BURHAN

Le triangle rectangle et le cercle : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

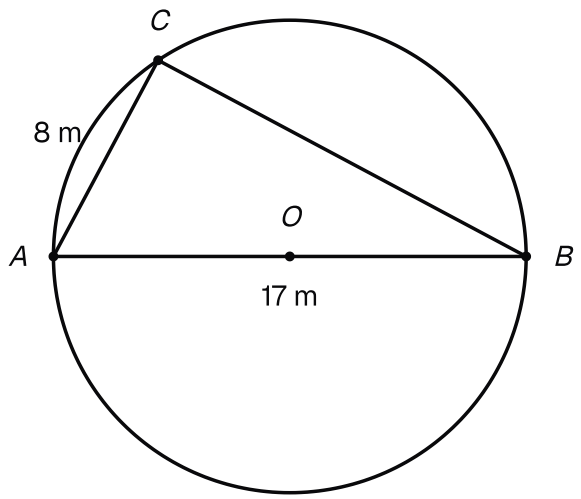
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-cercle/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le triangle rectangle et le cercle	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Une fontaine au bord d'un jardin rond

Un jardin a la forme d'un disque de centre O. Le segment $[AB]$ est un diamètre du bord, avec $AB = 17$ m. Une fontaine C est placée sur le bord, avec $AC = 8$ m.



Le jardin en disque de centre O : le diamètre [AB] de 17 m et la fontaine C sur le bord, à 8 m de A.

1. — 1 pts

Justifier que le triangle ABC est rectangle en C.

INDICE

Outil : une propriété du cercle de diamètre $[AB]$.

Début : où se trouve le point C ? Est-il distinct de A et de B ?

CORRIGÉ

La fontaine C est sur le bord du jardin, donc sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Elle est distincte de A, car $AC = 8$ m. Le point C est aussi distinct de B, car $AC \neq AB$.

Par la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle, l'angle droit est en C, le sommet placé sur le cercle.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en C.

2. 1,5 pts

En déduire la distance BC.

INDICE

Début : l'hypoténuse est le diamètre $[AB]$.

Outil : le théorème de Pythagore ; isole BC^2.

CORRIGÉ

La question 1 montre que le triangle ABC est rectangle en C ; son hypoténuse est le diamètre $[AB]$.

Le théorème de Pythagore donne $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

On isole BC^2, avec $AB^2 = 17^2 = 289$ et $AC^2 = 8^2 = 64$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 289 - 64 = 225. \end{aligned}$$

On a $15^2 = 225$ et $15 \geq 0$, donc $BC = 15$.

Conclusion. La distance BC vaut 15 m.

3. 1 pts

Calculer la distance OC entre la fontaine et le centre du jardin.

INDICE

Outil : O est le milieu de l'hypoténuse $[AB]$ du triangle rectangle ABC.

CORRIGÉ

Le centre O du cercle est le milieu du diamètre $[AB]$. C'est donc le milieu de l'hypoténuse du triangle ABC, rectangle en C. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse :

$$OC = \frac{AB}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5.$$

Conclusion. La fontaine est à $8{,}5$ m du centre du jardin.

4. 1,5 pts

Calculer $\cos\widehat{CAB}$, puis en déduire une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ au dixième de degré près.

INDICE

Début : pour l'angle de sommet A, le côté adjacent est $[AC]$.

Ensuite : la touche $\cos^{-1}$, en mode degrés, avec la fraction exacte.

CORRIGÉ

Cosinus. Pour l'angle $\widehat{CAB}$, le côté adjacent est $[AC]$, et l'hypoténuse est $[AB]$. D'après la définition du cosinus :

$$\cos\widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}.$$

À la calculatrice, $\cos\widehat{CAB} \approx 0{,}47$ au centième près.

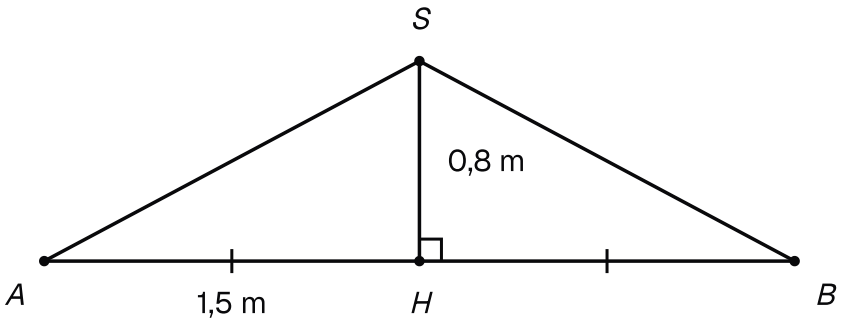
Mesure de l'angle. En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $8 \div 17$ affiche $61{,}92751306$.

Conclusion. On a $\cos\widehat{CAB} = \frac{8}{17}$ et $\widehat{CAB} \approx 61{,}9°$ au dixième de degré près.

Exercice 2 — 5 pts

La toile d'une tente de camping

La toile d'une tente forme deux pans $[SA]$ et $[SB]$. Le mât $[SH]$ est vertical, et H est le milieu de $[AB]$ sur le sol horizontal. On a $AH = 1{,}5$ m et $SH = 0{,}8$ m. Le triangle SAH est rectangle en H.



La tente vue de face : les pans [SA] et [SB], le mât vertical [SH] de 0,8 m et le milieu H de [AB], avec AH = 1,5 m.

1. — 1,5 pts

Calculer la longueur SA d'un pan de la toile.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle SAH.

Début : l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit en H.

CORRIGÉ

Le triangle SAH est rectangle en H, d'hypoténuse $[SA]$. Avec $AH^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ et $SH^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$, le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} SA^2 &= AH^2 + SH^2 \\ &= 2{,}25 + 0{,}64 \\ &= 2{,}89. \end{aligned}$$

On a $1{,}7^2 = 2{,}89$ et $1{,}7 \geq 0$, donc $SA = 1{,}7$.

Conclusion. Un pan de la toile mesure $1{,}7$ m.

2. 1,5 pts

En déduire $\cos\widehat{SAH}$ sous forme de fraction, puis une mesure de l'angle $\widehat{SAH}$ au dixième de degré près.

INDICE

Début : pour l'angle de sommet A, le côté adjacent est $[AH]$.

Ensuite : la touche $\cos^{-1}$, en mode degrés.

CORRIGÉ

Cosinus. Pour l'angle $\widehat{SAH}$, le côté adjacent est $[AH]$, et l'hypoténuse est $[SA]$. D'après la définition du cosinus et la question 1 :

$$\cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1{,}5}{1{,}7} = \frac{15}{17}.$$

À la calculatrice, $\cos\widehat{SAH} \approx 0{,}88$ au centième près.

Mesure de l'angle. En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $15 \div 17$ affiche $28{,}07248694$.

Conclusion. On a $\cos\widehat{SAH} = \dfrac{15}{17}$ et $\widehat{SAH} \approx 28{,}1^\circ$ au dixième de degré près.

3. 2 pts

Une tente plus grande a la même forme : le même angle $\widehat{SAH}$, avec un pan $SA = 3{,}4$ m. En déduire la longueur AH, puis la hauteur SH de son mât.

INDICE

Outil : le cosinus ne dépend que de la mesure de l'angle : il vaut encore $\dfrac{15}{17}$.

Début : AH est le côté adjacent ; multiplie l'hypoténuse par le cosinus.

CORRIGÉ

Longueur AH. Le cosinus d'un angle aigu ne dépend que de la mesure de l'angle. La grande tente a le même angle $\widehat{SAH}$, donc encore $\cos\widehat{SAH} = \dfrac{15}{17}$. Le côté adjacent s'obtient en multipliant l'hypoténuse par le cosinus :

$$\begin{aligned} AH &= SA \times \cos\widehat{SAH} \\ &= 3{,}4 \times \frac{15}{17} \\ &= \frac{51}{17} = 3. \end{aligned}$$

On a utilisé $3{,}4 \times 15 = 51$, puis $51 = 3 \times 17$.

Hauteur SH. Le triangle SAH est rectangle en H, d'hypoténuse $[SA]$. D'après le théorème de Pythagore, avec $SA^2 = 3{,}4^2 = 11{,}56$ et $AH^2 = 9$:

$$\begin{aligned} SH^2 &= SA^2 - AH^2 \\ &= 11{,}56 - 9 = 2{,}56. \end{aligned}$$

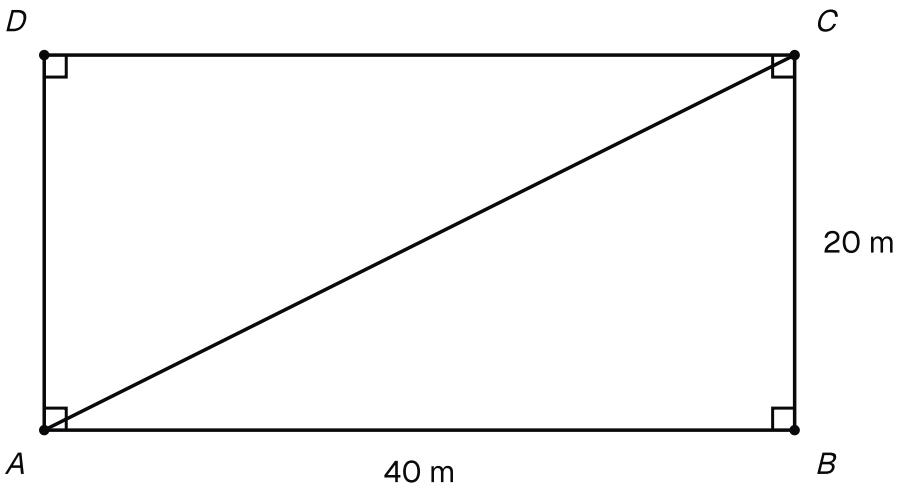
On a $1{,}6 \geq 0$ et $1{,}6^2 = 2{,}56$, donc $SH = 1{,}6$.

Conclusion. Dans la grande tente, $AH = 3$ m, et le mât mesure $1{,}6$ m.

Exercice 3 5 pts

L'allée en diagonale d'un parc

Un parc a la forme d'un rectangle $ABCD$, avec $AB = 40$ m et $BC = 20$ m. Une allée droite relie les coins A et C. Rappel de 1re année : chaque angle d'un rectangle est droit.



Le parc rectangulaire ABCD de 40 m sur 20 m, traversé par l'allée droite [AC] qui joint deux coins opposés.

1. 1,5 pts

Calculer la longueur AC de l'allée : valeur exacte, puis valeur approchée au centième près.

INDICE

Début : le triangle ABC est rectangle en B.

Outil : le théorème de Pythagore ; regarde si le résultat est le carré d'un entier.

CORRIGÉ

Le rectangle $ABCD$ a un angle droit en B. Le triangle ABC est donc rectangle en B, d'hypoténuse $[AC]$. Avec $AB^2 = 40^2 = 1\,600$ et $BC^2 = 20^2 = 400$, le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 1\,600 + 400 \\ &= 2\,000. \end{aligned}$$

Le nombre $2\,000$ n'est pas le carré d'un entier : $44^2 = 1\,936$ et $45^2 = 2\,025$. Une longueur est positive, donc $AC = \sqrt{2\,000}$ m : c'est la valeur exacte.

À la calculatrice, $AC \approx 44{,}72$ m au centième près.

Conclusion. L'allée mesure $\sqrt{2\,000}$ m, soit $44{,}72$ m environ, au centième près.

2. 1 pts

Un lampadaire est placé au milieu O de l'allée. En déduire la distance OB entre le lampadaire et le coin B, au centième près.

INDICE

Outil : le triangle ABC est rectangle. Que sais-tu du milieu O de son hypoténuse ?

CORRIGÉ

Le triangle ABC est rectangle en B, et le lampadaire O est le milieu de son hypoténuse $[AC]$. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, OB est la moitié de AC :

$$OB = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2\,000}}{2}.$$

À la calculatrice, $OB \approx 22{,}36$ m au centième près.

Conclusion. Le lampadaire est à $22{,}36$ m environ du coin B, au centième près.

3. 1,5 pts

Écrire $\cos \widehat{BAC}$, puis en déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.

INDICE

Début : pour l'angle de sommet A, le côté adjacent est $[AB]$.

Point délicat : utilise la valeur exacte de AC à la calculatrice.

CORRIGÉ

Pour l'angle $\widehat{BAC}$, le côté adjacent est $[AB]$, et l'hypoténuse est $[AC]$. D'après la définition du cosinus, avec la valeur exacte de AC :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAC} &= \frac{AB}{AC} \\ &= \frac{40}{\sqrt{2\,000}}. \end{aligned}$$

En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à ce quotient affiche $26{,}56505118$.

Conclusion. On a $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{40}{\sqrt{2\,000}}$ et $\widehat{BAC} \approx 26{,}6°$ au dixième de degré près.

4. 1 pts

Pour aller de A à C, Yassine longe les côtés $[AB]$ puis $[BC]$. Sa sœur prend l'allée. Quelle distance sa sœur économise-t-elle, au centième près ?

INDICE

Début : calcule la longueur du trajet de Yassine.

Ensuite : retranche la longueur de l'allée, avec sa valeur exacte.

CORRIGÉ

Trajet de Yassine. Il longe $[AB]$ puis $[BC]$: $AB + BC = 40 + 20 = 60$ m.

Trajet de sa sœur. D'après la question 1, l'allée mesure $\sqrt{2\,000}$ m.

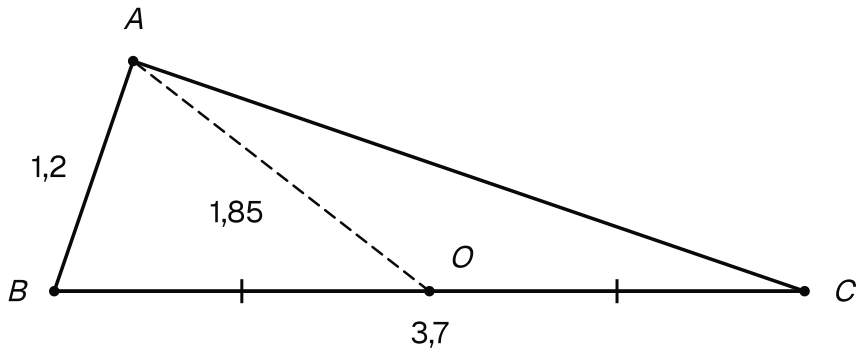
Différence. La distance économisée vaut $60 - \sqrt{2\,000}$ m. À la calculatrice, on trouve $15{,}28$ m environ, au centième près.

Conclusion. En prenant l'allée, sa sœur économise $15{,}28$ m environ, au centième près.

Exercice 4 5 pts

Une ferme, un puits et deux villages

Deux villages B et C sont reliés par une route droite, avec $BC = 3{,}7$ km. Un puits O est au milieu de la route. Une ferme A se trouve à $1{,}85$ km du puits et à $1{,}2$ km du village B.



La route [BC] entre les deux villages, le puits O en son milieu et la ferme A, à 1,85 km du puits et à 1,2 km de B.

1. 1 pts

Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

INDICE

Outil : compare la distance OA à la moitié de BC.

Point délicat : vérifie que A n'est ni en B ni en C.

CORRIGÉ

Position de la ferme. Le puits O est le milieu de $[BC]$, et $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{3{,}7}{2} = 1{,}85$. La ferme est à $1{,}85$ km du puits, donc $OA = \dfrac{BC}{2}$.

Le cercle. Le point A est ainsi sur le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{BC}{2}$, c'est-à-dire sur le cercle de diamètre $[BC]$. Il est distinct de B, car $AB = 1{,}2$ km, et distinct de C, car $AB \neq BC$.

Angle droit. On conclut avec la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle : l'angle droit est au sommet A, situé sur le cercle.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. 1,5 pts

En déduire la distance AC entre la ferme et le village C.

INDICE

Début : repère l'hypoténuse : elle fait face à l'angle droit trouvé à la question 1.

Outil : le théorème de Pythagore, puis un carré connu.

CORRIGÉ

La question 1 montre que le triangle ABC est rectangle en A ; son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

On isole AC^2, avec $BC^2 = 3{,}7^2 = 13{,}69$ et $AB^2 = 1{,}2^2 = 1{,}44$:

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 13{,}69 - 1{,}44 \\ &= 12{,}25. \end{aligned}$$

On a $3{,}5^2 = 12{,}25$ et $3{,}5 \geq 0$, donc $AC = 3{,}5$ km.

Conclusion. La ferme est à $3{,}5$ km du village C.

3. 1 pts

Calculer $\cos \widehat{ABC}$ sous forme de fraction, puis en déduire une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degré près.

INDICE

Début : pour l'angle de sommet B, cherche le côté de l'angle droit issu de B.

Ensuite : la touche $\cos^{-1}$, en mode degrés, avec la fraction exacte.

CORRIGÉ

Cosinus. Pour l'angle $\widehat{ABC}$, le côté de l'angle droit issu de B est $[BA]$: c'est le côté adjacent. L'hypoténuse est $[BC]$. D'après la définition du cosinus :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ABC} &= \frac{BA}{BC} = \frac{1{,}2}{3{,}7} \\ &= \frac{12}{37}. \end{aligned}$$

Mesure de l'angle. En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $12 \div 37$ affiche $71{,}07535558$.

Conclusion. On a $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{12}{37}$ et $\widehat{ABC} \approx 71{,}1^\circ$ au dixième de degré près.

4. 1,5 pts

Pour l'angle $\widehat{ACB}$, Salma écrit $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{37}{35}$. Expliquer, sans calculatrice, pourquoi ce résultat est faux. Écrire ensuite le bon cosinus, en déduire une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au dixième de degré près, puis contrôler avec la somme des angles du triangle ABC.

INDICE

Outil : un encadrement du cosinus d'un angle aigu.

Ensuite : pour l'angle de sommet C, quel côté de l'angle droit part de C ? Pour le contrôle, pense à la somme des angles d'un triangle.

CORRIGÉ

Erreur. Le nombre $\dfrac{37}{35}$ est plus grand que 1, car $37 > 35$. Or le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle est strictement compris entre 0 et 1 : le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse. Salma a placé l'hypoténuse au numérateur.

Bon cosinus. Pour l'angle $\widehat{ACB}$, le côté adjacent est $[CA]$, et l'hypoténuse est $[CB]$:

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{CA}{CB} = \frac{3{,}5}{3{,}7} = \frac{35}{37}.$$

Mesure de l'angle. En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $35 \div 37$ affiche $18{,}92464442$. Donc $\widehat{ACB} \approx 18{,}9°$ au dixième de degré près.

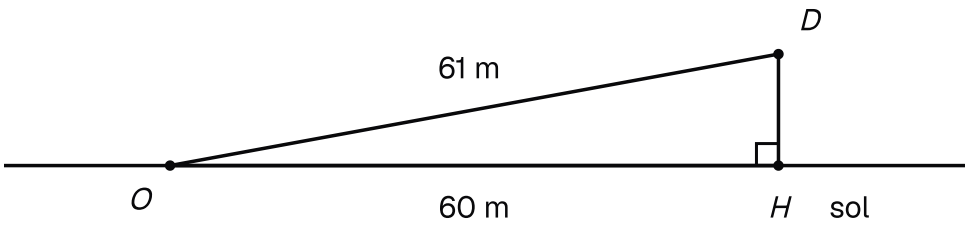
Contrôle. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. L'angle en A est droit, donc les deux angles aigus ont pour somme $180° - 90° = 90°$. Avec les mesures approchées, $71{,}1 + 18{,}9 = 90$: elles sont cohérentes.

Conclusion. Le quotient de Salma dépasse 1, donc il est faux. Le bon cosinus vaut $\dfrac{35}{37}$, et $\widehat{ACB} \approx 18{,}9°$ au dixième de degré près, ce que confirme la somme des angles.

Exercice 5 — 5 pts

Un drone et la portée de sa télécommande

Mehdi pilote un drone depuis le point O d'un terrain plat et horizontal. Le drone D est à la verticale du point H du sol, avec $OH = 60$ m : le triangle OHD est rectangle en H. L'écran de la télécommande indique $OD = 61$ m. La télécommande garde le contact avec le drone tant qu'il est à 64 m au plus de Mehdi.



Mehdi en O, le point H du sol à 60 m de lui et le drone D à la verticale de H, à 61 m de la télécommande.

1. — 1 pts

Calculer la hauteur DH du drone.

INDICE

Début : l'hypoténuse du triangle OHD est le côté opposé à l'angle droit en H.

Outil : le théorème de Pythagore ; isole DH^2.

CORRIGÉ

Le triangle OHD est rectangle en H, d'hypoténuse $[OD]$. D'après le théorème de Pythagore, $OD^2 = OH^2 + DH^2$.

On isole DH^2, avec $OD^2 = 61^2 = 3\,721$ et $OH^2 = 60^2 = 3\,600$:

$$\begin{aligned} DH^2 &= OD^2 - OH^2 \\ &= 3\,721 - 3\,600 \\ &= 121. \end{aligned}$$

On a $11^2 = 121$ et $11 \geq 0$, donc $DH = 11$ m.

Conclusion. Le drone vole à 11 m de hauteur.

2. 1,5 pts

Donner $\cos\widehat{DOH}$ en fraction, puis en déduire l'angle $\widehat{DOH}$ au dixième de degré près.

INDICE

Début : pour l'angle de sommet O, le côté adjacent est $[OH]$.

Ensuite : la touche $\cos^{-1}$, en mode degrés, avec la fraction exacte.

CORRIGÉ

Pour l'angle $\widehat{DOH}$, le côté adjacent est $[OH]$, et l'hypoténuse est $[OD]$. D'après la définition du cosinus :

$$\cos\widehat{DOH} = \frac{OH}{OD} = \frac{60}{61}.$$

En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à $60 \div 61$ affiche $10{,}38885782$.

Conclusion. On a $\cos\widehat{DOH} = \dfrac{60}{61}$ et $\widehat{DOH} \approx 10{,}4^\circ$ au dixième de degré près.

3. 1,5 pts

Mehdi ne bouge pas. Le drone monte à la verticale de H jusqu'au point E, avec $\widehat{EOH} = 28^\circ$. Calculer la distance OE au centième près, puis en déduire si le contact est gardé.

INDICE

Outil : la définition du cosinus de l'angle connu ; cette fois, l'hypoténuse est cherchée.

Point délicat : la calculatrice doit être réglée en degrés.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. Le point E est sur la verticale de H, et le sol est horizontal : le triangle OHE est rectangle en H, d'hypoténuse $[OE]$.

Distance OE. Pour l'angle $\widehat{EOH}$, le côté adjacent est $[OH]$. D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{EOH} = \dfrac{OH}{OE}$. L'hypoténuse cherchée est au dénominateur, donc :

$$\begin{aligned} OE &= \frac{OH}{\cos\widehat{EOH}} \\ &= \frac{60}{\cos 28^\circ}. \end{aligned}$$

En mode degrés, la calculatrice affiche $67{,}95420304$. Donc $OE \approx 67{,}95$ m au centième près.

Contact. Cette distance dépasse 64 m, la portée de la télécommande.

Conclusion. Au point E, la télécommande perd le contact avec le drone.

4. 1 pts

Le point F de la verticale de H est tel que $OF = 64$ m : c'est la position la plus haute où le contact est gardé. En déduire la hauteur HF : valeur exacte, puis valeur approchée au centième près.

INDICE

Début : le triangle OHF est rectangle en H ; son hypoténuse est connue.

Outil : le théorème de Pythagore ; regarde si le résultat est le carré d'un entier.

CORRIGÉ

Égalité de Pythagore. Le triangle OHF est rectangle en H, d'hypoténuse $[OF]$. D'après le théorème de Pythagore, $OF^2 = OH^2 + HF^2$. On isole HF^2, avec $OF^2 = 64^2 = 4\,096$ et $OH^2 = 3\,600$:

$$\begin{aligned} HF^2 &= OF^2 - OH^2 \\ &= 4\,096 - 3\,600 \\ &= 496. \end{aligned}$$

Valeur exacte. Le nombre 496 n'est pas le carré d'un entier : $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$. Une longueur est positive, donc $HF = \sqrt{496}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $HF \approx 22{,}27$ m au centième près.

Conclusion. Le drone peut monter à la verticale de H jusqu'à $22{,}27$ m environ, au centième près, sans perdre le contact.