après la définition de la somme de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$$

Conclusion. La somme s'écrit avec un seul vecteur : $\overrightarrow{AE}$.

2.

Parallélogramme : place le point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Écris $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ à l'aide de C.

INDICE

Début : pour $ABCD$, il faut $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; pars de D.

Ensuite : la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme ».

CORRIGÉ

Construction. On part de D et l'on refait le déplacement de A à B, de sorte que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Le point C est à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.

Parallélogramme. De A à B : 4 carreaux vers la droite ; de A à C : 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point C est donc hors de la droite (AB). Ainsi, A, B et C ne sont pas alignés. Avec l'égalité de la construction, la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » permet de conclure : $ABCD$ est un parallélogramme.

Somme. La droite (AB) est horizontale et D est 2 carreaux plus haut que A : A, B et D ne sont pas alignés non plus. D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme » :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Conclusion. À l'aide de C, la somme s'écrit $\overrightarrow{AC}$.

3.

Compare les points E et C. Que peux-tu en conclure ?

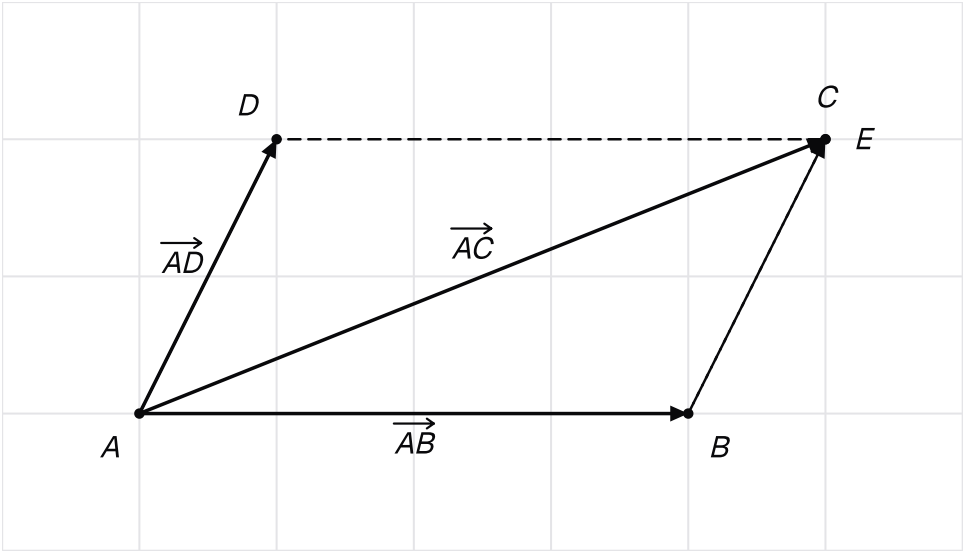
INDICE

Point délicat : compare les positions de E et de C à partir du même point A.

CORRIGÉ

Les points E et C sont tous les deux à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A : ils sont confondus.

Conclusion. Bout à bout ou avec le parallélogramme, on obtient la même somme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. La randonneuse arrive au point C.



Corrigé : le point E, obtenu bout à bout, et le sommet C du parallélogramme ABCD sont un seul et même point.

Exercice 5

Réduire de longues sommes

1.

Réduis la somme $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, deux vecteurs à la fois.

CORRIGÉ

On réduit la somme deux vecteurs à la fois. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

On ajoute ensuite $\overrightarrow{PQ}$, toujours avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$.

Conclusion. La somme se réduit à un seul vecteur :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$$

2.

Soit $KLMN$ un parallélogramme. Réduis la somme $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{ML}$.

INDICE

Début : remplace $\overrightarrow{KL}$ par un vecteur égal qui finit en M.

CORRIGÉ

Vecteur égal. Dans $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{ML}$, les lettres ne se suivent pas. Comme $KLMN$ est un parallélogramme, la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » donne $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

Réduction. On remplace : $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML}$. Les lettres se suivent maintenant ; d'après la relation de Chasles, la somme vaut $\overrightarrow{NL}$.

Conclusion. On obtient :

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NL}$$

3.

Réduis la somme $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

INDICE

Début : commence par $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$.

Point délicat : le résultat final est un vecteur.

CORRIGÉ

Deux premiers vecteurs. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA}$.

Troisième vecteur. De même, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

Dernier vecteur. Il reste $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

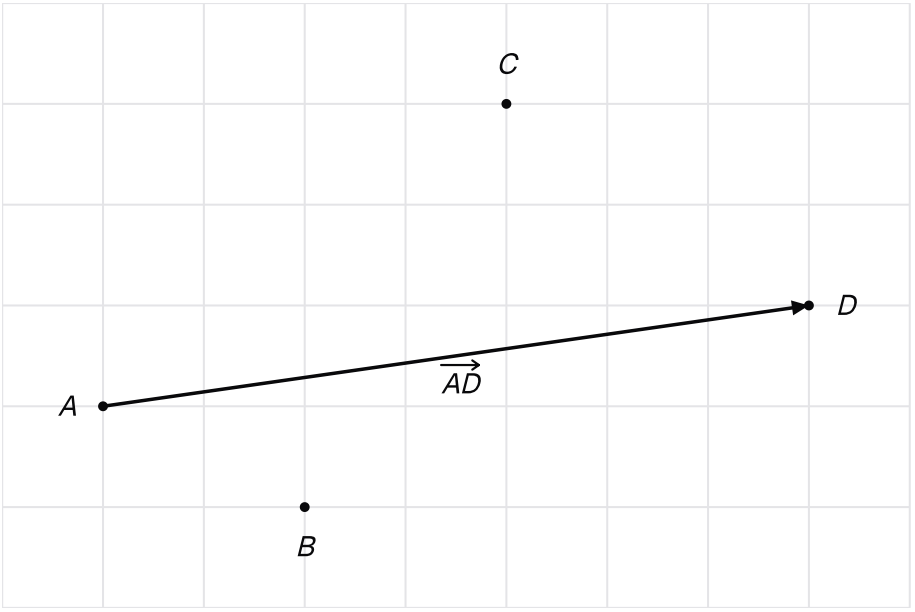
Conclusion. La somme $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ est le vecteur nul.

Exercice 6

Plusieurs chemins vers un même point

Sur un quadrillage, on place quatre points. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de A.
- C est à 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de A.
- D est à 7 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de A.



Les quatre points A, B, C et D du quadrillage, et le vecteur AD à décomposer.

1.

Écris $\overrightarrow{AD}$ comme une somme de deux vecteurs, en passant par B. Fais de même en passant par C.

INDICE

Outil : la relation de Chasles : le trajet de A à D peut faire étape en un autre point.

CORRIGÉ

Étape en B. D'après la relation de Chasles, le trajet de A à D peut passer par B :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

Étape en C. De la même façon, en passant par C :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

Conclusion. On a deux écritures de $\overrightarrow{AD}$: l'une passe par B, l'autre par C.

2.

Écris $\overrightarrow{AD}$ comme une somme de trois vecteurs, en passant d'abord par B, puis par C.

INDICE

Début : fais d'abord étape en C entre A et D, puis en B entre A et C.

CORRIGÉ

Étape en C. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

Étape en B. Toujours d'après la relation de Chasles, le trajet de A à C passe par B : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Conclusion. On remplace $\overrightarrow{AC}$ dans la première égalité :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

3.

Vérifie la décomposition de la question 2 en comptant les carreaux de chaque déplacement.

INDICE

Point délicat : compte séparément les carreaux horizontaux et verticaux, avec leur sens, puis ajoute-les.

CORRIGÉ

Déplacements. De A à B : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. De B à C : 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. De C à D : 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas.

Bilan. Vers la droite : $2 + 2 + 3 = 7$ carreaux. Verticalement : 1 vers le bas, 4 vers le haut, puis 2 vers le bas, soit 1 carreau vers le haut au total.

Conclusion. On retrouve le déplacement de A à D : 7 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. La décomposition de la question 2 est vérifiée.

4.

On place le point G tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD}$. Écris $\overrightarrow{AG}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Début : fais étape en D entre A et G.

CORRIGÉ

Chasles. Le trajet de A à G fait étape en D. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$.

Remplacement. Comme $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD}$, on obtient $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$.

Conclusion. Par définition de la somme de vecteurs égaux :

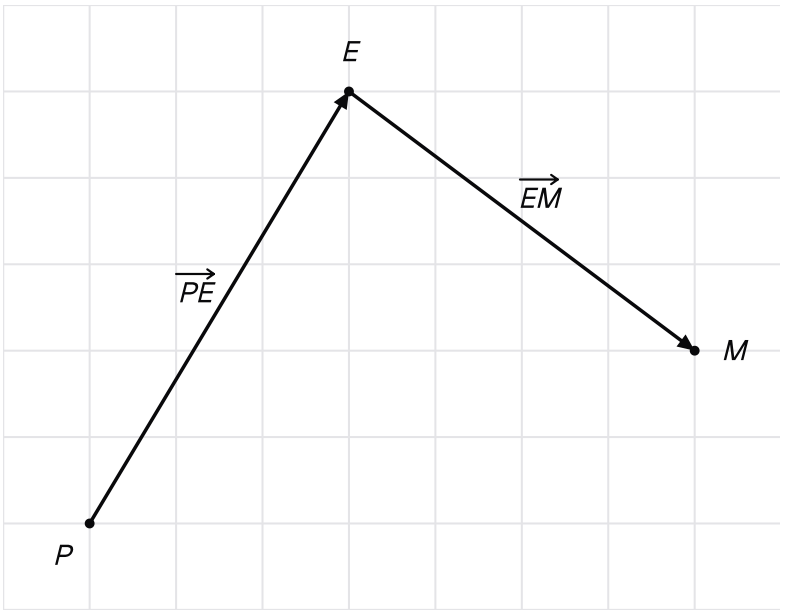
$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AD}$$

Exercice 7

Livraisons dans un quartier

Sur le plan quadrillé d'un quartier, un livreur part de la pharmacie P. Il passe par l'école E et termine au marché M. Fais la figure sur ton cahier.

- E est à 3 carreaux vers la droite et 5 vers le haut de P.
- M est à 4 carreaux vers la droite et 3 vers le bas de E.



Le trajet du livreur sur le plan du quartier : de la pharmacie P à l'école E, puis de l'école au marché M.

1.

Écris $\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EM}$ comme un seul vecteur, puis décris ce déplacement en carreaux.

INDICE

Outil : la relation de Chasles.

Ensuite : ajoute les carreaux horizontaux, puis les verticaux, avec leur sens.

CORRIGÉ

Chasles. Le livreur passe par E. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{PM}$$

Carreaux. Vers la droite : $3 + 4 = 7$ carreaux. Verticalement : 5 vers le haut, puis 3 vers le bas, soit 2 vers le haut.

Conclusion. La somme s'écrit $\overrightarrow{PM}$: le marché est à 7 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de la pharmacie.

2.

Un second livreur part de la boulangerie B, à 1 carreau vers la droite et 3 vers le bas de P. Il fait le même déplacement que de P à M et arrive au point N.

Justifie que $PMNB$ est un parallélogramme.

INDICE

Début : traduis la phrase par une égalité de vecteurs.

Point délicat : vérifie que P, M et N ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Égalité. Le second livreur fait le même déplacement que de P à M : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{PM}$.

Position de N. Vers la droite : $1 + 7 = 8$ carreaux. Verticalement : 3 vers le bas, puis 2 vers le haut, soit 1 vers le bas. Le point N est donc à 8 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de P.

Non-alignement. De P à M : 7 carreaux vers la droite et 2 vers le haut ; de P à N : 8 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Leurs directions diffèrent : le point N est donc hors de la droite (PM). Ainsi, P, M et N ne sont pas alignés.

Conclusion. La propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » s'applique aux points P, M, N et B : $PMNB$ est un parallélogramme.

3.

Le premier livreur rentre directement du marché à la pharmacie. Que vaut $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP}$?

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec un vecteur et son opposé.

CORRIGÉ

Le livreur fait l'aller de P à M, puis le retour de M à P. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

Conclusion. La somme $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP}$ est le vecteur nul : le livreur est revenu à son point de départ.