BURHAN

Vecteurs et translation

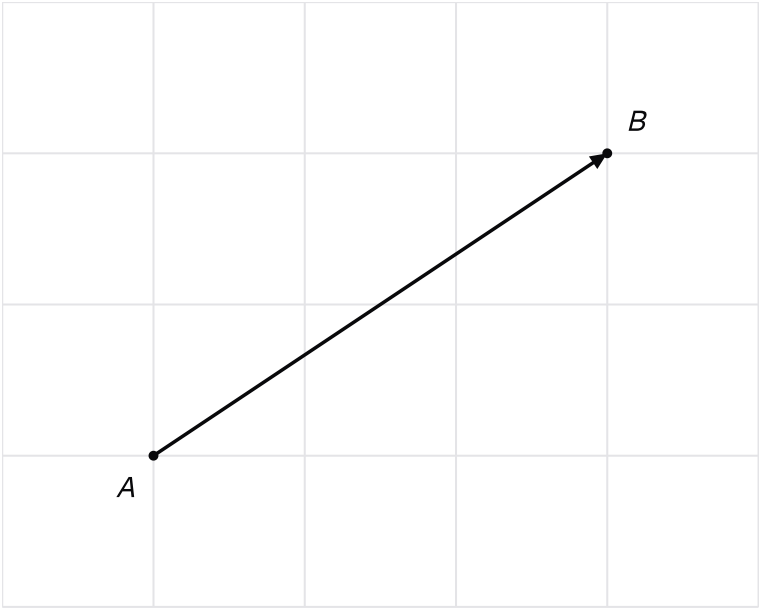
2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/vecteurs-et-translation/cours

Chapitre	Semestre
Vecteurs et translation	Semestre 2

Un déplacement, trois informations

Sur un plateau de jeu quadrillé, Salma fait glisser son pion. Le pion part du point A et arrive au point B à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A. Elle veut expliquer ce glissement à son frère, qui n'a pas vu le plateau.



Le glissement du pion de Salma sur le plateau, dessiné par une flèche qui part de A et pointe vers B.

Devine : Que faut-il dire ?

Pour que son frère refasse exactement le même glissement, que doit lui dire Salma ?

A. Seulement la longueur du trajet.

Faux.

Une longueur ne dit pas de quel côté partir.

B. Seulement le point d'arrivée.

Faux.

Depuis un autre point de départ, le même glissement mène ailleurs.

C. La direction, le sens et la longueur.

Juste.

Juste : ces trois informations décrivent le glissement.

D. La direction et la longueur.

Faux.

Sur une même droite, on peut aller dans deux sens : il manque le sens.

Correction

Il faut trois informations. La **direction** dit le long de quelle droite le pion glisse. Le **sens** dit vers où il va sur cette droite.

La **longueur** dit de combien il avance. Sur un quadrillage, la phrase « 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut » donne les trois à la fois.

Une cabine de téléphérique glisse le long de son câble. Une porte coulissante glisse le long de son rail. Chaque point de la cabine, ou de la porte, fait le même déplacement : même direction, même sens, même longueur.

Prends ton cahier à carreaux. Un **nœud** du quadrillage est un croisement de deux lignes. Place un point A sur un nœud.

Place ensuite B à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A. Trace une flèche de A vers B : elle représente le glissement du pion.

Dans ce chapitre, tu apprends à décrire un déplacement par un vecteur. Tu reconnais des vecteurs égaux, et tu les relies au parallélogramme.

Tu fais glisser des points par une translation. Tu apprends enfin à ajouter deux vecteurs.

Le vecteur : direction, sens, longueur

Décrire un déplacement

Rappel de 1re année : deux droites sont parallèles lorsqu'elles ne se coupent pas, ou lorsqu'elles sont confondues ; deux droites parallèles ont la même direction.

Devine : Deux trajets depuis le même point

Sur ton cahier, place A. Place B à 4 carreaux vers la droite de A, puis C à 4 carreaux vers la gauche de A. Les trajets de A à B et de A à C sont-ils le même déplacement ?

A. Oui : ils ont la même longueur.

Faux.

La longueur ne suffit pas : regarde vers où va chaque trajet.

B. Non : ils vont dans des sens contraires.

Juste.

Juste : l'un va vers la droite, l'autre vers la gauche.

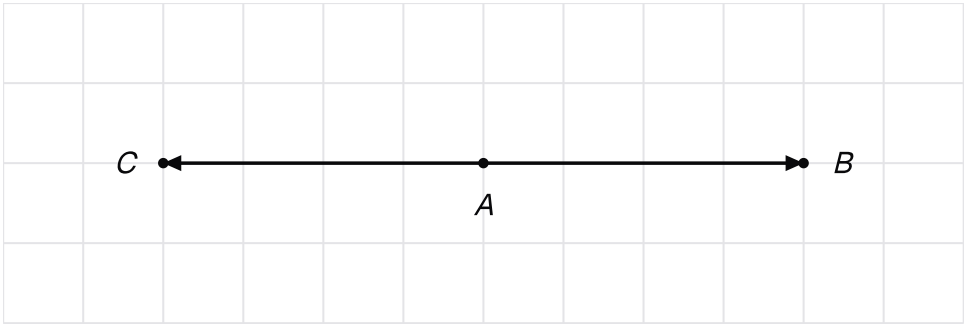
C. Non : ils n'ont pas la même direction.

Faux.
Les deux trajets suivent la même droite (BC) : la direction est la même.

D. Oui : ils partent du même point.
Faux.
Partir du même point ne suffit pas : les arrivées sont différentes.

Correction
Les deux trajets suivent la même droite : ils ont la même direction. Ils font tous deux 4 carreaux : ils ont la même longueur.

Mais l'un va vers la droite, l'autre vers la gauche. Leurs sens sont contraires : ce n'est pas le même déplacement.



Deux trajets partent de A sur la même ligne du quadrillage : l'un mène à B, l'autre à C.

Le vecteur

Définition : Vecteur

Soit A et B deux points distincts. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement qui mène de A à B. Il est défini par trois caractéristiques :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **longueur** : la longueur AB du segment $[AB]$.

Le point A est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le point B son **extrémité**. Deux droites parallèles ont la même direction.

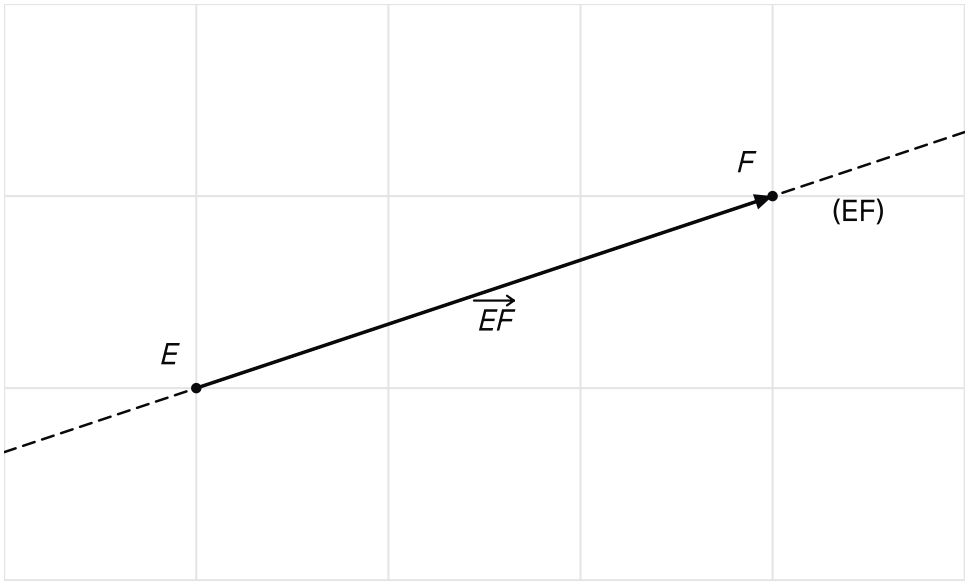
Exemple : décrire un vecteur sur un quadrillage

Sur ton cahier, place E, puis F à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de E.

- L'origine du vecteur $\overrightarrow{EF}$ est E ; son extrémité est F.

- Sa direction est celle de la droite (EF).
- Son sens est de E vers F.
- Sa longueur est la longueur EF.

Sur le quadrillage, « 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut » donne à la fois la direction, le sens et la longueur.



Le vecteur EF et la droite (EF) qui le porte : origine E, extrémité F, déplacement de 3 carreaux à droite et 1 vers le haut.

En clair. Un vecteur, c'est un déplacement. On le dessine par une flèche.

La flèche part de l'origine et pointe vers l'extrémité. Dans $\overrightarrow{EF}$, la première lettre est le départ, la seconde l'arrivée.

Vérifie : Lire un vecteur à l'envers

Sur un quadrillage, T est à 2 carreaux vers la droite de U. Quel déplacement décrit le vecteur $\overrightarrow{TU}$?

A. 2 carreaux vers la droite.
Faux.
C'est le déplacement de U à T : l'ordre des lettres est inversé.

B. 2 carreaux vers le haut.
Faux.
La direction a changé : le trajet suit une ligne horizontale.

C. 2 carreaux vers la gauche.
Juste.
Juste : on part de T et on revient vers U.

D. 4 carreaux vers la gauche.

Faux.

Le sens est bon, mais la longueur a doublé.

Correction

Le vecteur $\overrightarrow{TU}$ part de T et arrive en U. Or T est 2 carreaux vers la droite de U. Pour revenir de T à U, on fait donc 2 carreaux vers la gauche.

Méthode : décrire un vecteur

Méthode : décrire un vecteur

1. **Direction** : nomme la droite (AB) qui porte le vecteur $\overrightarrow{AB}$; toute droite parallèle à (AB) a la même direction.
2. **Sens** : dis de quel point tu pars et vers quel point tu vas.
3. **Longueur** : mesure le segment à la règle, ou compte les carreaux du déplacement sur un quadrillage.

Exemple : un vecteur le long du quadrillage

Sur ton cahier, place G, puis H à 5 carreaux vers le bas de G.

1. **Direction** : celle de la droite (GH), une ligne verticale du quadrillage.
2. **Sens** : de G vers H, donc vers le bas.
3. **Longueur** : le segment $[GH]$ suit le quadrillage ; sa longueur GH vaut 5 côtés de carreau.

Un piège, puis à toi

Attention : même longueur ne suffit pas

✗ « Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ ont la même longueur, donc ils décrivent le même déplacement. »

✓ Place K, puis L à 3 carreaux vers le haut de K et M à 3 carreaux vers la droite de K. Les longueurs KL et KM sont égales.

Pourtant, l'un des vecteurs monte, l'autre va vers la droite : les directions diffèrent. Vérifie toujours la direction, le sens et la longueur, une par une.

À toi : Décrire deux vecteurs

Sur ton cahier, place P, puis Q à 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas de P.

1. Décris le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
2. Décris le vecteur $\overrightarrow{QP}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise les trois caractéristiques : direction, sens, longueur.
Indice 2
Pour $\overrightarrow{QP}$, tu pars de Q et tu reviens en P.
Indice 3
Point délicat : compare une à une les trois caractéristiques des deux vecteurs. Laquelle change ?

Réponse
Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Son origine est P et son extrémité est Q. Sa direction est celle de la droite (PQ), et son sens va de P vers Q. Sa longueur est PQ : sur le quadrillage, il fait 2 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas.

Le vecteur $\overrightarrow{QP}$. Il garde la direction et la longueur de $\overrightarrow{PQ}$. Son sens va de Q vers P : il fait 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QP}$ ont la même direction et la même longueur. Seul leur sens diffère.

Vecteurs égaux, vecteur nul, vecteurs opposés

Le même déplacement

Devine : Trois flèches

Sur ton cahier, place A, C et E où tu veux. Place ensuite trois points :

- B à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de A ;
- D à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de C ;
- F à 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas de E.

Quels vecteurs décrivent le même déplacement que $\overrightarrow{AB}$?

A. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ seulement.
Juste.
Juste : même déplacement, à partir d'un autre point.

B. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ seulement.
Faux.
$\overrightarrow{EF}$ a la même direction et la même longueur, mais il va dans l'autre sens.

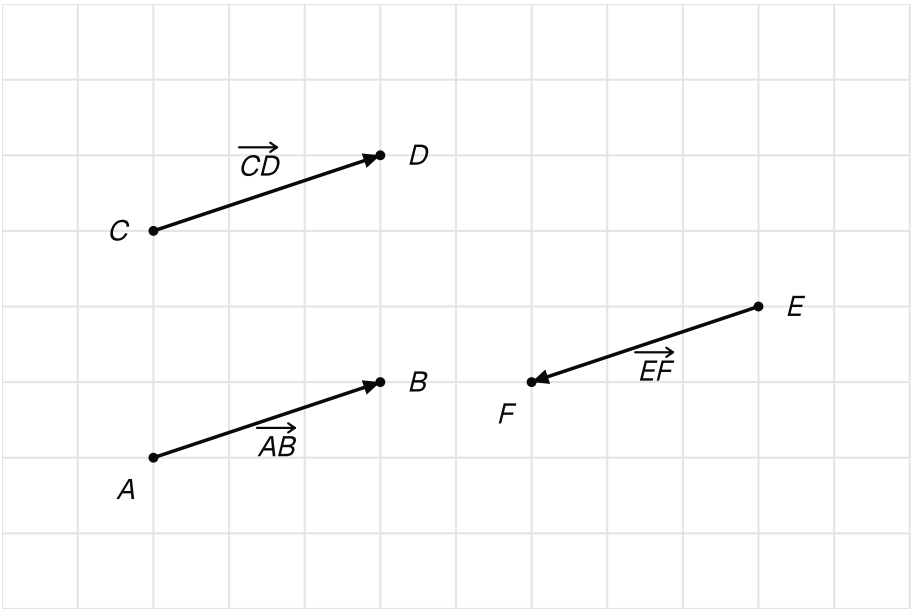
C. Les deux vecteurs.

Faux.
$\overrightarrow{EF}$ va vers la gauche et vers le bas : son sens est contraire.

D. Aucun des deux.

Faux.
$\overrightarrow{CD}$ refait exactement le déplacement de A à B.

Correction
De C à D, on fait 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut, comme de A à B : c'est le même déplacement. De E à F, on fait 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas. La direction et la longueur sont les mêmes, mais le sens est contraire.



Les trois flèches de l'activité : le vecteur AB, le vecteur CD et le vecteur EF, à comparer à AB.

En clair. Deux flèches qui font le même déplacement ont la même direction, le même sens et la même longueur. Elles peuvent partir de deux points différents. On dit alors que les vecteurs sont égaux.

Vecteurs égaux

Définition : Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

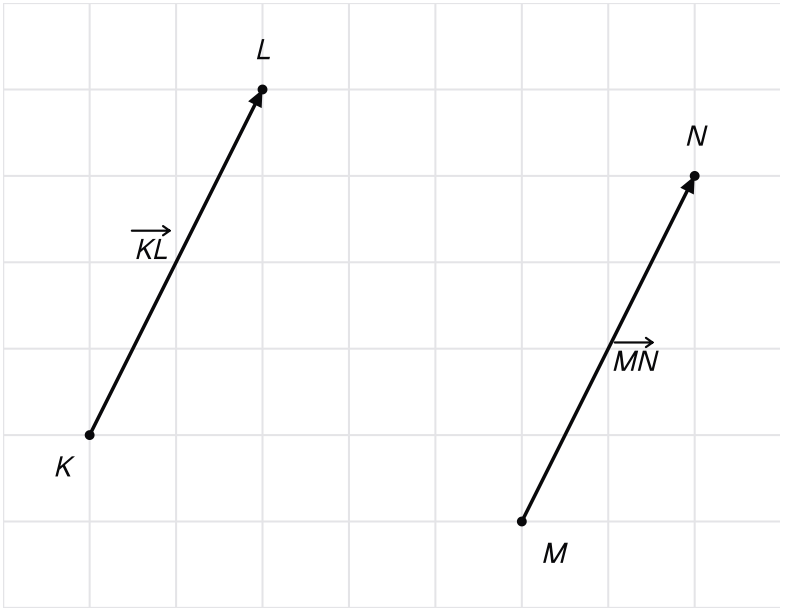
Deux vecteurs égaux décrivent le même déplacement, à partir de deux points de départ qui peuvent être différents.

Exemple : vecteurs égaux sur un quadrillage

Sur ton cahier, place K, puis :

- L à 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de K ;
- M à 5 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de K ;
- N à 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de M.

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ font le même déplacement. Ils ont donc la même direction, le même sens et la même longueur. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$.



Les vecteurs KL et MN font le même déplacement, 2 carreaux à droite et 4 vers le haut : ils sont égaux.

Vérifie : Égaux ou non ?

Sur ton cahier, place R, puis S à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de R. Place T à 4 carreaux vers la droite de R, puis U à 1 carreau vers la gauche et 3 vers le bas de T.

A-t-on $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$?

A. Oui : même direction, même sens, même longueur.

Faux.
Le sens n'est pas le même : $\overrightarrow{RS}$ monte, $\overrightarrow{TU}$ descend.

B. Oui : les deux segments ont la même longueur.

Faux.
La même longueur ne suffit pas : il faut aussi la même direction et le même sens.

C. Non : leurs sens sont contraires.

Juste.
Juste : $\overrightarrow{TU}$ fait le déplacement contraire de $\overrightarrow{RS}$.

D. Non : les points de départ sont différents.

Faux.

Deux vecteurs égaux peuvent partir de points différents.

Correction

De R à S, on fait 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut. De T à U, on fait 1 carreau vers la gauche et 3 vers le bas.

La direction et la longueur sont les mêmes, mais les sens sont contraires. Donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$ ne sont pas égaux.

Trouve l'erreur : Une égalité mal écrite

Yassine place A, puis B à 2 carreaux vers la droite de A, puis C à 2 carreaux vers la droite de B. Il écrit : « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ ». Que faut-il écrire ?

A. Il faut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Faux.

De A à C, on fait 4 carreaux : la longueur double.

B. Rien ne change : son égalité est juste.

Faux.

$\overrightarrow{CB}$ va vers la gauche, alors que $\overrightarrow{AB}$ va vers la droite.

C. Il faut écrire $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

Faux.

$\overrightarrow{BA}$ va vers la gauche et $\overrightarrow{BC}$ vers la droite : ils ne sont pas égaux.

D. Il faut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Juste.

Juste : de A à B, puis de B à C, on fait 2 carreaux vers la droite.

Correction

De A à B, on fait 2 carreaux vers la droite. De B à C aussi. L'égalité juste est donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ part de C et va vers la gauche : il n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur nul, les vecteurs opposés

En clair. Un pion qui ne bouge pas fait un déplacement nul : il part de A et reste en A. Un pion qui va de A à B, puis revient de B à A, fait deux déplacements contraires.

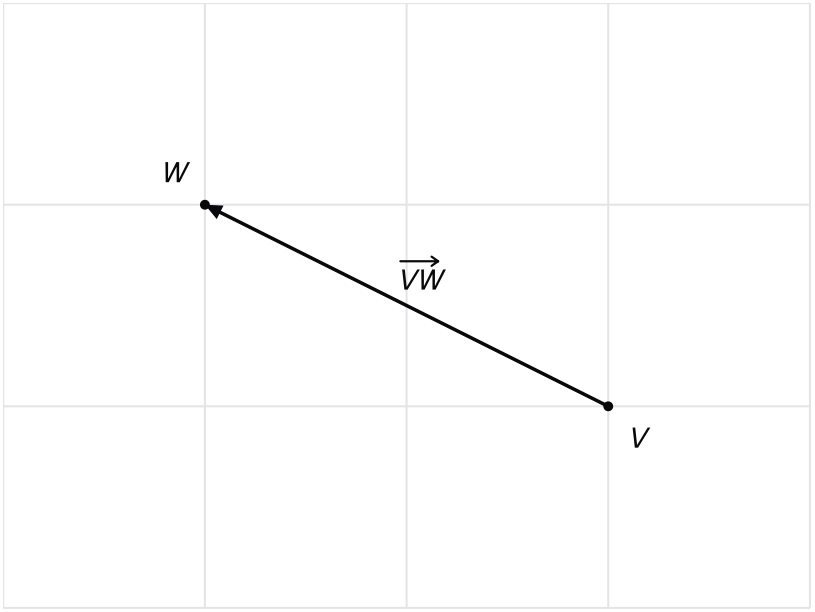
Définition : Vecteur nul et vecteurs opposés

- Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**. Sa longueur est 0. Il est noté $\vec{0}$: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- Deux vecteurs qui ont la même direction et la même longueur, mais des sens contraires, sont dits **opposés**. Par exemple, si A et B sont distincts, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

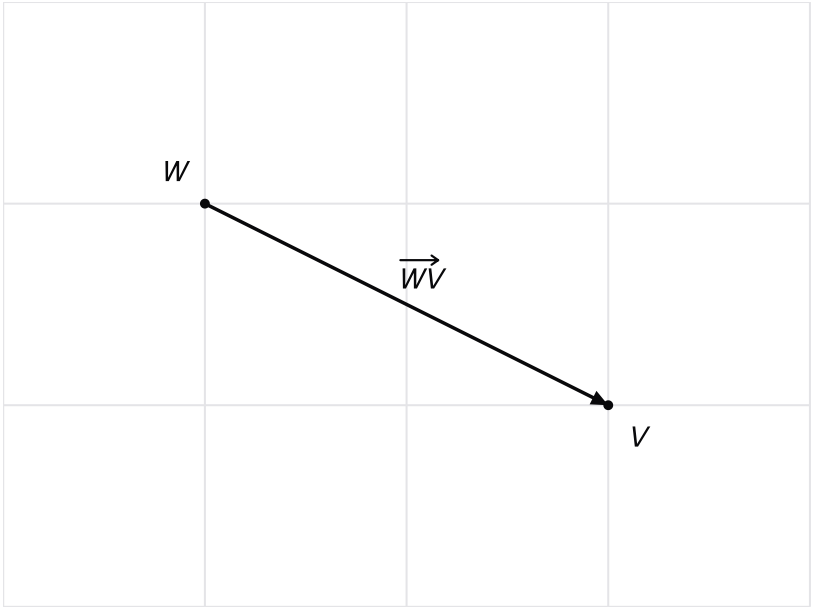
Exemple : deux vecteurs opposés

Sur ton cahier, place V, puis W à 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut de V. Le vecteur $\overrightarrow{VW}$ fait 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut.

Le vecteur $\overrightarrow{WV}$ fait le déplacement contraire : 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Ces deux vecteurs sont opposés. Enfin, $\overrightarrow{VV} = \vec{0}$: on reste sur place.



Premier temps : le vecteur VW, de V vers W, 2 carreaux à gauche et 1 vers le haut.



Second temps : sur les mêmes points, le vecteur WV pointe dans l'autre sens, de W vers V.

Vérifie : Le vecteur opposé

Sur un quadrillage, Q est à 4 carreaux vers le haut de P. Quel vecteur est opposé à $\overrightarrow{PQ}$?

A. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ lui-même.

Faux.

Un vecteur n'est pas son propre opposé : il a le même sens que lui-même.

B. Le vecteur $\overrightarrow{PP}$.

Faux.

$\overrightarrow{PP}$ est le vecteur nul : sa longueur est 0.

C. Le vecteur $\overrightarrow{QP}$.

Juste.

Juste : de Q à P, on fait 4 carreaux vers le bas.

D. Un vecteur de 4 carreaux vers le haut.

Faux.

Ce vecteur a le même sens : il est égal, pas opposé.

Correction

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ fait 4 carreaux vers le haut. Son opposé a la même direction et la même longueur, mais le sens contraire : c'est $\overrightarrow{QP}$, qui fait 4 carreaux vers le bas.

L'ordre des lettres, puis à toi

Attention : l'ordre des lettres compte

✗ « $\overrightarrow{VW} = \overrightarrow{WV}$, car ce sont les mêmes points. »

✓ Les deux vecteurs ont des sens contraires : ils sont opposés, pas égaux. Lis toujours la première lettre comme le départ, et la seconde comme l'arrivée.

À toi : Égal, opposé, nul

Sur ton cahier, place E. Place F à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de E. Place enfin G à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de F.

1. Écris une égalité de vecteurs.
2. Donne un vecteur opposé à $\overrightarrow{EF}$.
3. Écris autrement le vecteur $\overrightarrow{GG}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compare le déplacement de E à F et celui de F à G.
Indice 2
Un vecteur opposé à $\overrightarrow{EF}$ fait le déplacement contraire : pense à l'ordre des lettres.
Indice 3
Point délicat : que dessine un pion qui reste sur place en G ? Est-ce un nombre, ou un vecteur ?

Réponse
Une égalité. De E à F, et de F à G, on fait 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$.

Un vecteur opposé. Le vecteur $\overrightarrow{FE}$ refait le trajet en sens inverse : il fait 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. Le vecteur $\overrightarrow{GF}$ convient aussi.

Le vecteur $\overrightarrow{GG}$. Le pion part de G et reste en G : il ne bouge pas. Donc $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$, le vecteur nul.

Conclusion. On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$. Le vecteur $\overrightarrow{FE}$ est opposé à $\overrightarrow{EF}$, et $\overrightarrow{GG}$ s'écrit $\vec{0}$.

Vecteurs égaux et parallélogramme

Observer un parallélogramme

Rappel de 1re année : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Devine : Un vecteur égal

Sur ton cahier, place A, puis :

- B à 4 carreaux vers la droite de A ;

- D à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de A ;
- C à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de B.

Trace le quadrilatère $ABCD$: c'est un parallélogramme. Quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB}$?

A. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Faux.
$\overrightarrow{CD}$ va vers la gauche : son sens est contraire.

B. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$.

Juste.
Juste : de D à C, on fait 4 carreaux vers la droite.

C. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

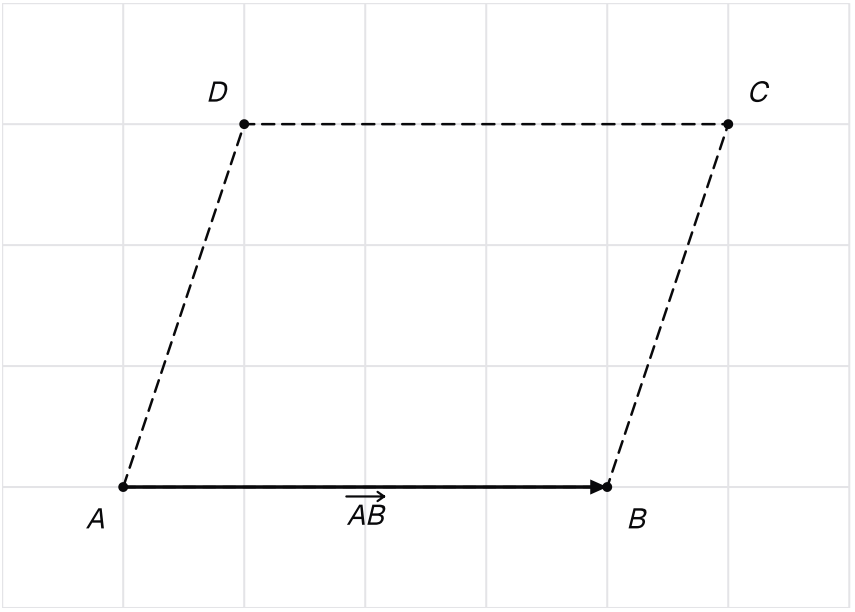
Faux.
$[AC]$ est une diagonale : ce n'est pas le même déplacement.

D. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Faux.
$[BC]$ est un côté voisin de $[AB]$: sa direction est différente.

Correction
De A à B, on fait 4 carreaux vers la droite. De D à C, on fait le même déplacement. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a le sens contraire : il ne convient pas.



Le quadrilatère ABCD de l'activité, tracé en pointillés, avec le seul vecteur AB dessiné.

Vecteurs égaux et parallélogramme

Propriété : Vecteurs égaux et parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points tels que A, B et C ne soient pas alignés.

- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Attention à l'ordre des lettres : on lit $A \to B$ et $D \to C$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'emploies dans tes justifications. Retiens l'ordre des lettres : on fait le tour A, B, C, D, et on compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

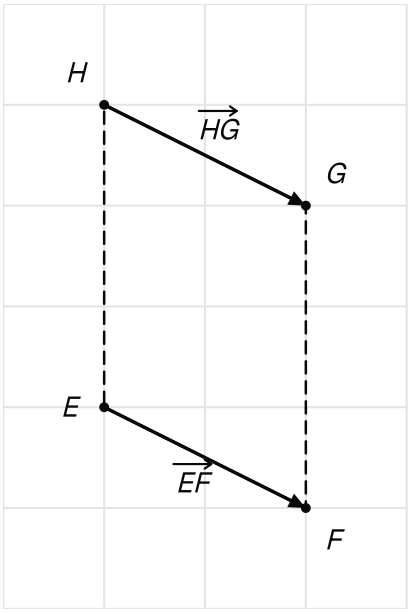
Exemple : Exemple d'emploi : reconnaître un parallélogramme

Sur ton cahier, place E, puis :

- F à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de E ;
- H à 3 carreaux vers le haut de E ;
- G à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de H.

Raisonnement :

- De E à F et de H à G, le déplacement est le même : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
- De E à F, on fait 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. De E à G, on fait 2 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points E, F et G ne sont pas alignés.
- D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $EFGH$ est un parallélogramme.



Le parallélogramme EFGH de l'exemple : les côtés opposés [EF] et [HG] portent deux vecteurs égaux, lus dans le même sens.

Vérifie : Une autre égalité

Reprends le parallélogramme $EFGH$ de l'exemple. Quelle autre égalité de vecteurs peux-tu lire sur ta figure ?

A. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GF}$

Faux.
$\overrightarrow{GF}$ descend, alors que $\overrightarrow{EH}$ monte.

B. $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{FG}$

Faux.
$\overrightarrow{HE}$ descend, alors que $\overrightarrow{FG}$ monte.

C. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

Juste.
Juste : de E à H, comme de F à G, on fait 3 carreaux vers le haut.

D. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF}$

Faux.
Ce sont les deux diagonales : elles ne font pas le même déplacement.

Correction
De E à H, on fait 3 carreaux vers le haut. De F à G aussi. Donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

Les côtés opposés $[EH]$ et $[FG]$ donnent deux vecteurs égaux, lus dans le même sens.

Les diagonales ; le parallélogramme aplati

Devine : Quatre points alignés

Sur une ligne du quadrillage, place K, puis :

- L à 2 carreaux vers la droite de K ;
- N à 4 carreaux vers la droite de K ;
- M à 6 carreaux vers la droite de K.

A-t-on $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$?

A. Non : quatre points alignés ne donnent jamais deux vecteurs égaux.

Faux.

Des points alignés peuvent donner deux vecteurs égaux : compare les déplacements.

B. Oui : les deux déplacements font 2 carreaux vers la droite.

Juste.

Juste : même direction, même sens, même longueur.

C. On ne peut pas savoir sans un vrai parallélogramme.

Faux.

La définition de l'égalité suffit : compare les déplacements.

Correction

De K à L, on fait 2 carreaux vers la droite. De N à M aussi. Donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

Regarde aussi les segments $[KM]$ et $[LN]$: ils ont le même milieu, le point à 3 carreaux vers la droite de K.

Propriété : Égalité de deux vecteurs et diagonales

Soit A, B, C et D quatre points. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Cette propriété reste vraie quand les quatre points sont alignés : on dit alors que $ABCD$ est un parallélogramme **aplati**.

Remarque : Un résultat admis

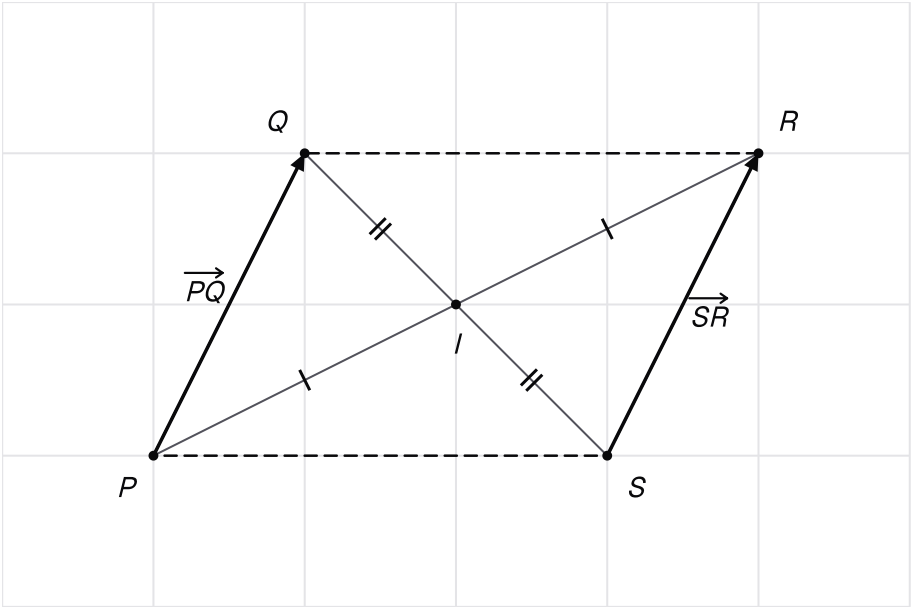
Ce résultat est admis. Il relie les vecteurs aux diagonales, que tu connais depuis la 1re année. Dans un parallélogramme aplati, les quatre sommets sont sur une même droite.

Exemple : Exemple d'emploi : des diagonales de même milieu

Sur ton cahier, place P, puis :

- R à 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de P ;
- I à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de P : c'est le milieu de $[PR]$;
- Q à 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut de P ;
- S à 3 carreaux vers la droite de P.

Le milieu de $[QS]$ est aussi I. D'après la propriété « égalité de deux vecteurs et diagonales », $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.



Dans PQRS, les diagonales [PR] et [QS] se coupent en leur milieu commun I, et les vecteurs PQ et SR sont égaux.

Méthode, devoir, à toi

Méthode : montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. **Nommer** le quadrilatère dans l'ordre de ses sommets, par exemple $ABCD$.
2. **Établir** l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, par les déplacements sur le quadrillage ou par une construction.
3. **Vérifier** que A, B et C ne sont pas alignés. Pour cela, compare les déplacements de A à B et de A à C : ils ne doivent pas avoir la même direction. Sans quadrillage, pose ta règle sur A et B : le point C ne doit pas être sur la règle.
4. **Conclure** en citant la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme ».

Remarque : Coin devoir : justifier un parallélogramme

En devoir, la question « Montre que $ABCD$ est un parallélogramme » se rédige en trois temps. Sur la figure de l'activité « Un vecteur égal », chaque déplacement est redonné ci-dessous.

Rédaction modèle, avec un barème indicatif sur 4 points :

1. (2 points) De A à B, on fait 4 carreaux vers la droite, et de D à C aussi. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. (1 point) De A à B, on fait 4 carreaux vers la droite. De A à C, on fait 5 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. (1 point) D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $ABCD$ est un parallélogramme.

À toi : Un parallélogramme à justifier

Sur ton cahier, place R, puis :

- S à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de R ;
- U à 1 carreau vers la gauche et 3 vers le haut de R ;
- T à 1 carreau vers la gauche et 3 vers le haut de S.

Montre que $RSTU$ est un parallélogramme.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : nommer, établir une égalité de vecteurs, vérifier, conclure.
Indice 2
Compare le déplacement de R à S et celui de U à T.
Indice 3
Point délicat : dans quel ordre lis-tu les lettres du côté opposé à $[RS]$? Et comment vérifies-tu que R, S et T ne sont pas alignés ?

Réponse
Nommer. On fait le tour du quadrilatère dans l'ordre R, S, T, U.

Égalité de vecteurs. De R à S, on fait 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. De U à T, on compte aussi 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. Donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$.

Trois sommets non alignés. De R à S, on fait 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. De R à T, on fait 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points R, S et T ne sont pas alignés.

Conclusion. D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $RSTU$ est un parallélogramme.

Construire un point ; le milieu d'un segment

Construire un point

Devine : Combien de points ?

Sur ton cahier, place A, puis B à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas de A. Place un point M ailleurs. Combien de points N vérifient $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$?

A. Aucun, car M n'est pas sur la droite (AB).

Faux.

Le point de départ peut être n'importe où : on refait le déplacement depuis M.

B. Un seul.

Juste.

Juste : depuis M, un seul point est atteint par ce déplacement.

C. Deux, un de chaque côté de M.

Faux.

Un seul des deux va dans le bon sens.

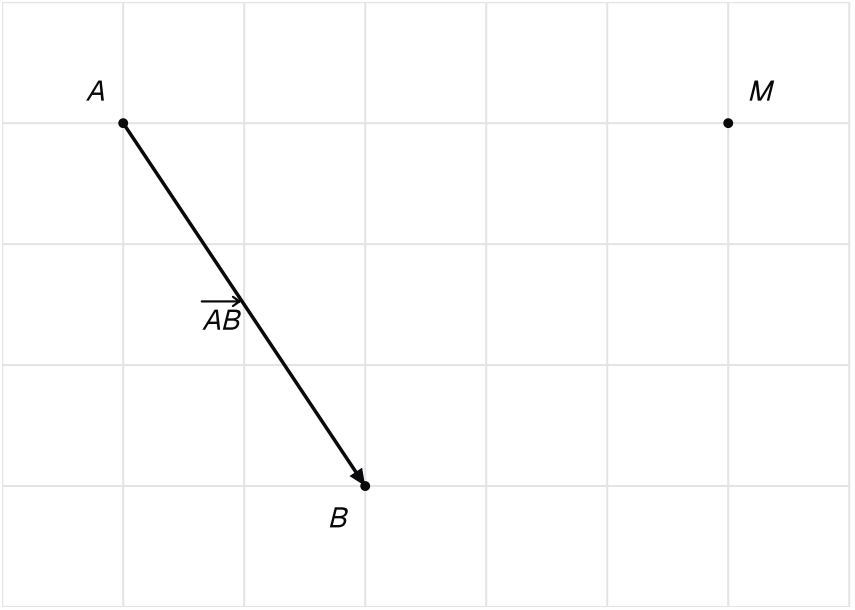
D. Une infinité, à la bonne distance de M.

Faux.

À cette distance, un seul point a la bonne direction et le bon sens.

Correction

On part de M et on refait le déplacement de A à B : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas. On arrive à un seul point. Les autres points à la même distance de M n'ont pas la bonne direction, ou pas le bon sens.



Les données de l'activité : le vecteur AB, 2 carreaux à droite et 3 vers le bas, et un point M choisi ailleurs.

En clair. Pour construire N, tu pars de M et tu refais le déplacement de A à B. Sur un quadrillage, tu comptes les mêmes carreaux.

Sans quadrillage, tu traces la parallèle à (AB) qui passe par M. Puis tu reportes la longueur AB au compas, dans le bon sens.

Un seul point

Propriété : Construire un point à partir d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et M un point. Il existe **un seul** point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Pour le construire, on part de M et on fait le même déplacement que de A à B : même direction, même sens, même longueur.

Remarque : Un résultat admis

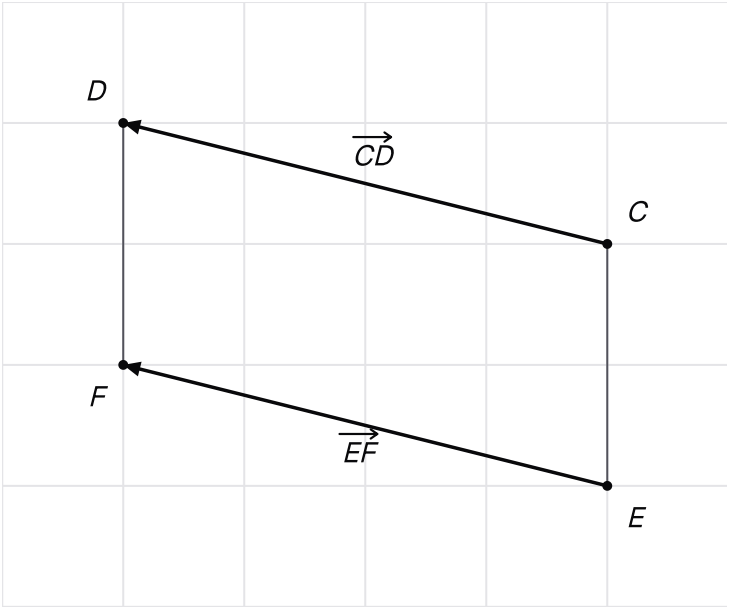
Ce résultat est admis. Il garantit que la construction donne toujours un point, et un seul.

Exemple : Exemple d'emploi : construire un point

Sur ton cahier, place C, puis :

- D à 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut de C ;
- E à 2 carreaux vers le bas de C.

Pour construire F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$, pars de E et fais 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut. D'après la propriété « construire un point à partir d'un vecteur », F est le seul point qui convient. Contrôle : F est à 4 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas de C.



Pour construire F, on part de E et l'on refait le déplacement de C à D : le vecteur EF est égal au vecteur CD.

Le milieu d'un segment

Rappel de 1re année : le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à la même distance de ses deux extrémités.

Devine : Du milieu à l'extrémité

Sur ton cahier, place G, puis H à 6 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de G. Le point I est à 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de G. Quel déplacement mène de I à H ?

A. 3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas.

Faux.

C'est le déplacement de I à G : le sens est contraire.

B. 6 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Faux.

C'est le déplacement de G à H, deux fois trop long.

C. 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Faux.

Recompte les carreaux verticaux : il en reste un seul.

D. 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Juste.

Juste : c'est le même déplacement que de G à I.

Correction

De G à H, on fait 6 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. De G à I, on en fait la moitié : 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. Il reste 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de I à H.

> Les déplacements de G à I et de I à H sont les mêmes : I est le milieu de $[GH]$.

Milieu et vecteurs

Propriété : Milieu d'un segment

Soit A et B deux points distincts et I un point. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Remarque : Un résultat admis

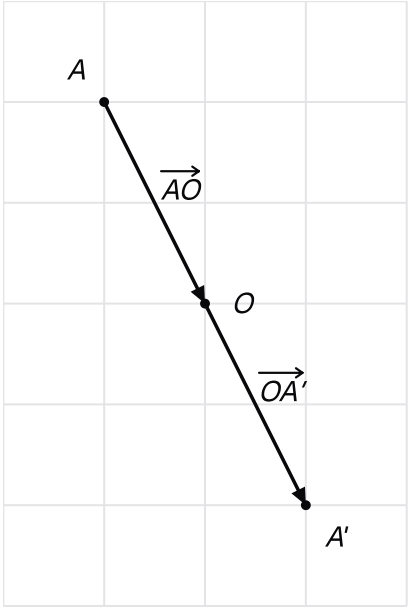
Ce résultat est admis. Il se lit dans les deux sens. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; et si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu de $[AB]$.

Rappel de 1re année : le symétrique de A par rapport à O est le point A' tel que O soit le milieu de $[AA']$.

Exemple : Exemple d'emploi : le symétrique d'un point

Sur ton cahier, place O, puis A à 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut de O. D'après la propriété « milieu d'un segment », O est le milieu de $[AA']$ lorsque $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$.

Pars donc de O et refais le déplacement de A à O : 1 carreau vers la droite et 2 vers le bas. Tu obtiens A'.



Le symétrique A' de A par rapport à O : deux flèches identiques se suivent, de A vers O puis de O vers A'.

À toi : Deux constructions

Sur ton cahier, place K, puis :

- L à 4 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de K ;
- J à 1 carreau vers la droite de K.

1. Construis le point M tel que $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{KL}$.
2. Construis le symétrique L' de L par rapport à K.

Situe chaque point à partir de K.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour M, pars de J et refais le déplacement de K à L.
Indice 2
Pour L', le point K doit être le milieu de $[LL']$: $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KL'}$.
Indice 3
Point délicat : pour L', quel déplacement refais-tu à partir de K : celui de K à L, ou celui de L à K ?

Réponse
Le point M. On cherche M tel que $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{KL}$, avec la propriété « construire un point à partir d'un vecteur ». Pour cela, on part de J et on fait 4 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. Donc le point M est à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de K.

Le point L'. D'après la propriété « milieu d'un segment », K est le milieu de $[LL']$ lorsque $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KL'}$. De L à K, on fait 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. On refait ce trajet à partir de K.

Conclusion. Le point M est à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de K. Le symétrique L' est à 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut de K.

La translation qui transforme A en B

Faire glisser plusieurs points

Une porte coulissante glisse le long de son rail. Sa poignée, son coin du haut et son coin du bas font tous le même déplacement.

Devine : Où arrive le coin ?

Sur ton cahier, place A, puis B à 5 carreaux vers la droite de A : la porte glisse comme de A à B. Un coin de la porte est au point M à 2 carreaux vers le haut de A.

Où arrive ce coin ?

A. En B, comme le point A.

Faux.

Seul le point A arrive en B : chaque point a sa propre arrivée.

B. À 5 carreaux vers la gauche de M.

Faux.

Le sens est contraire : la porte glisse vers la droite.

C. À 5 carreaux vers la droite de M.

Juste.

Juste : le coin fait le même déplacement que A.

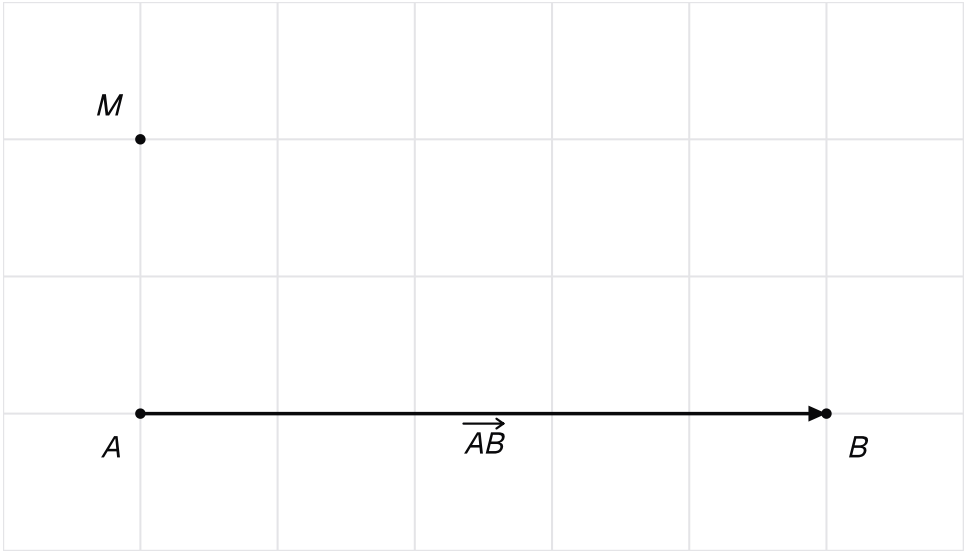
D. À 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de M.

Faux.

Le glissement est horizontal : le coin ne monte pas.

Correction

Sur un quadrillage, chaque point de la porte avance du même nombre de carreaux, dans le même sens. Tous font le déplacement de A à B : 5 carreaux vers la droite. Le coin M arrive donc à 5 carreaux vers la droite de M.



La porte glisse comme de A à B, 5 carreaux vers la droite ; le coin M est 2 carreaux au-dessus de A.

La translation qui transforme A en B

Définition : Translation qui transforme A en B

Soit A et B deux points distincts. La **translation qui transforme A en B** fait glisser tous les points du plan de la même façon : dans la direction de la droite (AB), dans le sens de A vers B, et d'une longueur égale à AB.

Soit M un point. Son **image** par cette translation est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

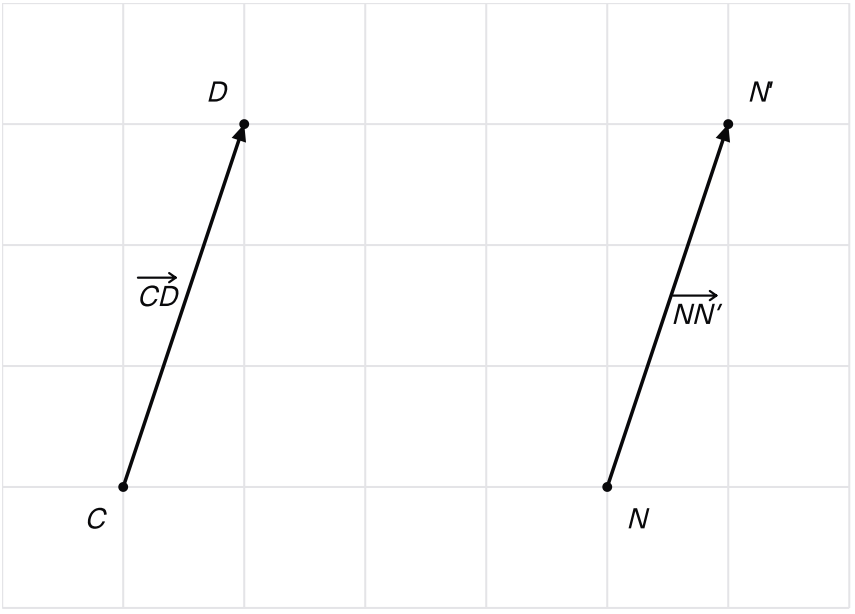
En clair. La translation qui transforme A en B fait faire à chaque point le déplacement de A à B. Le point M' se lit « M prime ». C'est le point où M arrive après le glissement.

Exemple : l'image d'un point

Sur ton cahier, place C, puis :

- D à 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut de C ;
- N à 4 carreaux vers la droite de C.

Par la translation qui transforme C en D, l'image de N est le point N' tel que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{CD}$. Pars de N et fais 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut. Le point N' est à 5 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de C.



Par la translation qui transforme C en D, N arrive en N' : le vecteur NN' refait le déplacement de C à D.

Image et parallélogramme

Devine : La nature d'un quadrilatère

Reprends l'exemple et trace le quadrilatère $CDN'N$. Quelle est sa nature ?

A. Un rectangle.

Faux.
L'angle en C n'est pas droit : le côté $[CD]$ n'est pas vertical.

B. Un parallélogramme.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{NN'}$, lus dans l'ordre du tour.

C. Un quadrilatère quelconque.

Faux.

Deux côtés opposés font le même déplacement : ce n'est pas un quadrilatère quelconque.

D. Un triangle, car trois points sont alignés.

Faux.

C, D et N ne sont pas alignés.

Correction

On fait le tour C, D, N', N. Par définition de l'image, $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{CD}$.

De C à D, on fait 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut. De C à N', on fait 5 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points C, D et N' ne sont pas alignés.

D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $CDN'N$ est un parallélogramme.

Propriété : Image d'un point par une translation

Soit A et B deux points distincts, M un point et M' son image par la translation qui transforme A en B.

- L'image du point A est le point B.
- Si M n'est pas sur la droite (AB), alors $ABM'M$ est un parallélogramme.
- Si M est sur la droite (AB), alors son image M' est aussi sur la droite (AB).

Remarque : Un résultat admis

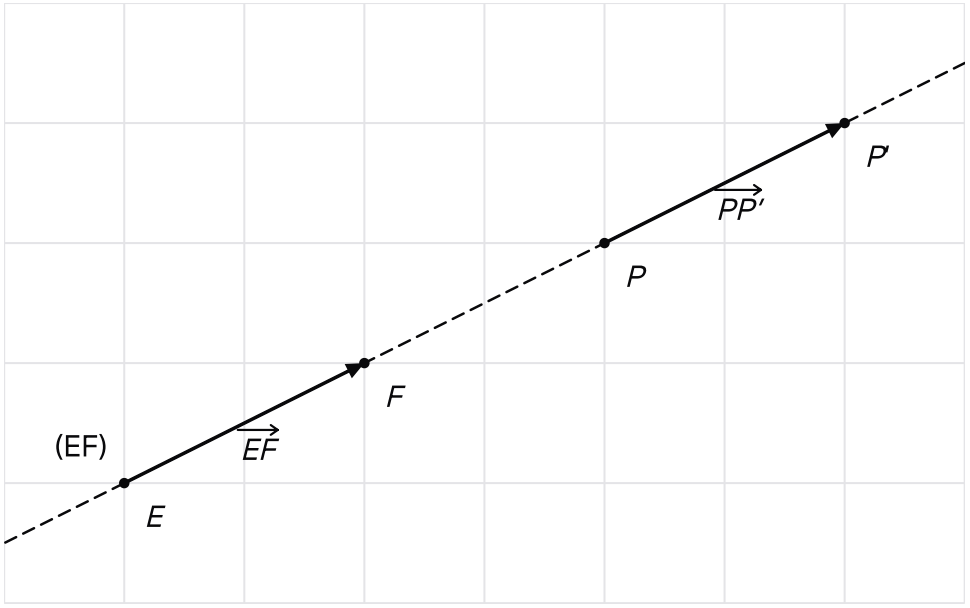
Ce résultat est admis. Attention à l'ordre des sommets : le parallélogramme s'écrit $ABM'M$, et non $ABMM'$.

Exemple : Exemple d'emploi : un point de la droite (EF)

Sur ton cahier, place E, puis F à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de E. Place P à 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de E. De E à P, on fait deux fois le déplacement de E à F : le point P est sur la droite (EF).

Par la translation qui transforme E en F, l'image de E est F. L'image P' de P est à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de P. Donc P' est à 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de E.

D'après la propriété « image d'un point par une translation », P' est aussi sur la droite (EF).



Un point P de la droite (EF) a son image P' sur cette même droite : le parallélogramme est aplati.

Méthode, devoir, à toi

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Repérer** le déplacement de A à B : direction, sens et longueur, ou les carreaux sur un quadrillage.
2. **Refaire** ce déplacement à partir de M : on obtient M'.
3. **Contrôler** : si M n'est pas sur la droite (AB), le quadrilatère $ABM'M$ doit être un parallélogramme.

Remarque : Coin devoir : construire et justifier une image

En devoir, on te donne A, B et un point M hors de la droite (AB). La question « Construis l'image M' de M, puis donne la nature de $ABM'M$ » porte sur la translation qui transforme A en B.

Rédaction modèle, avec un barème indicatif sur 3 points :

1. (1 point) On part de M et on refait le déplacement de A à B : on obtient M'. Par définition de l'image, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
2. (1 point) Les déplacements de A à B et de A à M n'ont pas la même direction. Donc le point M n'est pas sur la droite (AB).

3. (1 point) D'après la propriété « image d'un point par une translation », $ABM'M$ est un parallélogramme.

Trouve l'erreur : Le glissement de Leïla

Sur le quadrillage de Leïla, B est à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de A. Elle construit l'image M' de M par la translation qui transforme A en B.

Elle place M' à 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut de M. Quelle est son erreur ?

A. Elle a fait le déplacement de B à A.

Juste.

Juste : elle a inversé le sens.

B. Elle aurait dû partir de A, et non de M.

Faux.

On part bien de M : c'est lui qui glisse.

C. Elle aurait dû faire 2 carreaux vers la droite et 3 vers le bas.

Faux.

Les nombres de carreaux étaient bons : 3 en largeur, 2 en hauteur.

D. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

M' doit être à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de M.

Correction

De A à B, on fait 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas. Leïla a fait 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut : c'est le déplacement de B à A. Le bon point M' est à 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de M.

À toi : Deux images

Sur ton cahier, place R, puis :

- S à 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut de R ;
- T à 3 carreaux vers la droite de R ;
- U à 2 carreaux vers la gauche et 4 vers le haut de R.

On considère la translation qui transforme R en S.

1. Construis les images T' et U' de T et de U.
2. Quelle est la nature de $RST'T$?
3. Où se trouve U' ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque point, refais le déplacement de R à S.
Indice 2
T' est à 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut de T ; fais de même à partir de U.
Indice 3
Point délicat : où est U par rapport à la droite (RS) ? Quelle partie de la propriété sur l'image d'un point faut-il alors employer ?

Réponse
Les images. Le point T' est à 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut de T. Il est donc à 2 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de R. De même, le point U' est à 3 carreaux vers la gauche et 6 vers le haut de R.

Nature de $RST'T$. De R à S, on fait 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut. De R à T, on fait 3 carreaux vers la droite. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points R, S et T ne sont pas alignés.

D'après la propriété « image d'un point par une translation », $RST'T$ est un parallélogramme.

Position de U'. De R à U, on fait deux fois le déplacement de R à S : le point U est sur la droite (RS). D'après la même propriété, U' est aussi sur la droite (RS). Le quadrilatère $RSU'U$ est alors un parallélogramme aplati.

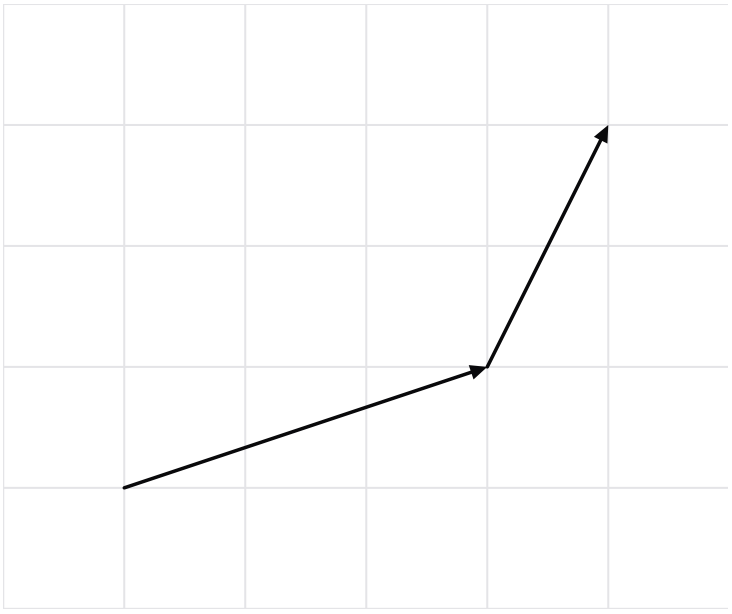
Conclusion. Le quadrilatère $RST'T$ est un parallélogramme, et l'image U' se trouve sur la droite (RS).

Somme de deux vecteurs ; relation de Chasles

Deux déplacements enchaînés

Dans un jeu de plateau, ton pion fait deux glissements de suite. D'abord 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. Puis 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut.

Il aurait pu arriver au même endroit en un seul glissement.



Les deux glissements successifs du pion : une première flèche, puis une seconde qui part du point d'arrivée de la première.

Devine : Un seul glissement

Quel seul glissement mène le pion au même endroit ?

A. 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Faux.

Ajoute les carreaux vers la droite des deux glissements : 3 et 1.

B. 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas.

Faux.

Les deux glissements vont vers la droite et vers le haut : on ne soustrait rien.

C. 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Juste.

Juste : 3 + 1 carreaux vers la droite, 1 + 2 vers le haut.

D. 7 carreaux en tout, dans n'importe quel sens.

Faux.

Un glissement a une direction et un sens : compter les carreaux ne suffit pas.

Correction

Vers la droite, le pion fait $3 + 1 = 4$ carreaux. Vers le haut, il fait $1 + 2 = 3$ carreaux. Le glissement unique est donc 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Enchaîner deux déplacements, c'est les ajouter : c'est la définition qui suit.

Somme de deux vecteurs

Définition : Somme de deux vecteurs

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. On construit le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. La **somme** des deux vecteurs est le vecteur $\overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}.$$

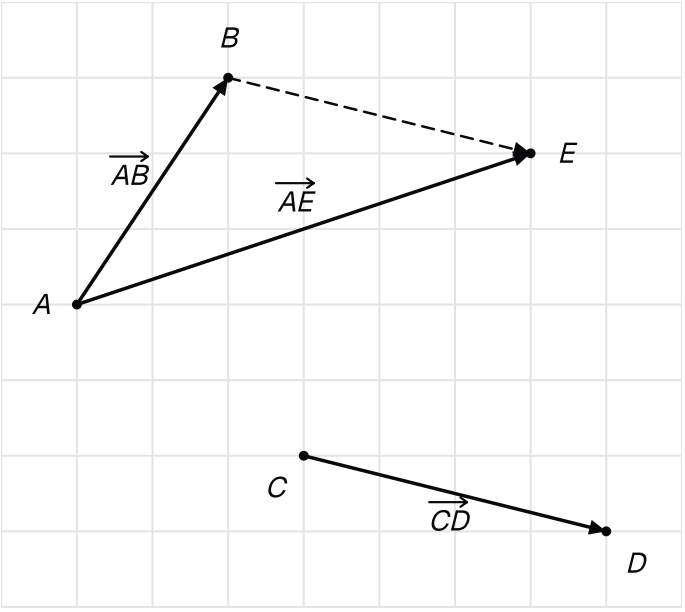
On enchaîne les deux déplacements : d'abord de A à B, puis de B à E.

Exemple : construire une somme bout à bout

Sur ton cahier, place A, puis B à 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de A. Place C ailleurs, puis D à 4 carreaux vers la droite et 1 vers le bas de C.

Pour la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, on place les vecteurs **bout à bout** : le second commence là où finit le premier. Pars donc de B et refais le déplacement de C à D : tu obtiens E.

Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$. Le point E est à 6 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A. Une méthode pour construire une somme t'attend à la section suivante.



La somme bout à bout : après le vecteur AB, le vecteur BE refait le déplacement de C à D, et AE est la somme.

Vérifie : Lire une somme

Sur un quadrillage, Q est à 3 carreaux vers la droite de P. Le point S est à 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut de R. Quel déplacement fait la somme $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$?

A. 6 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.
Faux.

Le second vecteur va vers la gauche : ses carreaux ne s'ajoutent pas à ceux de $\overrightarrow{PQ}$.

B. 2 carreaux vers le haut.

Juste.

Juste : vers la droite puis vers la gauche, les 3 carreaux se compensent.

C. Aucun : la somme est le vecteur $\vec{0}$.

Faux.

Les carreaux horizontaux se compensent, mais il reste les 2 carreaux vers le haut.

D. 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut.

Faux.

C'est le déplacement de $\overrightarrow{RS}$ seul : il manque celui de $\overrightarrow{PQ}$.

Correction

On enchaîne les deux déplacements : d'abord 3 carreaux vers la droite, puis 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. Les déplacements horizontaux se compensent. Il reste 2 carreaux vers le haut.

La relation de Chasles

Devine : Le trajet complet

Place trois points A, B et C où tu veux sur ton cahier. Tu vas de A à B, puis de B à C. Quel vecteur décrit le trajet complet ?

A. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Faux.

$\overrightarrow{BC}$ décrit seulement le second trajet.

B. Le vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Faux.

$\overrightarrow{CA}$ part de C : c'est le trajet du retour.

C. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Faux.

$\overrightarrow{AB}$ décrit seulement le premier trajet.

D. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Juste.

Juste : on part de A et on arrive en C.

Correction

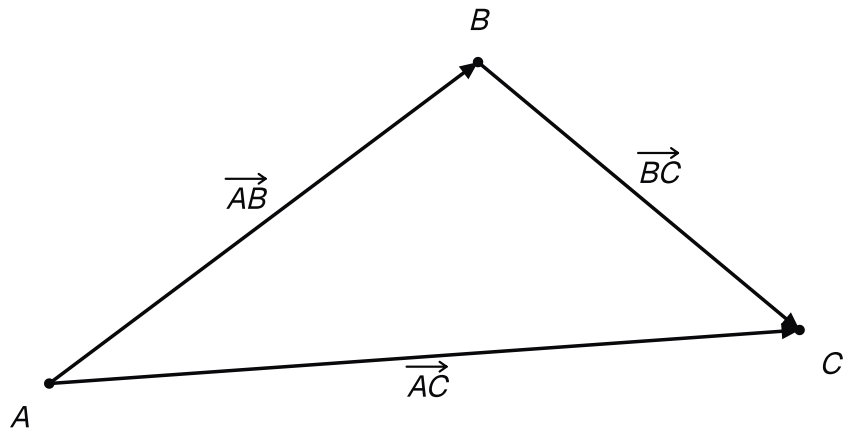
On part de A et on arrive en C, en passant par B. Le trajet complet est donc décrit par $\overrightarrow{AC}$. Le point de passage B ne compte plus : c'est la relation qui suit.

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

L'extrémité du premier vecteur est l'origine du second : la lettre B « s'efface ». En particulier, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.



Relation de Chasles : aller de A à B puis de B à C revient au même que le trajet direct de A à C.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il vaut pour tous les points, même alignés, et même si deux d'entre eux sont le même point. Quand deux vecteurs se suivent, la lettre du milieu s'efface.

Exemple : Exemple d'emploi : réduire une somme

- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
- De même, $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KK} = \vec{0}$.

Avec trois vecteurs, on applique deux fois la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU} &= \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TU} \\ &= \overrightarrow{RU}\end{aligned}$$

Attention : somme de vecteurs, somme de longueurs

✗ « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, donc $AC = AB + BC$. »

✓ Place B à 3 carreaux vers la droite de A, puis C à 4 carreaux vers le haut de B. En carreaux, $AB = 3$ et $BC = 4$.

Reporte AC au compas sur une ligne du quadrillage : tu trouves 5 carreaux, et non $3 + 4 = 7$. L'égalité de Chasles porte sur des vecteurs, pas sur des longueurs.

Méthode, piège, à toi

Méthode : réduire une somme avec la relation de Chasles

1. **Vérifier** que l'extrémité de chaque vecteur est l'origine du suivant.
2. **Remplacer** sinon un vecteur par un vecteur égal qui convient.
3. **Effacer** les lettres intermédiaires, deux vecteurs à la fois, de gauche à droite, puis écrire le résultat.

Attention : des lettres qui se suivent

✗ « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. »

✓ Le second vecteur part de A, et non de B : la relation de Chasles ne s'applique pas. Place B à 2 carreaux vers la droite de A et C à 2 carreaux vers le haut de A.

La somme fait 2 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ fait 2 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. En général, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{BC}$.

À toi : Deux sommes à réduire

Réduis chaque somme.

1. La somme $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$.
2. Dans le parallélogramme $PQRS$, la somme $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche deux vecteurs où l'extrémité du premier est l'origine du second.
Indice 2
Avec trois vecteurs, applique la relation deux vecteurs à la fois, de gauche à droite.
Indice 3
Point délicat : dans $PQRS$, quel vecteur égal à $\overrightarrow{PQ}$ se termine en R ?

Réponse

Première somme. Dans $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$, chaque vecteur part de l'extrémité du précédent. On efface les lettres du milieu, deux vecteurs à la fois :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}\\&= \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN}\\&= \overrightarrow{KN}\end{aligned}$$

Seconde somme. Dans $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$, les lettres ne se suivent pas. Or $PQRS$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ d'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme ».

On remplace $\overrightarrow{PQ}$ par $\overrightarrow{SR}$, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RS}\\&= \overrightarrow{SS} = \vec{0}\end{aligned}$$

Conclusion. La première somme se réduit à $\overrightarrow{KN}$. La seconde est le vecteur nul $\vec{0}$.

Somme et parallélogramme ; sommes de vecteurs égaux

La somme par la diagonale

Devine : Deux vecteurs de même origine

Sur ton cahier, place A. Place B à 4 carreaux vers la droite de A et D à 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut de A.

Construis la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bout à bout, à partir de B. Où arrives-tu ?

A. À 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.

Juste.

Juste : 4 + 1 carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut.

B. À 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de A.

Faux.

Les deux vecteurs vont vers la droite et vers le haut : rien ne se soustrait.

C. En D.

Faux.

On part de B, et non de A : on n'arrive pas en D.

D. À 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A.

Faux.

Il manque le carreau vers la droite du second vecteur.

Correction

Construction. On part de B et on refait le déplacement de A à D : 1 carreau vers la droite et 2 vers le haut. On arrive au point C à 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut de A. Alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

La somme. On remplace $\overrightarrow{AD}$ par le vecteur égal $\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles :

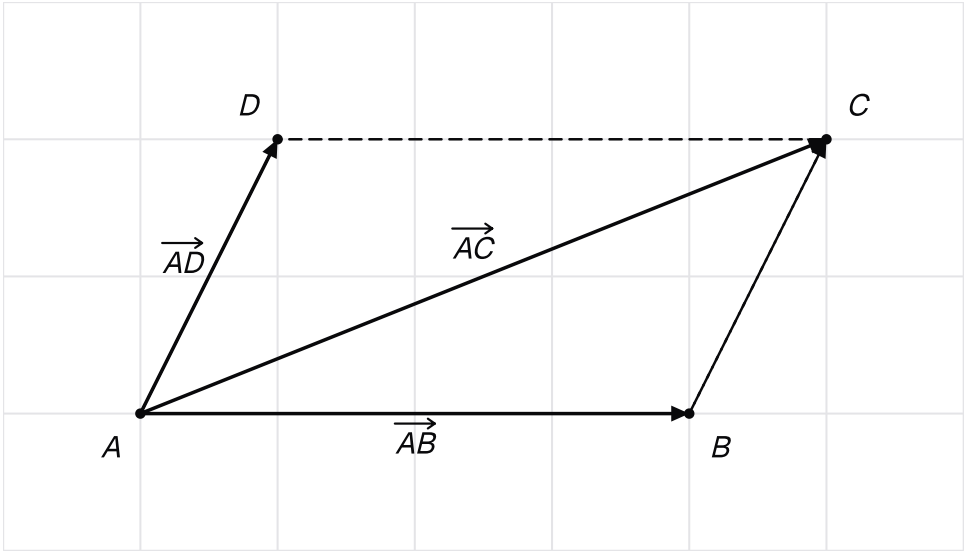
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Le quadrilatère $ABCD$. De D à C, on fait 4 carreaux vers la droite, comme de A à B : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

De A à B, on fait 4 carreaux vers la droite. De A à C, on fait 5 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. Ces deux déplacements n'ont pas la même direction : les points A, B et C ne sont pas alignés.

D'après la propriété « vecteurs égaux et parallélogramme », $ABCD$ est un parallélogramme.

En clair. Le point d'arrivée C est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$. La somme des deux vecteurs de même origine A se lit sur la diagonale $[AC]$.



Le point C complète le parallélogramme ABCD, et la diagonale issue de A porte la somme des vecteurs AB et AD.

Somme et parallélogramme

Propriété : Somme de deux vecteurs et parallélogramme

Soit A, B et D trois points non alignés, et C le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Alors

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$

La somme de deux vecteurs de même origine A se lit sur la **diagonale** issue de A du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

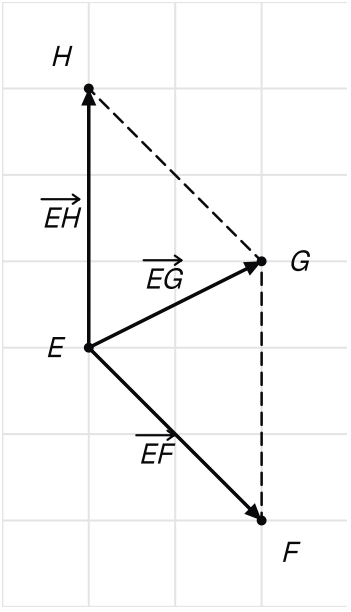
Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il donne une seconde façon de construire une somme, sans mettre les vecteurs bout à bout.

Exemple : Exemple d'emploi : la somme par le parallélogramme

Sur ton cahier, place E. Place F à 2 carreaux vers la droite et 2 vers le bas de E et H à 3 carreaux vers le haut de E. Construis le parallélogramme $EFGH$: le point G est à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de E.

D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme », $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$.



La somme des vecteurs EF et EH, de même origine E, se lit sur la diagonale [EG] du parallélogramme EFGH.

Méthode et devoir

Méthode : construire la somme de deux vecteurs

1. **Bout à bout** : place le second vecteur à partir de l'extrémité du premier. Joins ensuite l'origine du premier à l'extrémité du second.
2. **Même origine**, si les deux vecteurs n'ont pas la même direction : construis le parallélogramme sur les deux vecteurs. La somme est portée par sa diagonale issue de l'origine commune. Sinon, place-les bout à bout.

Remarque : Coin devoir : une somme dans un parallélogramme

En devoir, la question « $ABCD$ est un parallélogramme ; simplifie $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ » se rédige en une phrase. Barème indicatif : 1 point.

Rédaction modèle : D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme », comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Sommes de vecteurs égaux

Devine : Trois fois le même déplacement

Sur ton cahier, place K, puis L à 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de K. Tu fais trois fois de suite le déplacement de K à L. Où arrives-tu ?

A. À 6 carreaux vers la droite et 1 vers le haut de K.

Faux.

Le déplacement vers le haut se répète aussi : trois fois 1 carreau.

B. À 5 carreaux vers la droite et 4 vers le haut de K.

Faux.

On répète le déplacement : on ne lui ajoute pas 3 carreaux.

C. À 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de K.

Faux.

Le déplacement vers la droite se répète aussi : trois fois 2 carreaux.

D. À 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de K.

Juste.

Juste : trois fois 2 carreaux, et trois fois 1 carreau.

Correction

Chaque déplacement fait 2 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. Trois de suite font $3\times 2=6$ carreaux vers la droite et $3\times 1=3$ carreaux vers le haut. On arrive à 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de K.

Définition : Somme de vecteurs égaux

Soit A et B deux points distincts.

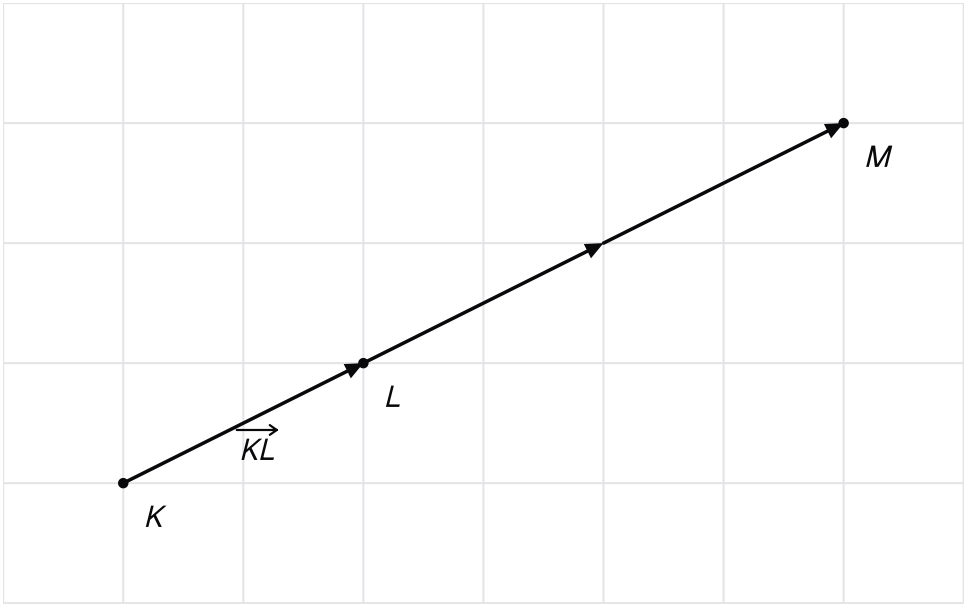
- On écrit $2\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$, puis $3\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$, et ainsi de suite.
- On écrit $-\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur opposé $\overrightarrow{BA}$, puis $-2\overrightarrow{AB}$ pour $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}$, et ainsi de suite.

Le nombre écrit devant le vecteur est toujours un **entier**.

Exemple : écrire une somme de vecteurs égaux

Reprends K et L.

- $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KL}=3\overrightarrow{KL}$. Le point M à 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut de K vérifie $\overrightarrow{KM}=3\overrightarrow{KL}$.
- $-\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{LK}$: ce vecteur fait 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas.
- $-2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{LK}$: ce vecteur fait 4 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas.
- Dans une somme, écris $\overrightarrow{LK}$ à la place de $-\overrightarrow{KL}$: tu peux alors appliquer la relation de Chasles.



Trois fois de suite le déplacement de K à L : on arrive en M, et le vecteur KM s'écrit 3KL.

Un piège, puis à toi

Attention : un vecteur et son opposé

✗ « $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}$ », ou « $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$ ».

✓ D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$: tu reviens au point de départ. Le résultat est un vecteur, le vecteur nul, et non le nombre 0.

À toi : Doubler, retourner

Sur ton cahier, place P, puis Q à 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut de P.

1. Construis le point R tel que $\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PQ}$.
2. Construis le point S tel que $\overrightarrow{PS}=-\overrightarrow{PQ}$.
3. Simplifie $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}$.

Situe R et S à partir de P.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
$2\overrightarrow{PQ}$ veut dire $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ}$: fais deux fois le déplacement de P à Q.
Indice 2
$-\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur opposé $\overrightarrow{QP}$: fais le déplacement contraire.
Indice 3
Point délicat : que fait un pion qui va de P à Q, puis revient en P ?

Réponse
Le point R. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ fait 1 carreau vers la gauche et 2 vers le haut. Deux fois de suite, on fait 2 carreaux vers la gauche et 4 vers le haut. Le point R est à 2 carreaux vers la gauche et 4 vers le haut de P.

Le point S. Le vecteur $-\overrightarrow{PQ}$ est l'opposé $\overrightarrow{QP}$: il fait le déplacement contraire, 1 carreau vers la droite et 2 vers le bas. Le point S est à 1 carreau vers la droite et 2 vers le bas de P.

La somme. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$: on revient en P.

Conclusion. Les points R et S sont sur la droite (PQ), de part et d'autre de P. La somme $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}$ est le vecteur nul.

Ce qu'il faut retenir

À retenir

- **Un vecteur** : une direction, un sens, une longueur. Sur un quadrillage, c'est un déplacement en carreaux.
- **Vecteurs égaux** : le même déplacement. **Vecteurs opposés** : des déplacements contraires. Et $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
- **Parallélogramme** : si A, B, C ne sont pas alignés, $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
- **Milieu** : I est le milieu de $[AB]$ lorsque $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.
- **Translation** : l'image M' de M vérifie $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$.
- **Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- **Somme** : bout à bout, ou par la diagonale. Si $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- **Sommes de vecteurs égaux** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$.

Vérifie : Une dernière vérification

Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme. Quelle égalité est juste ?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NQ}$

Faux.

$[NQ]$ est l'autre diagonale : elle ne part pas de M.

B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}$

Juste.

Juste : la somme se lit sur la diagonale issue de M.

C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

Faux.

L'ordre des lettres est faux : on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$

Faux.

La relation de Chasles donne $\overrightarrow{MP}$, et non son opposé.

Correction

D'après la propriété « somme de deux vecteurs et parallélogramme », $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}$. La somme de deux vecteurs de même origine M se lit sur la diagonale issue de M.

Quelle méthode pour quelle question ?

- Pour décrire un vecteur, donne sa direction, son sens et sa longueur.
- Pour montrer un parallélogramme, établis une égalité de vecteurs dans le bon ordre.
- Pour une image, refais le déplacement de A à B.
- Pour une somme, mets les vecteurs bout à bout, ou trace la diagonale.
- Pour réduire une somme, fais se suivre les lettres, au besoin avec un vecteur égal, puis efface les lettres intermédiaires.

Et ensuite ? En 3e année, tu retrouveras les vecteurs et les translations. Tu iras plus loin, avec les mêmes idées de déplacement.

Le mot du prof. Tu sais maintenant décrire un déplacement avec précision. Avant chaque réponse, nomme la propriété que tu emploies. Une figure soignée sur ton cahier t'aide à contrôler chaque résultat.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Vecteurs et translation » (2ac · general · mathematiques)