BURHAN

Résumé : Le triangle rectangle et le cercle

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-cercle/resume

Chapitre	Semestre
Le triangle rectangle et le cercle	Semestre 2

Le triangle rectangle et son hypoténuse

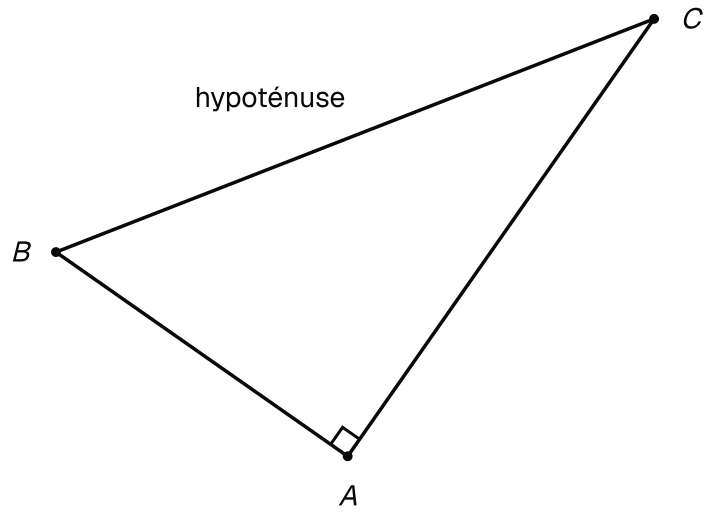
À retenir : Trois outils pour un triangle rectangle

Ce chapitre te donne trois outils pour le triangle rectangle. Le cercle relie l'angle droit au milieu de l'hypoténuse. Le théorème de Pythagore relie les trois longueurs. Le cosinus relie un angle aigu à deux longueurs.

Définition : Triangle rectangle et hypoténuse

Un triangle **rectangle** est un triangle qui a un angle droit. Dans un triangle ABC rectangle en A :

- le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse** ;
- les côtés $[AB]$ et $[AC]$ s'appellent les **côtés de l'angle droit**.



Dans le triangle ABC rectangle en A, le côté [BC] opposé à l'angle droit, l'hypoténuse, se distingue des côtés [AB] et [AC].

Exemple

Figure. Trace sur ton cahier un triangle RST rectangle en S.

Hypoténuse. Le côté qui fait face à l'angle droit est $[RT]$.

Côtés de l'angle droit. Ce sont $[SR]$ et $[ST]$: les deux côtés qui partent du sommet S.

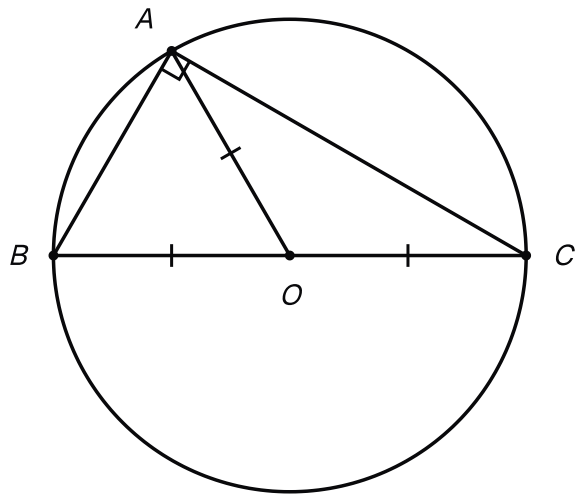
Le cercle et le triangle rectangle

Propriété : Le milieu de l'hypoténuse

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le milieu O de son hypoténuse $[BC]$ est le centre de son cercle circonscrit :

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}.$$

Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de diamètre $[BC]$.



Le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en A a pour centre O, milieu de [BC] : les trois sommets sont à la même distance de O.

Exemple

Énoncé. Le triangle DEF est rectangle en D. Son hypoténuse mesure $EF = 11$ cm, et O est le milieu de $[EF]$.

Calcul. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $OD = \frac{EF}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$ cm.

Conclusion. Les points D, E et F sont sur le cercle de centre O et de rayon $5{,}5$ cm.

Méthode : une longueur par le milieu de l'hypoténuse

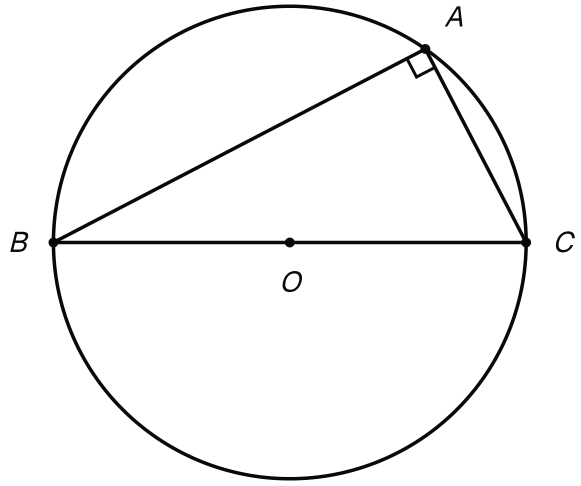
1. **Repère** l'angle droit, puis l'hypoténuse qui lui fait face.

2. **Nomme** le milieu de l'hypoténuse : c'est le centre du cercle circonscrit.
3. **Utilise** l'égalité des trois distances : chacune vaut la moitié de l'hypoténuse.

Propriété : Le triangle inscrit dans un demi-cercle

Soit $[BC]$ un segment de milieu O, et A un point distinct de B et de C. Si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Autrement dit : si $OA = \dfrac{BC}{2}$, alors le triangle ABC est rectangle en A.



Un sommet A pris sur le cercle de diamètre [BC], autre que B et C, donne un triangle ABC rectangle en A.

Méthode : prouver un angle droit avec un cercle

1. **Cherche** un segment dont tu connais le milieu : il jouera le rôle de diamètre.
2. **Justifie** que le troisième sommet est sur ce cercle, ou que sa distance au milieu vaut la moitié du segment. Ce sommet doit être différent des deux extrémités.
3. **Rédige** la conclusion en nommant la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle.

Exemple

Énoncé. Le segment $[MN]$ est un diamètre d'un cercle. Le point P du cercle est distinct de M et de N, et $\widehat{PMN} = 28°$.

Angle droit. La propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle s'applique : le triangle MNP est rectangle en P.

Troisième angle. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Donc :

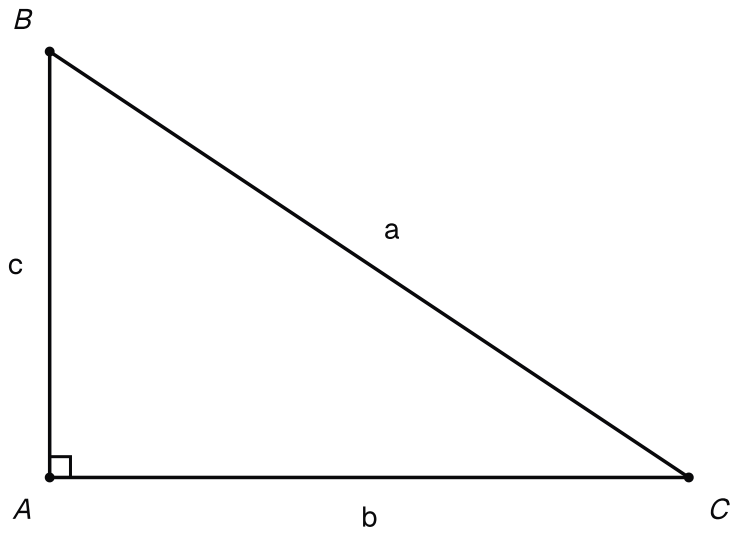
$$\widehat{PNM} = 180° - 90° - 28° = 62°.$$

Le théorème de Pythagore

Théorème : Le théorème de Pythagore

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



Les trois longueurs reliées par le théorème de Pythagore : a pour l'hypoténuse [BC], b et c pour les côtés de l'angle droit.

Exemple

Énoncé. Le triangle KLM est rectangle en K, avec $KL = 5$ cm et $KM = 12$ cm.

Égalité. L'hypoténuse est $[LM]$. D'après le théorème de Pythagore, $LM^2 = KL^2 + KM^2 = 25 + 144 = 169$.

Longueur. Une longueur est positive, donc $LM = \sqrt{169} = 13$ cm.

Attention : L'hypoténuse seule dans le premier membre

Dans un triangle GHJ rectangle en H, l'hypoténuse est $[GJ]$: l'égalité juste est $GJ^2 = GH^2 + HJ^2$.

Écrire $GH^2 = GJ^2 + HJ^2$ est faux : le côté seul à gauche doit être l'hypoténuse. Repère d'abord le côté qui fait face à l'angle droit.

Attention : Pas d'angle droit, pas de Pythagore

Le théorème de Pythagore demande un triangle rectangle. Sans angle droit donné ou justifié, l'égalité peut être fausse.

Par exemple, le triangle PQR a pour côtés $PQ = 4$ cm, $QR = 5$ cm et $PR = 6$ cm. On a $PR^2 = 36$, mais $PQ^2 + QR^2 = 16 + 25 = 41$.

Cherche donc l'angle droit avant d'écrire l'égalité.

Remarque : Un seul sens dans ce chapitre

Le théorème part d'un triangle rectangle et donne une égalité entre les carrés des longueurs. Dans ce chapitre, tu l'utilises dans ce sens seulement : pour calculer une longueur.

La racine carrée et les nombres réels

Définition : Racine carrée d'un nombre positif

Soit a un nombre positif ou nul. On admet qu'il existe un seul nombre positif ou nul dont le carré est égal à a. Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.

Ainsi, $\sqrt{a} \geq 0$ et :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Par exemple, $\sqrt{25} = 5$, car $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$.

Exemple

Carrés connus. $\sqrt{64} = 8$, car $8 \geq 0$ et $8^2 = 64$. De même, $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, car $0{,}7 \geq 0$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$. Enfin, $\sqrt{0} = 0$.

Nombre négatif. Le carré d'un nombre n'est jamais négatif. Donc le nombre -9 n'a pas de racine carrée.

Méthode : valeur exacte, puis valeur approchée

1. **Reconnais** un carré connu : sa racine est alors un nombre simple.
2. **Garde** l'écriture $\sqrt{20}$ tant que le calcul doit rester exact.

3. **Approche** avec la touche racine carrée de la calculatrice, puis annonce la précision : $\sqrt{20} \approx 4{,}47$ au centième près.

Attention : Valeur affichée, valeur approchée

Pour $\sqrt{20}$, la calculatrice affiche $4{,}472135955$. Ce nombre n'est qu'une valeur approchée : $4{,}47^2 = 19{,}9809$, et non 20.

Écris donc $\sqrt{20} \approx 4{,}47$ au centième près, jamais avec le signe $=$.

Propriété : Le nombre racine de deux n'est pas rationnel

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : il n'existe pas de nombres entiers p et q, avec $q \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu n'as pas à le démontrer. Retiens seulement que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas comme un quotient de deux entiers.

Définition : Nombres irrationnels et nombres réels

Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment ensemble les **nombres réels**.

Calculer une longueur avec Pythagore

Méthode : calculer l'hypoténuse

1. **Justifie** l'angle droit.
2. **Nomme** l'hypoténuse : le côté qui fait face à l'angle droit.
3. **Écris** l'égalité de Pythagore avec l'hypoténuse seule à gauche. Mets la valeur de chaque longueur connue.
4. **Trouve** le carré de l'hypoténuse en ajoutant les deux carrés.
5. **Déduis** la longueur : c'est la racine carrée de ce carré, car une longueur est positive.
6. **Termine** par la valeur exacte. Ajoute une valeur approchée avec sa précision si on te la demande.

Exemple

Énoncé. Le triangle XYZ est rectangle en X, avec $XY = 3$ cm et $XZ = 6$ cm.

Égalité. D'après le théorème de Pythagore, $YZ^2 = XY^2 + XZ^2 = 9 + 36 = 45$.

Longueur. $YZ = \sqrt{45}$ cm : c'est la valeur exacte. À la calculatrice, $YZ \approx 6{,}71$ cm au centième près.

Méthode : calculer un côté de l'angle droit

1. **Écris** l'égalité de Pythagore complète.
2. **Soustrais** : le carré cherché est égal au carré de l'hypoténuse moins le carré du côté connu.
3. **Prends** la racine carrée du résultat.

Exemple

Énoncé. Le triangle UVW est rectangle en U, avec $VW = 9$ cm et $UV = 4$ cm.

Égalité. L'hypoténuse est $[VW]$. D'après le théorème de Pythagore, $VW^2 = UV^2 + UW^2$. Donc $UW^2 = 81 - 16 = 65$.

Longueur. $UW = \sqrt{65}$ cm, et $UW \approx 8{,}06$ cm au centième près.

Attention : Pas de racine terme à terme

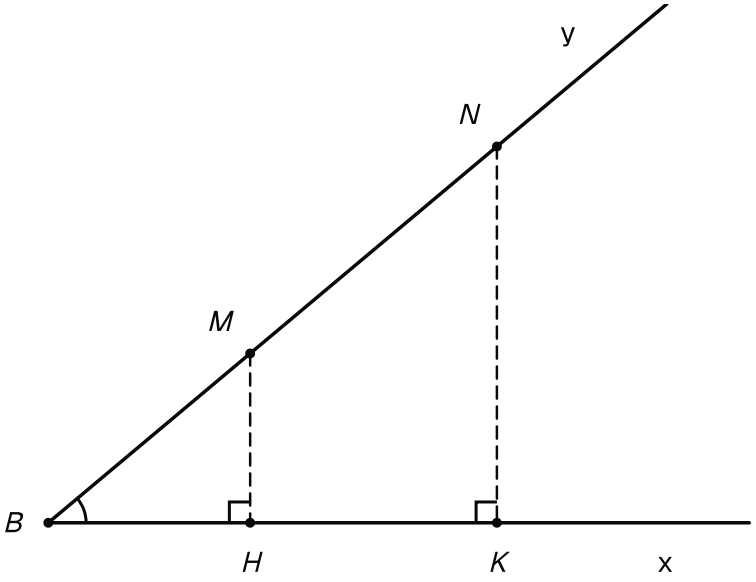
La racine carrée d'une somme n'est pas, en général, la somme des racines carrées. Par exemple, $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, alors que $\sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$.

Calcule donc le carré en entier avant de prendre sa racine.

Le cosinus d'un angle aigu

Propriété : Un quotient qui ne dépend que de l'angle

Soit $\widehat{xBy}$ un angle aigu. Pour tout point M de la demi-droite $[By)$ distinct de B, on note H le pied de la perpendiculaire à (Bx) passant par M. Alors le quotient $\dfrac{BH}{BM}$ ne dépend pas du point M choisi : il ne dépend que de l'angle $\widehat{xBy}$.



Un angle aigu xBy, deux points M et N de [By) et les pieds H et K de leurs perpendiculaires à (Bx) : le quotient BH sur BM vaut BK sur BN.

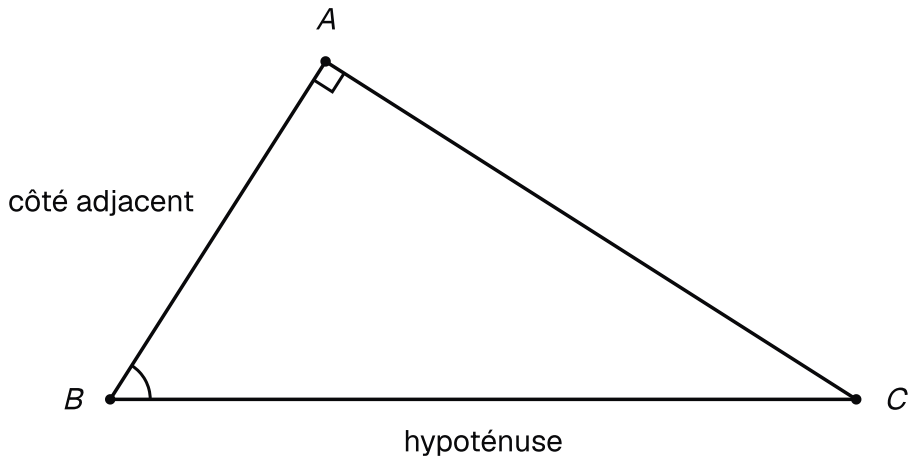
Définition : Cosinus d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A. Le **côté adjacent** à l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le côté de l'angle droit qui a pour extrémité le sommet B : c'est $[BA]$.

Le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}.$$

D'après la propriété précédente, ce nombre ne dépend pas du triangle rectangle choisi sur les côtés de l'angle. On admet de plus que deux angles de même mesure se superposent au papier calque : le cosinus ne dépend donc que de la mesure de l'angle.



Le cosinus de l'angle en B se lit sur deux côtés : [BA], adjacent à cet angle, au numérateur, et l'hypoténuse [BC] au dénominateur.

Exemple

Énoncé. Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 9$ cm, $ST = 12$ cm et $RT = 15$ cm.

Côtés. Pour l'angle $\widehat{SRT}$, le côté adjacent est $[RS]$ et l'hypoténuse est $[RT]$.

Cosinus. $\cos\widehat{SRT} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$.

Propriété : Un cosinus est compris entre zéro et un

Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu d'un triangle ABC rectangle en A, alors :

$$0 < \cos\widehat{ABC} < 1.$$

Attention : Le quotient dans le bon sens

Le côté adjacent va au numérateur, l'hypoténuse au dénominateur.

Dans le triangle précédent, $\dfrac{15}{9} \approx 1{,}67$ au centième près. Ce nombre dépasse 1 : ce ne peut pas être un cosinus. Un cosinus d'angle aigu est toujours strictement compris entre 0 et 1.

Remarque : L'hypoténuse est le plus long côté

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $\cos\widehat{ABC} < 1$, donc $BA < BC$. De même pour l'autre côté de l'angle droit.

L'hypoténuse est donc le plus long côté d'un triangle rectangle.

Le cosinus à la calculatrice

Attention : Le mode degrés d'abord

Règle d'abord ta calculatrice en degrés : l'écran montre en général « D » ou « DEG ». Dans un autre mode, elle donne un résultat faux pour nos angles.

Contrôle avec un angle connu : en degrés, $\cos 45^\circ \approx 0{,}707$ au millième près.

Méthode : du cosinus à la mesure de l'angle

1. **Nomme** l'angle aigu, son côté adjacent et l'hypoténuse.
2. **Calcule** le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse.
3. **Tape** ce quotient après la touche $\cos^{-1}$. L'écran donne une mesure approchée de l'angle, que tu écris avec sa précision.

Exemple

Énoncé. Dans le triangle RST précédent, $\cos \widehat{SRT} = 0{,}6$.

Calculatrice. En degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $0{,}6$ affiche $53{,}13010235$.

Conclusion. $\widehat{SRT} \approx 53{,}1^\circ$ au dixième de degré près.

Méthode : une longueur avec le cosinus

1. **Écris** la définition du cosinus avec la mesure connue de l'angle.
2. **Côté adjacent cherché** : multiplie l'hypoténuse par le cosinus.
3. **Hypoténuse cherchée** : divise le côté adjacent par le cosinus.
4. **Donne** le résultat approché avec sa précision et son unité.

Exemple

Énoncé. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $\widehat{ABC} = 40^\circ$.

Côté adjacent. Si $BC = 8$ cm, alors $BA = BC \times \cos \widehat{ABC} = 8 \times \cos 40^\circ$. En degrés, $BA \approx 6{,}13$ cm au centième près.

Hypoténuse. Si plutôt $BA = 5$ cm, alors $BC = \dfrac{BA}{\cos \widehat{ABC}} = \dfrac{5}{\cos 40^\circ}$. En degrés, $BC \approx 6{,}53$ cm au centième près.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Un milieu ou un cercle** dans l'énoncé : pense au milieu de l'hypoténuse ou au triangle inscrit dans un demi-cercle.
- **Un angle droit à prouver** : montre que son sommet est sur le cercle qui a pour diamètre le côté opposé, et qu'il n'est à aucun des deux bouts de ce côté.
- **Deux longueurs connues** dans un triangle rectangle : le théorème de Pythagore donne la troisième.
- **Une racine carrée** : la valeur exacte d'abord, puis la valeur approchée avec sa précision.
- **Un angle aigu et une longueur** : le cosinus, côté adjacent sur hypoténuse.
- **Une mesure d'angle** : le cosinus, puis la touche $\cos^{-1}$ en mode degrés.

Milieu O de l'hypoténuse, rectangle en A

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Théorème de Pythagore, rectangle en A

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Un côté de l'angle droit

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

Racine carrée d'un nombre a positif ou nul

$$\sqrt{a} \geq 0$$

Carré de la racine carrée de a

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Cosinus d'un angle aigu, rectangle en A

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$$

Côté adjacent

$$BA = BC \times \cos \widehat{ABC}$$

Hypoténuse

$$BC = \frac{BA}{\cos \widehat{ABC}}$$

Encadrement du cosinus

$$0 < \cos \widehat{ABC} < 1$$

À retenir : Rédiger en devoir

1. Commence chaque réponse par l'hypothèse utile : « le triangle est rectangle en… ».
2. Nomme ensuite la propriété employée.
3. Écris la valeur exacte, puis la valeur approchée avec sa précision et son unité.
4. Termine par une phrase qui répond à la question.