BURHAN

Vecteurs et translation : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/vecteurs-et-translation/exercices/application

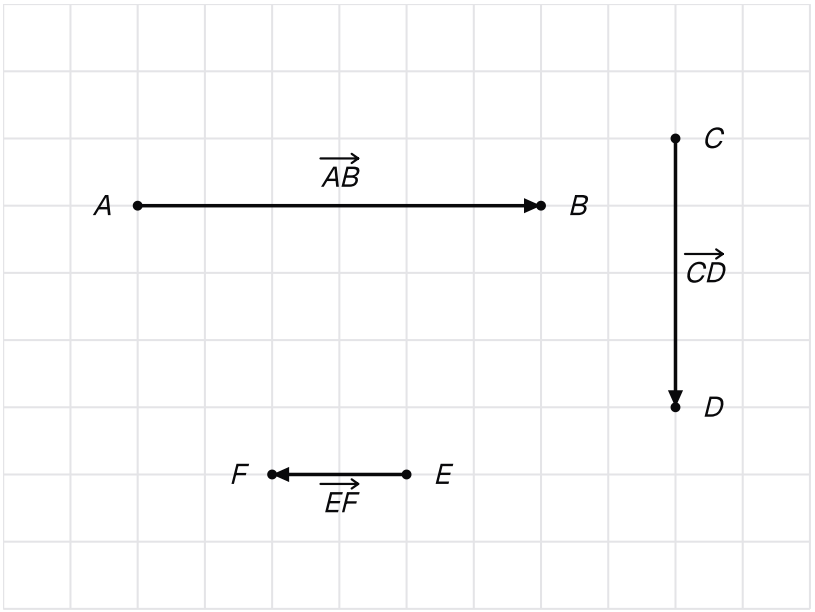
Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs et translation	Application	8

Exercice 1

Trois trajets d'une fourmi sur un carrelage

Une fourmi marche en ligne droite sur le carrelage d'une cuisine. Chaque carreau du sol sert de carreau de quadrillage. Reproduis la figure sur ton cahier.

- B est à 6 carreaux vers la droite de A.
- D est à 4 carreaux vers le bas de C.
- F est à 2 carreaux vers la gauche de E.



Le carrelage de la cuisine et les trois trajets de la fourmi : de A à B, de C à D et de E à F.

1.

Décris le vecteur $\overrightarrow{AB}$: sa direction, son sens et sa longueur.

INDICE

Outil : la direction est celle d'une droite, le sens va de l'origine vers l'extrémité, la longueur se compte en carreaux.

CORRIGÉ

Direction. C'est celle de la droite (AB), une ligne horizontale du quadrillage.

Sens. On va de A vers B, c'est-à-dire vers la droite.

Longueur. La longueur AB vaut 6 carreaux.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est horizontal, dirigé vers la droite, et sa longueur est de 6 carreaux.

2.

Décris de la même façon le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

INDICE

Outil : même méthode qu'à la question 1, avec une ligne verticale.

CORRIGÉ

Direction. C'est celle de la droite (CD), une ligne verticale du quadrillage.

Sens. On va de C vers D, c'est-à-dire vers le bas.

Longueur. La longueur CD vaut 4 carreaux.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est vertical, dirigé vers le bas, et sa longueur est de 4 carreaux.

3.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont-ils la même direction ? Le même sens ? Sont-ils égaux ?

INDICE

Point délicat : deux droites parallèles donnent la même direction ; il faut ensuite comparer les sens et les longueurs.

CORRIGÉ

Direction. Les droites (AB) et (EF) sont deux lignes horizontales du quadrillage : elles sont parallèles. Les deux vecteurs ont donc la même direction.

Sens. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ va vers la droite, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ vers la gauche : leurs sens sont contraires.

Longueur. La longueur AB vaut 6 carreaux, la longueur EF seulement 2.

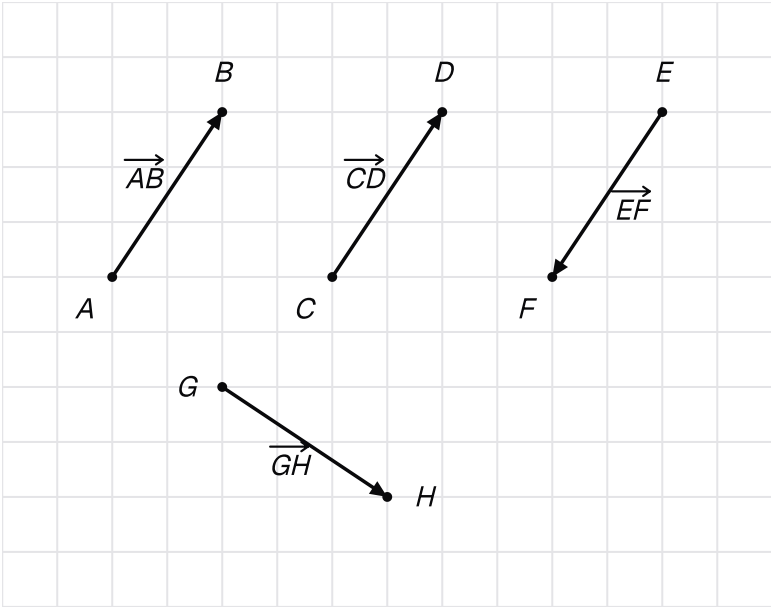
Conclusion. Même direction, mais ni le même sens ni la même longueur : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas égaux.

Exercice 2

Des flèches brodées sur un canevas

Salma brode des flèches sur une toile quadrillée. Chaque flèche représente un vecteur. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de A.
- D est à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de C.
- F est à 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas de E.
- H est à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de G.



Les quatre flèches brodées par Salma sur la toile : AB, CD, EF et GH.

1.

Parmi les flèches $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, laquelle représente le même vecteur que $\overrightarrow{AB}$? Justifie.

INDICE

Outil : deux vecteurs égaux décrivent le même déplacement.

CORRIGÉ

De C à D, on fait le même déplacement que de A à B : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Pour ces deux vecteurs, direction, sens et longueur coïncident.

Conclusion. La flèche $\overrightarrow{CD}$ représente le même vecteur que $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

2.

Quel vecteur est opposé à $\overrightarrow{AB}$? Écris l'égalité correspondante.

INDICE

Outil : deux vecteurs opposés ne diffèrent que par leur sens.

CORRIGÉ

De E à F, on fait le trajet inverse de celui de A à B : 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas.

La direction et la longueur restent les mêmes ; seul le sens est contraire. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est donc l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.

Conclusion. On écrit $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$.

3.

Les segments $[AB]$ et $[GH]$ ont la même longueur. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils égaux ?

INDICE

Point délicat : une même longueur ne suffit pas ; compare aussi les directions.

CORRIGÉ

Non. Une longueur commune ne suffit pas : il faut aussi comparer les directions.

Le déplacement de G à H est de 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. Ce n'est pas celui de A à B, et les droites (AB) et (GH) ne sont pas parallèles.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ n'ont pas la même direction. Ils ne sont donc pas égaux, malgré leur longueur commune.

Exercice 3

Lire un parallélogramme avec des vecteurs

1.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Quel vecteur d'origine D est égal à $\overrightarrow{AB}$?

INDICE

Outil : la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », en lisant les sommets dans l'ordre.

CORRIGÉ

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme. D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », on lit les sommets dans l'ordre : de A vers B, et de D vers C.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Conclusion. Le vecteur d'origine D égal à $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{DC}$.

2.

Soit $EFGH$ un parallélogramme. Nour écrit $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$. A-t-elle raison ?

INDICE

Point délicat : l'ordre des lettres compte ; $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont opposés.

CORRIGÉ

Non. La propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », appliquée au parallélogramme $EFGH$, donne :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

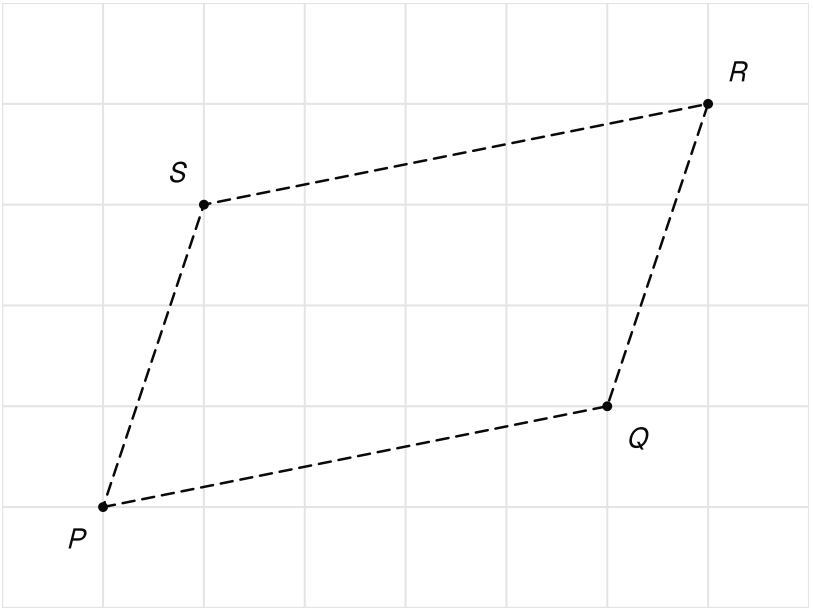
Or les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont des sens contraires : ils sont opposés.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{EF}$: Nour s'est trompée dans l'ordre des lettres.

3.

Sur un quadrillage, Q est à 5 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de P. Ensuite, R est à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de Q. Enfin, S est à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de P. Fais la figure sur ton cahier.

Le quadrilatère $PQRS$ est-il un parallélogramme ? Justifie.



Les quatre points P, Q, R et S placés sur le quadrillage, reliés dans l'ordre en pointillés.

INDICE

Début : compte le déplacement de S à R et compare-le à celui de P à Q.

Ensuite : vérifie que trois sommets ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Égalité. En partant de S, on atteint R par 5 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. C'est le déplacement de P à Q, donc :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

Non-alignement. De P à Q : 5 carreaux vers la droite et 1 vers le haut ; de P à R : 6 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. Leurs directions diffèrent : le point R est donc hors de la droite (PQ). Ainsi, P, Q et R ne sont pas alignés.

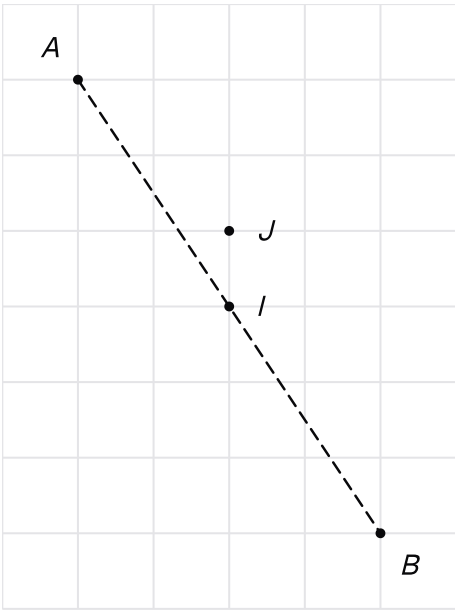
Conclusion. Les deux conditions de la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme » sont réunies : $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 4

Un rosier entre deux arbres

Sur le plan quadrillé d'un jardin, deux arbres sont plantés aux points A et B. Le jardinier veut planter un rosier au milieu de $[AB]$. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 4 carreaux vers la droite et 6 vers le bas de A.
- I est à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas de A.
- J est à 2 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de A.



Le plan du jardin : les arbres A et B, reliés par un segment, et les deux emplacements proposés I et J.

1.

Compare les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$. Le point I est-il le milieu de $[AB]$?

INDICE

Outil : la propriété « milieu d'un segment » : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

CORRIGÉ

Déplacements. De A à I : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas. De I à B : encore 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas.

Les deux déplacements sont les mêmes, donc :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

Conclusion. D'après la propriété « milieu d'un segment », I est le milieu de $[AB]$. Le jardinier plante le rosier en I.

2.

Même question pour le point J.

INDICE

Point délicat : compte avec soin le déplacement de J à B.

CORRIGÉ

Déplacements. De A à J : 2 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. De J à B : 2 carreaux vers la droite et 4 vers le bas.

Ces deux déplacements diffèrent : les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{JB}$ ne sont pas égaux.

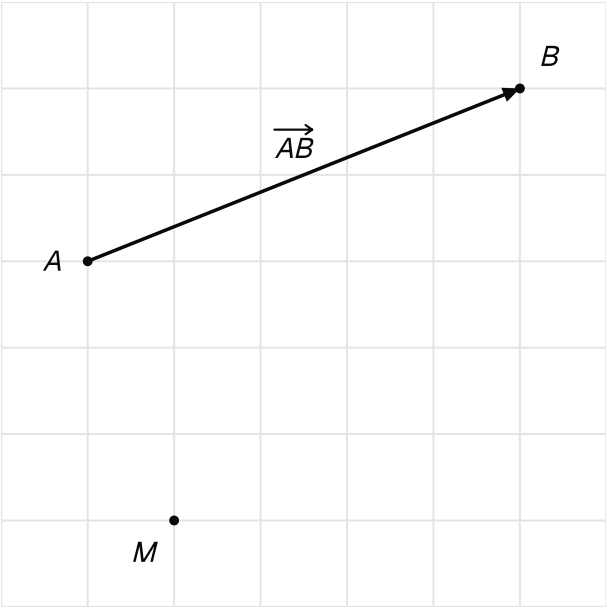
Conclusion. D'après la propriété « milieu d'un segment », J n'est pas le milieu de $[AB]$.

Exercice 5

Une plaque de bois qui glisse

Dans un atelier, une plaque de bois glisse sur une table quadrillée. Un coin de la plaque passe du point A au point B. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.
- M est à 1 carreau vers la droite et 3 vers le bas de A.



La table quadrillée : le coin de la plaque glisse de A à B, et le point M est placé sous A.

1.

Construis le point M', image de M par la translation qui transforme A en B. Décris sa position à partir de M.

INDICE

Outil : l'image M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$; refais le déplacement de A à B en partant de M.

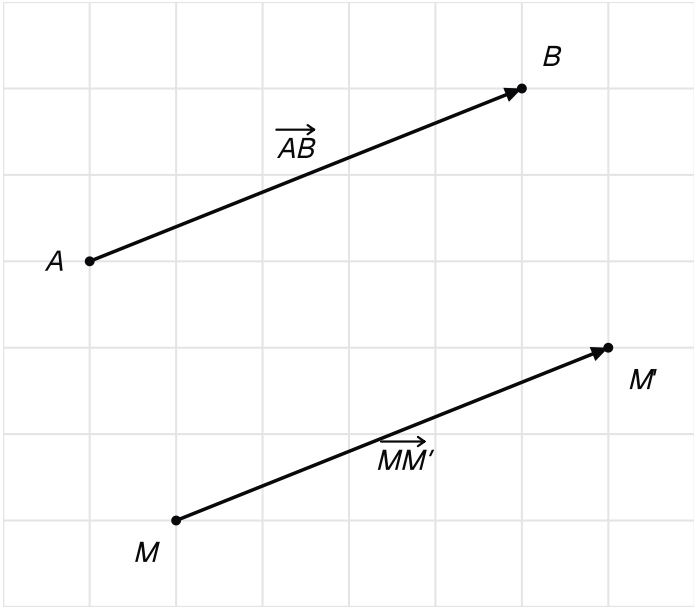
CORRIGÉ

Par définition, l'image M' de M par cette translation est le point tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

On part donc de M et l'on refait le déplacement de A à B.

Conclusion. Le point M' est à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de M.



Corrigé de la question 1 : en partant de M, le même déplacement que de A à B conduit à M'.

2.

Quelle est l'image du point A par cette translation ?

INDICE

Outil : relis la propriété « image d'un point par une translation ».

CORRIGÉ

L'image de A est le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}$. Le point B convient.

Conclusion. D'après la propriété « image d'un point par une translation », l'image de A est le point B.

3.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABM'M$? Justifie.

INDICE

Point délicat : cette propriété demande que M ne soit pas sur la droite (AB).

CORRIGÉ

Non-alignement. De A à B : 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut ; de A à M : 1 carreau vers la droite et 3 vers le bas. Leurs directions diffèrent : le point M est donc hors de la droite (AB).

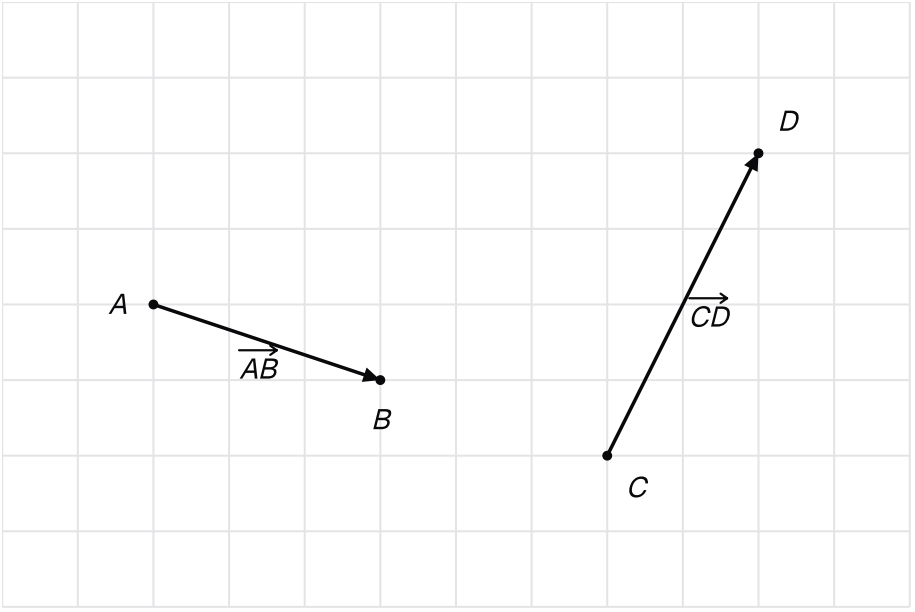
Conclusion. Comme M n'est pas sur (AB), la propriété « image d'un point par une translation » s'applique : $ABM'M$ est un parallélogramme.

Exercice 6

Deux déplacements d'un robot enchaînés

Sur le sol quadrillé d'une chambre, un robot aspirateur avance d'abord comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis comme le vecteur $\overrightarrow{CD}$. Fais la figure sur ton cahier.

- B est à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de A.
- D est à 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de C.



Les deux déplacements du robot aspirateur sur le sol quadrillé : le vecteur AB puis le vecteur CD.

1.

Construis le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. Décris la position de E à partir de A.

INDICE

Début : pars de B et fais le déplacement de C à D.

Ensuite : compte les carreaux de A à E.

CORRIGÉ

Construction. On part de B et l'on fait 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut, comme de C à D. On obtient le point E, avec $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.

Comptage. Vers la droite : $3 + 2 = 5$ carreaux. Verticalement : 1 vers le bas, puis 4 vers le haut, soit 3 vers le haut.

Conclusion. Au total, de A à E, on compte 5 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

2.

Écris la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ comme un seul vecteur.

INDICE

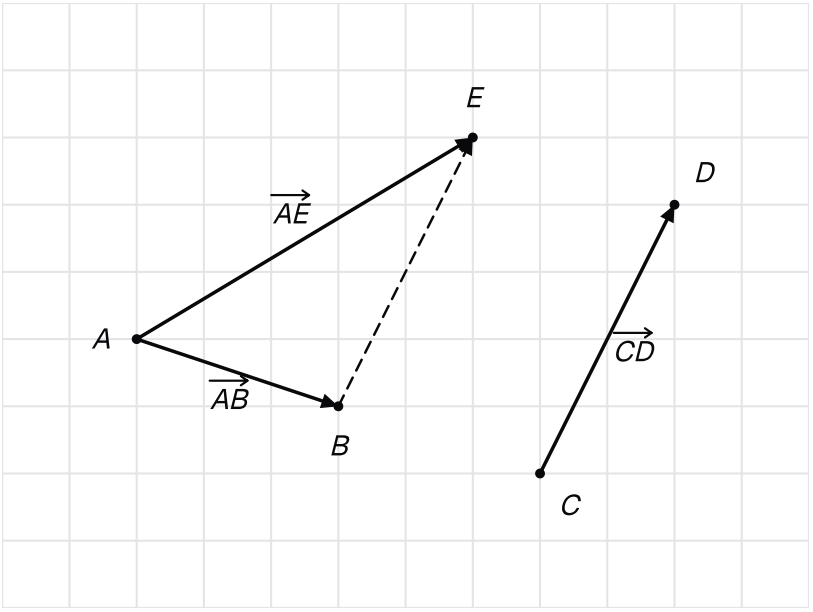
Outil : la définition de la somme de deux vecteurs.

CORRIGÉ

À la question 1, on a construit E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. D'après la définition de la somme de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$$

Conclusion. La somme s'écrit $\overrightarrow{AE}$: le robot arrive au même point que par le trajet direct de A à E.



Corrigé : le vecteur BE refait le déplacement de C à D, et le trajet direct de A à E est la somme.

Exercice 7

Les arrêts d'un bus

Un bus relie plusieurs arrêts, notés par des lettres. Chaque trajet en ligne droite est représenté par un vecteur.

1.

Le bus va de l'arrêt R à l'arrêt S, puis de S à l'arrêt T. Écris $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST}$ comme un seul vecteur.

INDICE

Outil : la relation de Chasles ; l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second.

CORRIGÉ

Le point S est l'extrémité de $\overrightarrow{RS}$ et l'origine de $\overrightarrow{ST}$. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$$

Conclusion. La somme s'écrit $\overrightarrow{RT}$: c'est le trajet direct de l'arrêt R à l'arrêt T.

2.

Le bus va de K à L, puis revient de L à K. Que vaut $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK}$?

INDICE

Point délicat : le résultat est un vecteur, pas un nombre.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KK}$.

Le vecteur $\overrightarrow{KK}$ est le vecteur nul. Le résultat est un vecteur, pas le nombre 0.

Conclusion. $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK} = \vec{0}$: le bus est revenu à son point de départ.

3.

Un arrêt N est ajouté sur le trajet de P à Q. Écris $\overrightarrow{PQ}$ comme la somme de deux vecteurs : le premier d'extrémité N, le second d'origine N.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, lue dans l'autre sens.

CORRIGÉ

Le trajet de P à Q fait étape en N. On lit la relation de Chasles dans l'autre sens :

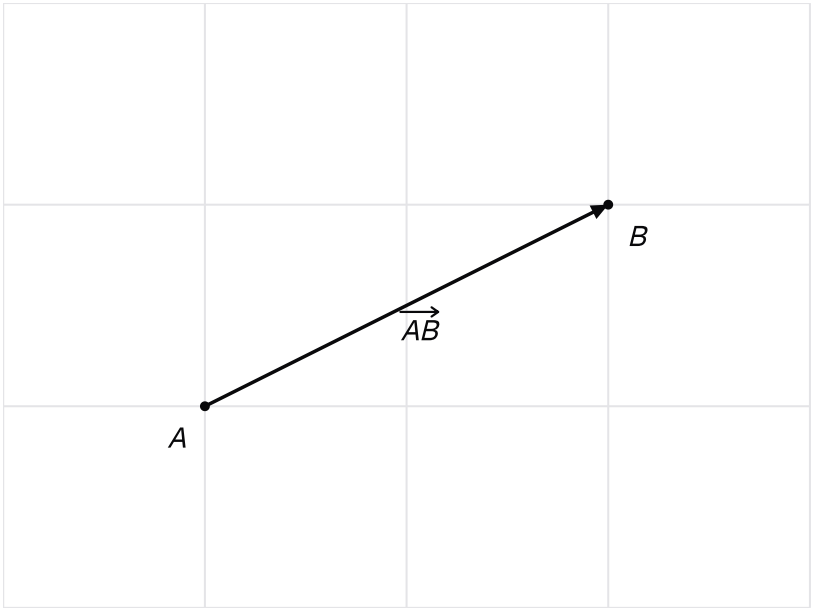
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ}$$

Conclusion. Le premier vecteur, $\overrightarrow{PN}$, a pour extrémité N ; le second, $\overrightarrow{NQ}$, a pour origine N.

Exercice 8

Une frise de carrelage

Un carreleur pose une frise : le même motif se répète en suivant le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Sur le quadrillage, B est à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de A. Fais la figure sur ton cahier.



Le motif de la frise se répète selon le vecteur AB, 2 carreaux à droite et 1 vers le haut.

1.

Écris $3\overrightarrow{AB}$ comme une somme de vecteurs.

INDICE

Outil : la définition des sommes de vecteurs égaux.

CORRIGÉ

D'après la définition des sommes de vecteurs égaux, $3\overrightarrow{AB}$ désigne la somme de trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$:

$$3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$$

Conclusion. Le motif de la frise suit trois fois de suite le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.

Place le point C tel que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Décris sa position à partir de A.

INDICE

Début : fais trois fois de suite le déplacement de A à B.

CORRIGÉ

D'après la question 1, on enchaîne trois fois le déplacement de A à B, qui est de 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Vers la droite : $2 + 2 + 2 = 6$ carreaux. Vers le haut : $1 + 1 + 1 = 3$ carreaux.

Conclusion. On obtient le point C, à 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de A.

3.

Place le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$. Décris sa position à partir de A.

INDICE

Point délicat : rappelle-toi le sens de $-\overrightarrow{AB}$.

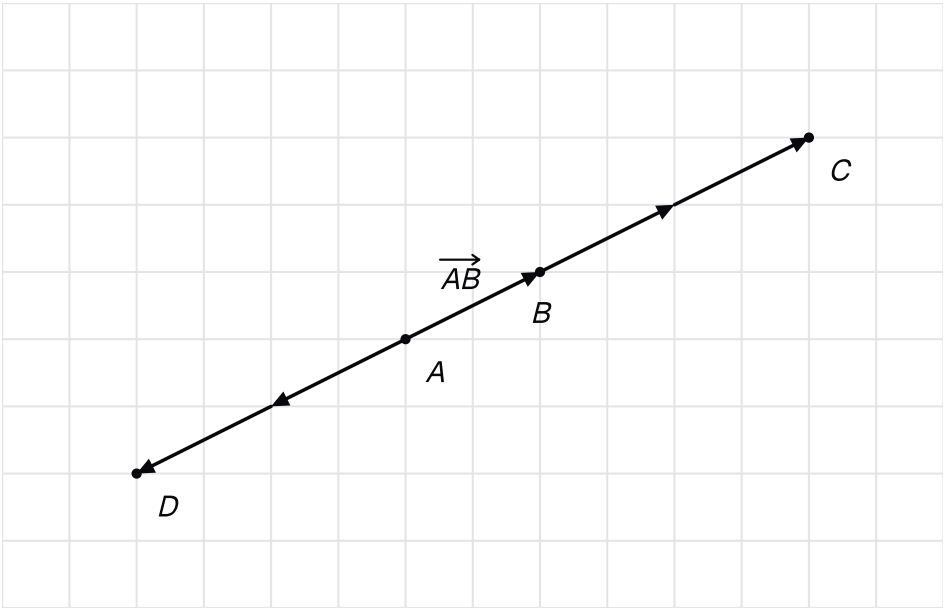
CORRIGÉ

Écriture. D'après la définition des sommes de vecteurs égaux :

$$-2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$$

Construction. Le déplacement de B à A est de 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas. On le fait deux fois, en partant de A : $2 + 2 = 4$ carreaux vers la gauche et $1 + 1 = 2$ vers le bas.

Conclusion. Le point D est à 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas de A.



Corrigé : C au bout de trois déplacements de A vers B, D au bout de deux déplacements de B vers A.