BURHAN

# Le triangle rectangle et le cercle : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

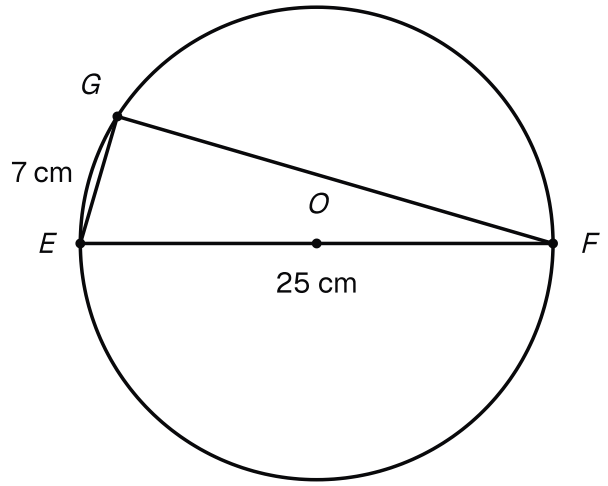
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-cercle/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Le triangle rectangle et le cercle | Entraînement | 7 |

### Exercice 1

## Un triangle tracé sur le cadran d'une horloge

Le cadran rond d'une horloge est un cercle de centre $O$ et de diamètre $[EF]$, avec $EF = 25$ cm. On place un point $G$ sur le bord du cadran, avec $EG = 7$ cm.




**Le cadran de centre O, son diamètre [EF] de 25 cm et le point G du bord situé à 7 cm de E.**

#### 1.

Démontrer que le triangle $EFG$ est rectangle en $G$.

INDICE

**Outil :** la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle.

**Début :** vérifie que $G$ est sur le cercle et qu'il est distinct de $E$ et de $F$.

CORRIGÉ

Le point $G$ est sur le bord du cadran, donc sur le cercle de diamètre $[EF]$.

Comme $EG = 7$ cm, le point $G$ n'est pas en $E$. Il n'est pas non plus en $F$, car $EG = 7$ cm alors que $EF = 25$ cm.

On applique alors la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle : l'angle droit est au sommet $G$, celui qui est sur le cercle.

**Conclusion.** Le triangle $EFG$ est rectangle en $G$.

### 2.

Calculer la longueur $FG$.

INDICE

**Début :** l'hypoténuse est $[EF]$, le côté opposé à l'angle droit.

**Outil :** le théorème de Pythagore, puis isole $FG^2$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le triangle $EFG$ est rectangle en $G$, d'hypoténuse $[EF]$. Le théorème de Pythagore donne $EF^2 = EG^2 + FG^2$.

On isole $FG^2$, avec $EF^2 = 25^2 = 625$ et $EG^2 = 7^2 = 49$ :

$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 - EG^2 \\ &= 625 - 49 = 576. \end{aligned}$$

On a $24^2 = 576$ et $24 \geq 0$, donc $FG = 24$.

**Conclusion.** La longueur $FG$ vaut $24$ cm.

### 3.

Calculer le périmètre du triangle $EFG$.

INDICE

**Outil :** le périmètre est la somme des longueurs des trois côtés.

CORRIGÉ

Le périmètre est la somme des longueurs des trois côtés. Avec la question 2 :

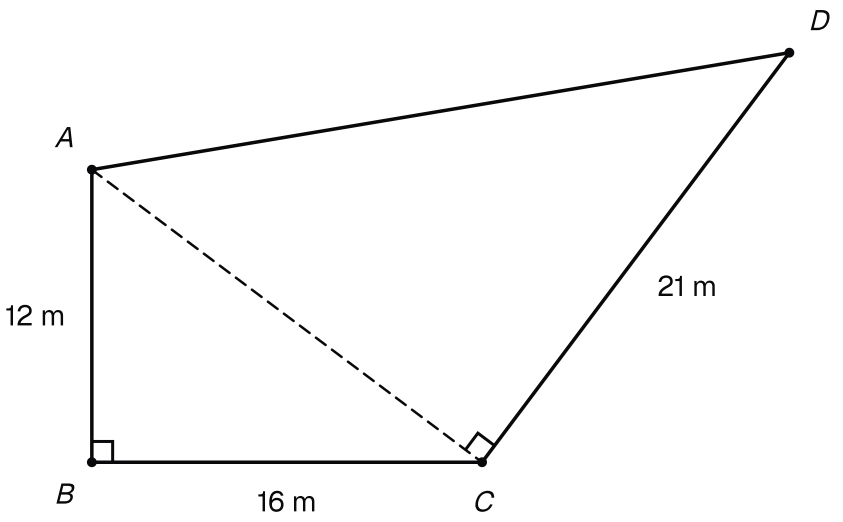
$$\begin{aligned} &EF + EG + FG \\ &= 25 + 7 + 24 \\ &= 56. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Le triangle $EFG$ a un périmètre de $56$ cm.

### Exercice 2

## Clôturer un terrain en deux triangles

Un terrain $ABCD$ est formé de deux triangles. Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$, avec $AB = 12$ m et $BC = 16$ m. Le triangle $ACD$ est rectangle en $C$, avec $CD = 21$ m. Trace une figure à main levée et code les deux angles droits.




**Le terrain ABCD découpé par la diagonale [AC] : le triangle ABC rectangle en B, puis le triangle ACD rectangle en C.**

#### 1.

Calculer la longueur $AC$ de la diagonale.

INDICE

**Outil :** le théorème de Pythagore dans le triangle $ABC$.

**Début :** son hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit en $B$.

CORRIGÉ

Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$, d'hypoténuse $[AC]$. On a $AB^2 = 12^2 = 144$ et $BC^2 = 16^2 = 256$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 144 + 256 = 400. \end{aligned}$$

On a $20^2 = 400$ et $20 \geq 0$, donc $AC = 20$.

**Conclusion.** La diagonale $[AC]$ mesure $20$ m.

### 2.

En déduire la longueur $AD$.

INDICE

**Début :** dans le triangle $ACD$, l'angle droit est en $C$.

**Point délicat :** la longueur $AC$ de la question 1 est maintenant un côté de l'angle droit.

CORRIGÉ

Le triangle $ACD$ est rectangle en $C$. Son hypoténuse est $[AD]$, et $[AC]$ devient un côté de l'angle droit.

La question 1 donne $AC^2 = 400$, et $CD^2 = 21^2 = 441$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ &= 400 + 441 = 841. \end{aligned}$$

On a $29^2 = 841$ et $29 \geq 0$, donc $AD = 29$.

**Conclusion.** La longueur $AD$ vaut $29$ m.

### 3.

On entoure le terrain d'un grillage, sans grillage le long de la diagonale. Le grillage coûte $35$ dirhams le mètre. Calculer la longueur du grillage, puis son prix.

INDICE

**Début :** le tour du terrain passe par $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

**Ensuite :** multiplie la longueur par le prix d'un mètre.

CORRIGÉ

**Longueur.** Le grillage fait le tour du terrain, sans suivre la diagonale $[AC]$ :

$$\begin{aligned} &AB + BC + CD + DA \\ &= 12 + 16 + 21 + 29 \\ &= 78. \end{aligned}$$

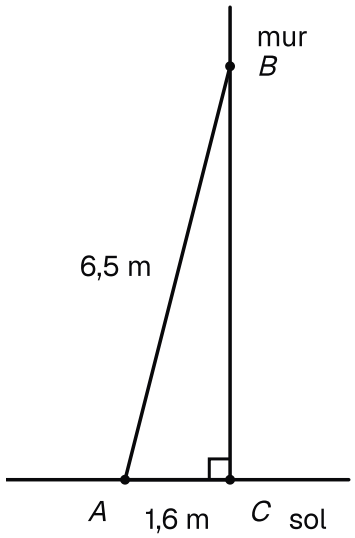
**Prix.** Un mètre coûte $35$ dirhams, donc les $78$ m coûtent $78 \times 35 = 2\,730$ dirhams.

**Conclusion.** Il faut $78$ m de grillage, pour un prix de $2\,730$ dirhams.

### Exercice 3

## Une échelle appuyée contre un mur

Une échelle $[AB]$ de $6{,}5$ m est appuyée contre un mur vertical. Son pied $A$ est sur le sol horizontal, et son sommet $B$ touche le mur. Le point $C$ est le pied du mur, avec $AC = 1{,}6$ m.




**L'échelle [AB] de 6,5 m appuyée contre le mur : son pied A sur le sol, à 1,6 m du pied C du mur.**

### 1.

Calculer la hauteur $BC$ atteinte par le sommet de l'échelle.

INDICE

**Début :** le mur est vertical et le sol horizontal : où est l'angle droit ?

**Outil :** le théorème de Pythagore, puis isole $BC^2$.

CORRIGÉ

**Angle droit.** Le mur vertical et le sol horizontal sont perpendiculaires en $C$. Le triangle $ABC$ est donc rectangle en $C$, et son hypoténuse est l'échelle $[AB]$.

**Égalité de Pythagore.** D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Avec $AB^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$ et $AC^2 = 1{,}6^2 = 2{,}56$, on isole $BC^2$ :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 42{,}25 - 2{,}56 \\ &= 39{,}69. \end{aligned}$$

**Racine carrée.** On a $6{,}3^2 = 39{,}69$ et $6{,}3 \geq 0$, donc $BC = 6{,}3$ m.

**Conclusion.** Le sommet de l'échelle arrive à $6{,}3$ m de hauteur.

### 2.

Pour plus de stabilité, on éloigne le pied de l'échelle : il est maintenant à $2{,}5$ m du mur. À quelle hauteur arrive le sommet ? De combien est-il descendu ?

INDICE

**Outil :** le même calcul qu'à la question 1, avec la nouvelle distance.

**Ensuite :** compare les deux hauteurs.

CORRIGÉ

**Nouvelle hauteur.** Le triangle reste rectangle au pied du mur, et l'échelle, son hypoténuse, mesure toujours $6{,}5$ m. Notons $h$ la nouvelle hauteur, en mètres. D'après le théorème de Pythagore, $6{,}5^2 = 2{,}5^2 + h^2$, donc :

$$\begin{aligned} h^2 &= 6{,}5^2 - 2{,}5^2 \\ &= 42{,}25 - 6{,}25 = 36. \end{aligned}$$

On obtient $h = 6$ m, car $6 \geq 0$ et $6^2 = 36$.

**Descente.** La hauteur passe de $6{,}3$ m à $6$ m : le sommet descend de $6{,}3 - 6 = 0{,}3$ m.

**Conclusion.** Le sommet arrive maintenant à $6$ m de hauteur : il est descendu de $0{,}3$ m.

### 3.

Un barreau est fixé au milieu $I$ de l'échelle. Calculer la distance $IC$ entre ce barreau et le pied du mur. Cette distance change-t-elle quand on déplace le pied de l'échelle ?

INDICE

**Outil :** la propriété du milieu de l'hypoténuse.

**Début :** dans le triangle rectangle en $C$, l'hypoténuse est l'échelle.

CORRIGÉ

Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, et le barreau $I$ est le milieu de son hypoténuse $[AB]$. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $IC$ est la moitié de $AB$ :

$$IC = \frac{AB}{2} = \frac{6{,}5}{2} = 3{,}25.$$

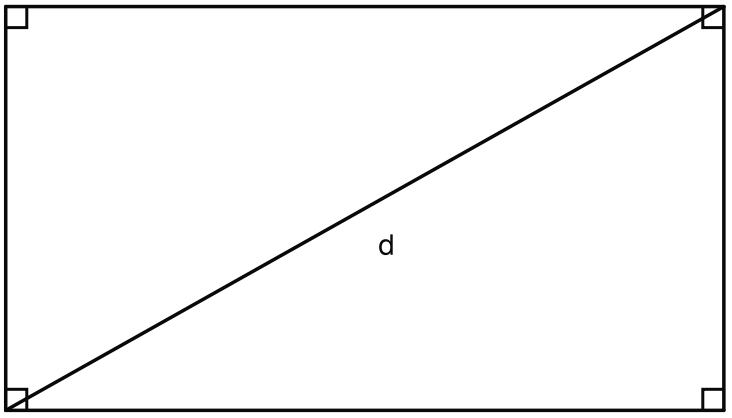
Ce calcul n'utilise que la longueur de l'échelle, pas la place de son pied. Dans toutes les positions, le triangle reste rectangle au pied du mur, avec la même hypoténuse de $6{,}5$ m.

**Conclusion.** Le barreau est à $3{,}25$ m du pied du mur, et cette distance ne change pas quand on déplace le pied de l'échelle.

### Exercice 4

## La diagonale de deux écrans

Rappel de 1re année : un rectangle a quatre angles droits. La diagonale d'un écran rectangulaire partage l'écran en deux triangles rectangles.




**Un écran rectangulaire et sa diagonale d, qui le partage en deux triangles rectangles de côtés largeur et hauteur.**

### 1.

Un écran de télévision mesure $48$ cm de largeur et $27$ cm de hauteur. Calculer sa diagonale $d$ : valeur exacte, puis valeur approchée au centième près.

INDICE

**Début :** la diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $48$ et $27$.

**Outil :** le théorème de Pythagore, puis la calculatrice.

CORRIGÉ

Un coin de l'écran est un angle droit. La diagonale et deux côtés de l'écran forment un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est la diagonale. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d^2 &= 48^2 + 27^2 \\ &= 2\,304 + 729 \\ &= 3\,033. \end{aligned}$$

Le nombre $3\,033$ n'est le carré d'aucun entier, car $55^2 = 3\,025$ et $56^2 = 3\,136$. Une longueur est positive, donc $d = \sqrt{3\,033}$ cm : c'est la valeur exacte.

À la calculatrice, $d \approx 55{,}07$ cm au centième près.

**Conclusion.** La diagonale vaut $\sqrt{3\,033}$ cm, soit $55{,}07$ cm environ, au centième près.

### 2.

Un second écran a une diagonale de $50$ cm et une largeur de $40$ cm. Calculer sa hauteur.

INDICE

**Début :** cette fois, l'hypoténuse est connue.

**Outil :** isole le carré de la hauteur dans l'égalité de Pythagore.

CORRIGÉ

Notons $h$ la hauteur, en centimètres. La diagonale est l'hypoténuse du triangle rectangle formé par la largeur et la hauteur. D'après le théorème de Pythagore, $50^2 = 40^2 + h^2$.

On isole $h^2$, avec $50^2 = 2\,500$ et $40^2 = 1\,600$ :

$$h^2 = 2\,500 - 1\,600 = 900.$$

On a $30^2 = 900$ et $30 \geq 0$, donc $h = 30$.

**Conclusion.** La hauteur du second écran vaut $30$ cm.

### 3.

Quel écran a la plus grande diagonale ? Quel écran a la plus grande surface ?

INDICE

**Outil :** l'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur.

CORRIGÉ

**Diagonales.** D'après la question 1, la diagonale du premier écran vaut $55{,}07$ cm environ, au centième près. Elle dépasse les $50$ cm du second, car $3\,033 > 2\,500$, c'est-à-dire $d^2 > 50^2$.

**Surfaces.** L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur. Les aires valent $48 \times 27 = 1\,296$ cm² pour le premier écran et $40 \times 30 = 1\,200$ cm² pour le second.

**Conclusion.** Le premier écran a à la fois la plus grande diagonale et la plus grande surface.

### Exercice 5

## Racine de deux n'est pas un nombre décimal

La calculatrice affiche $1{,}414213562$ pour $\sqrt{2}$. Elle ne montre que dix chiffres. On veut prouver qu'aucun nombre décimal n'est égal à $\sqrt{2}$.

On raisonne ainsi : on suppose le contraire, et on arrive à une chose impossible. Cette chose impossible s'appelle une **contradiction**. Elle montre que la supposition de départ était fausse.

Rappel : un nombre décimal s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule. On l'écrit sans zéro inutile à la fin.

**1.**

Calculer les carrés des entiers de $0$ à $9$ et noter le chiffre des unités de chacun. En déduire : si le carré d'un entier se termine par $0$, alors cet entier se termine par $0$.

INDICE

**Outil :** dans une multiplication posée, le chiffre des unités du produit ne dépend que des chiffres des unités des deux facteurs.

**Début :** calcule $0^2$, $1^2$, …, $9^2$.

CORRIGÉ

**Chiffre des unités d'un carré.** Dans une multiplication posée, le chiffre des unités du produit est celui du produit des deux chiffres des unités. Les autres chiffres ne donnent que des dizaines, des centaines, et ainsi de suite.

Le carré d'un entier a donc le même chiffre des unités que le carré de son chiffre des unités. Par exemple, $23^2 = 529$ se termine par $9$, comme $3^2 = 9$.

**Les dix carrés.** Les carrés de $0$ à $9$ sont $0$, $1$, $4$, $9$, $16$, $25$, $36$, $49$, $64$ et $81$. Selon le chiffre des unités du nombre, le carré se termine donc par :

- $0$ pour $0$ ;
- $1$ pour $1$ et $9$ ;
- $4$ pour $2$ et $8$ ;
- $9$ pour $3$ et $7$ ;
- $6$ pour $4$ et $6$ ;
- $5$ pour $5$.

**Conclusion.** Seul le chiffre des unités $0$ donne un carré terminé par $0$. Donc si le carré d'un entier se termine par $0$, cet entier se termine par $0$.

### 2.

Expliquer pourquoi $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

INDICE

**Début :** compare $2$ aux carrés $1^2$ et $2^2$.

CORRIGÉ

Le nombre $\sqrt{2}$ est positif, et son carré vaut $2$.

Les carrés des premiers entiers sont $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$ ; ceux des entiers plus grands dépassent $4$. Comme $1 < 2 < 4$, aucun entier positif n'a pour carré $2$.

**Conclusion.** Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

### 3.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre décimal $d$, avec $n$ chiffres après la virgule ($n \geq 1$). En effaçant la virgule de $d$, on obtient un entier $N$, et $d = \dfrac{N}{10^n}$. Par exemple, pour $d = 1{,}41$, on aurait $n = 2$ et $N = 141$, car $1{,}41 = \dfrac{141}{100}$.

a) Expliquer pourquoi $N$ ne se termine pas par $0$.

b) Justifier que $N^2 = 2 \times 10^{2n}$.

INDICE

**Début :** le dernier chiffre de $N$ est le dernier chiffre après la virgule de $d$.

**Outil :** $\left(\dfrac{N}{10^n}\right)^2 = \dfrac{N^2}{10^{2n}}$, d'après les règles des puissances.

CORRIGÉ

**a) Dernier chiffre.** Le dernier chiffre de $N$ est le dernier chiffre de $d$ après la virgule. Ce chiffre n'est pas $0$, car $d$ est écrit sans zéro inutile.

**b) Carré.** Par définition de la racine carrée, $d^2 = 2$. On remplace $d$ par $\dfrac{N}{10^n}$ ; d'après les règles des puissances :

$$d^2 = \frac{N^2}{(10^n)^2} = \frac{N^2}{10^{2n}}.$$

Donc $\dfrac{N^2}{10^{2n}} = 2$. On multiplie les deux membres par $10^{2n}$ : $N^2 = 2 \times 10^{2n}$.

**Conclusion.** L'entier $N$ ne se termine pas par $0$, et $N^2 = 2 \times 10^{2n}$.

### 4.

Donner le chiffre des unités de $2 \times 10^{2n}$. En déduire une contradiction avec la question 3, puis conclure.

INDICE

**Début :** écris $2 \times 10^{2n}$ en chiffres : un $2$ suivi de combien de zéros ?

**Ensuite :** utilise la question 1.

CORRIGÉ

**Chiffre des unités.** Le nombre $2 \times 10^{2n}$ s'écrit avec un $2$ suivi de $2n$ zéros. Comme $n \geq 1$, il se termine par $0$.

**Contradiction.** D'après la question 3, $N^2$ se termine donc par $0$. D'après la question 1, $N$ se termine alors par $0$. Or la question 3 dit aussi que $N$ ne se termine pas par $0$ : c'est impossible.

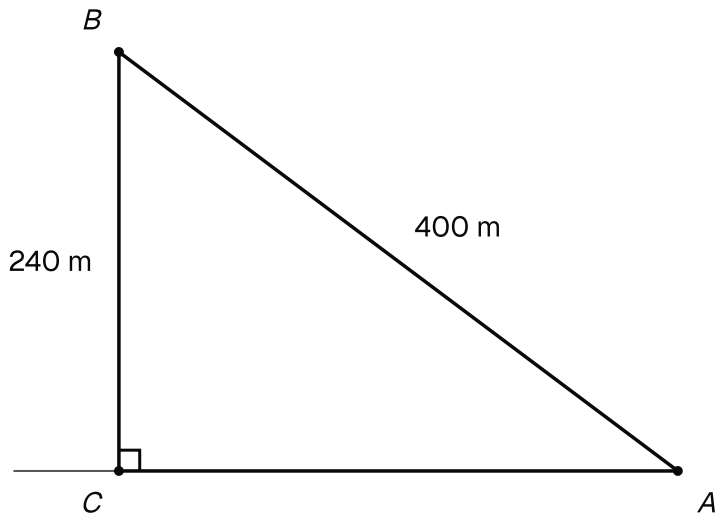
**Conclusion.** La supposition de la question 3 mène à une contradiction : elle est donc fausse. Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un décimal ayant des chiffres après la virgule. Avec la question 2, il n'est pas entier non plus. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

**Attention.** Cet exercice ne prouve pas que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas comme un quotient de deux entiers. Un tel quotient n'est pas toujours un nombre décimal. Ce résultat du cours reste admis.

### Exercice 6

## Le câble d'un téléski

Le câble d'un téléski relie le départ $A$ à l'arrivée $B$, avec $AB = 400$ m. Le point $C$ est à la même altitude que $A$, juste sous $B$, et le dénivelé vaut $BC = 240$ m. Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$.




**Le câble [AB] de 400 m du téléski et le dénivelé [BC] de 240 m, dans le triangle ABC rectangle en C.**

**1.**

Calculer la distance horizontale $AC$.

INDICE

**Outil :** le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse $[AB]$.

**Début :** isole $AC^2$.

CORRIGÉ

Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

On isole $AC^2$, avec $AB^2 = 400^2 = 160\,000$ et $BC^2 = 240^2 = 57\,600$ :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 - BC^2 \\ &= 160\,000 - 57\,600 \\ &= 102\,400. \end{aligned}$$

On a $320^2 = 102\,400$ et $320 \geq 0$, donc $AC = 320$ m.

**Conclusion.** La distance horizontale $AC$ vaut $320$ m.

### 2.

En déduire $\cos \widehat{BAC}$.

INDICE

**Outil :** la définition du cosinus.

**Début :** repère le côté adjacent à l'angle de sommet $A$ ; sa longueur vient de la question 1.

CORRIGÉ

Pour l'angle $\widehat{BAC}$, le côté adjacent est $[AC]$, et l'hypoténuse est $[AB]$. D'après la définition du cosinus et la question 1 :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{BAC} &= \frac{AC}{AB} = \frac{320}{400} \\ &= 0{,}8.\end{aligned}$$

**Conclusion.** On a $\cos \widehat{BAC} = 0{,}8$.

### 3.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.

INDICE

**Outil :** la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice.

**Point délicat :** vérifie d'abord le mode degrés.

CORRIGÉ

On vérifie que la calculatrice est réglée en degrés. La touche $\cos^{-1}$ appliquée à $0{,}8$ affiche $36{,}86989765$.

Le chiffre des centièmes est $6$ : on arrondit au dixième supérieur.

**Conclusion.** On a $\widehat{BAC} \approx 36{,}9°$ au dixième de degré près.

### 4.

À la calculatrice, donner $\cos 20°$ au millième près. Puis donner, au dixième de degré près, la mesure d'un angle aigu dont le cosinus vaut $0{,}25$.

INDICE

**Outil :** la touche $\cos$ pour le premier calcul, la touche $\cos^{-1}$ pour le second, en mode degrés.

CORRIGÉ

**Cosinus de $20°$.** En mode degrés, la calculatrice affiche $0{,}9396926208$ pour $\cos 20°$. Le chiffre des dix-millièmes est $6$, donc $\cos 20° \approx 0{,}940$ au millième près.

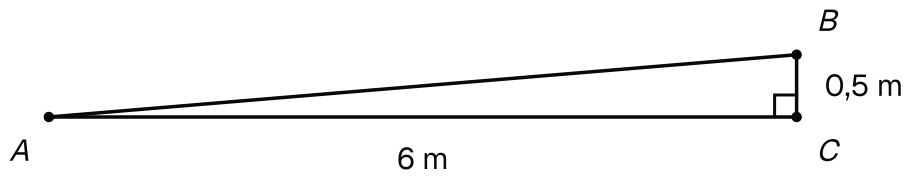
**Angle de cosinus $0{,}25$.** La touche $\cos^{-1}$ appliquée à $0{,}25$ affiche $75{,}52248781$. L'angle mesure donc $75{,}5°$ environ, au dixième de degré près.

**Conclusion.** On a $\cos 20° \approx 0{,}940$ au millième près, et l'angle aigu de cosinus $0{,}25$ mesure $75{,}5°$ environ, au dixième de degré près.

### Exercice 7

## Une rampe d'accès pour fauteuil roulant

Pour entrer dans une école, un fauteuil roulant doit monter une marche de $0{,}5$ m. On construit une rampe $[AB]$ : le point $A$ est au sol, le point $B$ en haut de la marche. Le point $C$ est au pied de la marche, et $AC = 6$ m. Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$.




**La rampe [AB] devant la marche de 0,5 m, avec le point C au pied de la marche, à 6 m du point A.**

#### 1.

Calculer la longueur $AB$ de la rampe : valeur exacte, puis valeur approchée au centième près.

INDICE

**Outil :** le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse $[AB]$.

**Ensuite :** garde la racine carrée pour la valeur exacte.

CORRIGÉ

Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, d'hypoténuse $[AB]$. Ici $AC = 6$ m, et $BC = 0{,}5$ m est la hauteur de la marche. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 36 + 0{,}25 = 36{,}25. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $AB = \sqrt{36{,}25}$ m : c'est la valeur exacte.

À la calculatrice, $AB \approx 6{,}02$ m au centième près.

**Conclusion.** La rampe mesure $\sqrt{36{,}25}$ m, soit $6{,}02$ m environ, au centième près.

### 2.

Écrire $\cos \widehat{BAC}$ avec la valeur exacte de $AB$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.

INDICE

**Début :** le côté adjacent à l'angle de sommet $A$ est $[AC]$.

**Point délicat :** tape $6 \div \sqrt{36{,}25}$, pas la valeur arrondie de $AB$.

CORRIGÉ

Pour l'angle $\widehat{BAC}$, le côté adjacent est $[AC]$, et l'hypoténuse est $[AB]$. D'après la définition du cosinus, avec la valeur exacte de $AB$ :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{BAC} &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{6}{\sqrt{36{,}25}}.\end{aligned}$$

En mode degrés, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à ce quotient affiche $4{,}763641691$. Le chiffre des centièmes est $6$ : on arrondit au dixième supérieur.

**Conclusion.** On a $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{6}{\sqrt{36{,}25}}$ et $\widehat{BAC} \approx 4{,}8°$ au dixième de degré près.

### 3.

Le plan de la rampe impose un angle avec le sol d'au plus $5°$. Cette rampe convient-elle ?

INDICE

**Outil :** compare la mesure trouvée à la question 2 avec $5°$.

CORRIGÉ

À la question 2, la calculatrice affiche $4{,}763641691$ pour la mesure de l'angle en degrés. Ce nombre est plus petit que $5$.

L'angle de la rampe avec le sol ne dépasse donc pas $5°$.

**Conclusion.** L'angle respecte la limite du plan : la rampe convient.