BURHAN

Le triangle rectangle et le cercle : exercices, application

2ème Année Collège · Mathématiques

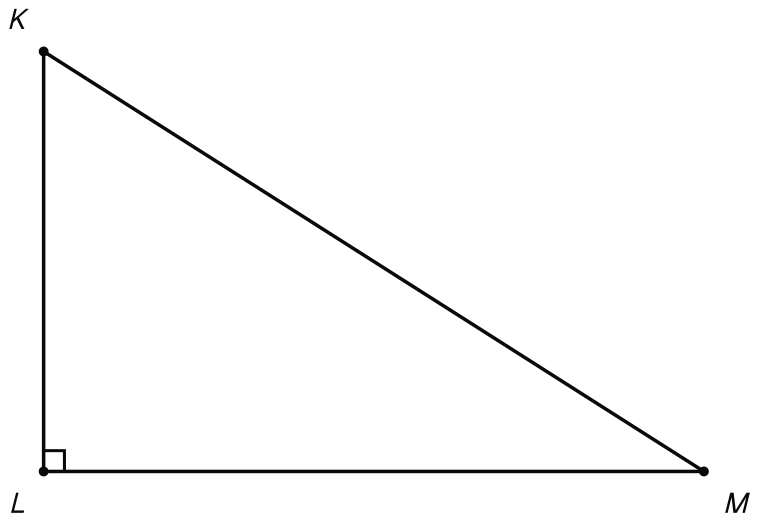
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-cercle/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le triangle rectangle et le cercle	Application	8

Exercice 1

Le vocabulaire sur une équerre de menuisier

Une équerre de menuisier a la forme d'un triangle KLM rectangle en L. Trace ce triangle sur ton cahier et code l'angle droit.



L'équerre de menuisier schématisée par le triangle KLM, avec son angle droit codé en L.

1.

Nommer l'hypoténuse du triangle KLM, puis ses deux côtés de l'angle droit.

INDICE

Outil : l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.

Début : repère le sommet de l'angle droit.

CORRIGÉ

L'angle droit du triangle KLM a pour sommet L.

D'après la définition du triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : c'est $[KM]$.

Les côtés de l'angle droit sont les deux côtés qui partent du sommet L : $[LK]$ et $[LM]$.

Conclusion. L'hypoténuse du triangle KLM est $[KM]$, et ses côtés de l'angle droit sont $[LK]$ et $[LM]$.

2.

Écrire l'égalité de Pythagore pour le triangle KLM.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore.

Point délicat : l'hypoténuse est seule dans le premier membre.

CORRIGÉ

Le triangle KLM est rectangle en L, et son hypoténuse est $[KM]$.

D'après le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse seule dans le premier membre :

$$KM^2 = LK^2 + LM^2.$$

Conclusion. Pour le triangle KLM, l'égalité de Pythagore s'écrit $KM^2 = LK^2 + LM^2$.

3.

Dans un autre triangle PQR, on sait que $\widehat{QPR} = 90°$. Nommer son hypoténuse.

INDICE

Début : dans l'écriture $\widehat{QPR}$, le sommet de l'angle est la lettre du milieu.

CORRIGÉ

Dans l'écriture $\widehat{QPR}$, la lettre du milieu est P : c'est le sommet de l'angle droit. Le triangle PQR est donc rectangle en P.

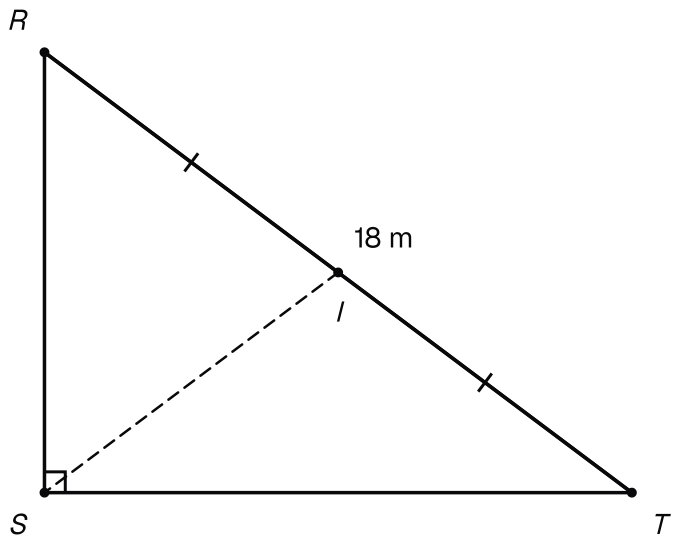
L'hypoténuse est le côté opposé au sommet P : c'est $[QR]$.

Conclusion. L'hypoténuse du triangle PQR est le segment $[QR]$.

Exercice 2

Un arroseur au milieu du jardin

Un jardin a la forme d'un triangle RST rectangle en S. Son plus grand côté mesure $RT = 18$ m. Un arroseur est placé au point I, milieu du segment $[RT]$.



Le jardin RST rectangle en S, son grand côté [RT] de 18 m et l'arroseur I placé au milieu de ce côté.

1.

Calculer la distance IS entre l'arroseur et le coin S.

INDICE

Outil : la propriété du milieu de l'hypoténuse.

Début : repère d'abord l'hypoténuse du triangle RST.

CORRIGÉ

Le triangle RST est rectangle en S. Son hypoténuse est donc $[RT]$, le côté opposé au sommet S, et I en est le milieu.

D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, la distance IS est la moitié de RT :

$$IS = \frac{RT}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Conclusion. L'arroseur est à 9 m du coin S.

2.

L'eau de l'arroseur va jusqu'à 9 m. Atteint-elle les trois coins R, S et T du jardin ?

INDICE

Outil : la même propriété donne aussi les distances IR et IT.

CORRIGÉ

Le point I est le milieu de $[RT]$: il coupe ce segment en deux moitiés de même longueur.

$$IR = IT = \frac{18}{2} = 9.$$

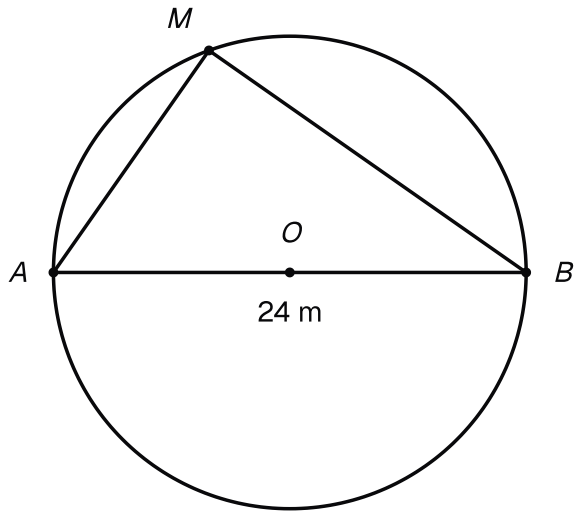
Avec la question 1, on obtient $IR = IS = IT = 9$ m. Les trois coins sont donc sur le cercle de centre I et de rayon 9 m.

Conclusion. L'eau porte à 9 m : elle atteint les trois coins R, S et T du jardin.

Exercice 3

Une borne sur le bord d'un rond-point

Un rond-point a la forme d'un cercle de centre O. Le segment $[AB]$ est un diamètre de ce cercle, et $AB = 24$ m. Une borne M est posée sur le bord du rond-point, distincte de A et de B.



Le rond-point de centre O, son diamètre [AB] de 24 m et la borne M posée sur le bord, reliée à A et à B.

1.

Quelle est la nature du triangle AMB ? Justifier.

INDICE

Outil : la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle.

Début : vérifie où se trouve le point M.

CORRIGÉ

Le point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, et il est distinct de A et de B.

On peut donc utiliser la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle. Elle met l'angle droit au sommet situé sur le cercle, ici le point M.

Conclusion. Le triangle AMB est rectangle en M.

2.

On mesure $\widehat{MBA} = 35°$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MAB}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Début : utilise l'angle droit trouvé à la question 1.

CORRIGÉ

Rappel de 1re année : les trois angles d'un triangle ont pour somme $180°$.

D'après la question 1, le triangle AMB est rectangle en M : l'angle en M mesure $90°$. On retire de $180°$ les deux angles connus :

$$\begin{aligned}\widehat{MAB} &= 180° - 90° - 35° \\ &= 55°.\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{MAB}$ mesure $55°$.

3.

Calculer la distance OM entre le centre et la borne.

INDICE

Outil : le segment $[OM]$ est un rayon du cercle.

CORRIGÉ

Le point M est sur le cercle de centre O : le segment $[OM]$ est un rayon. Un rayon mesure la moitié du diamètre $[AB]$:

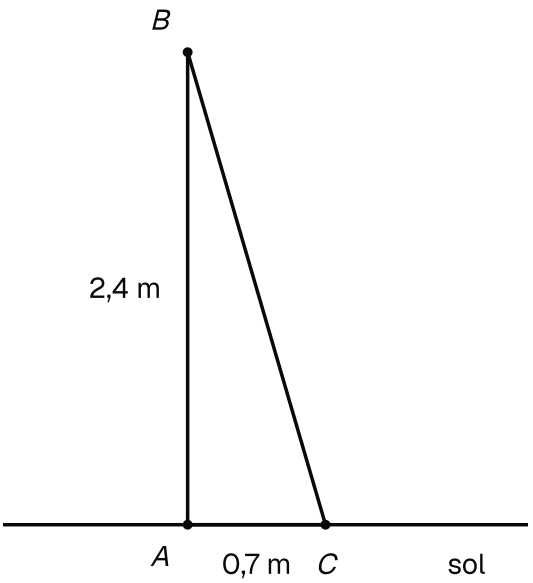
$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Conclusion. La borne est à 12 m du centre du rond-point.

Exercice 4

La longueur d'un câble tendu

Un poteau vertical $[AB]$ mesure $2{,}4$ m. Un câble tendu relie son sommet B à un piquet C planté dans le sol horizontal, à $0{,}7$ m du pied A du poteau.



Le poteau vertical [AB] de 2,4 m, le câble [BC] tendu jusqu'au piquet C, planté à 0,7 m du pied A.

1.

Expliquer pourquoi le triangle ABC est rectangle en A, puis calculer la longueur BC du câble.

INDICE

Début : le poteau est vertical et le sol est horizontal.

Outil : le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse $[BC]$.

CORRIGÉ

Angle droit. Le poteau est vertical et le sol est horizontal : ils sont perpendiculaires en A. Le triangle ABC est donc rectangle en A, et son hypoténuse est $[BC]$.

Égalité de Pythagore. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 2{,}4^2 + 0{,}7^2 \\ &= 5{,}76 + 0{,}49 = 6{,}25. \end{aligned}$$

Racine carrée. On a $2{,}5^2 = 6{,}25$ et $2{,}5 \geq 0$. Donc $BC = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en A, et le câble mesure $2{,}5$ m.

2.

Le triangle DEF est rectangle en D, avec $DE = 5$ cm et $DF = 7$ cm. Calculer EF : donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième près.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore.

Ensuite : 74 n'est le carré d'aucun entier ; garde la racine carrée, puis utilise la calculatrice.

CORRIGÉ

Le triangle DEF est rectangle en D, d'hypoténuse $[EF]$. On a $DE^2 = 5^2 = 25$ et $DF^2 = 7^2 = 49$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} EF^2 &= DE^2 + DF^2 \\ &= 25 + 49 = 74. \end{aligned}$$

Le nombre 74 n'est le carré d'aucun entier, car $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$. Une longueur est positive, donc $EF = \sqrt{74}$ cm : c'est la valeur exacte.

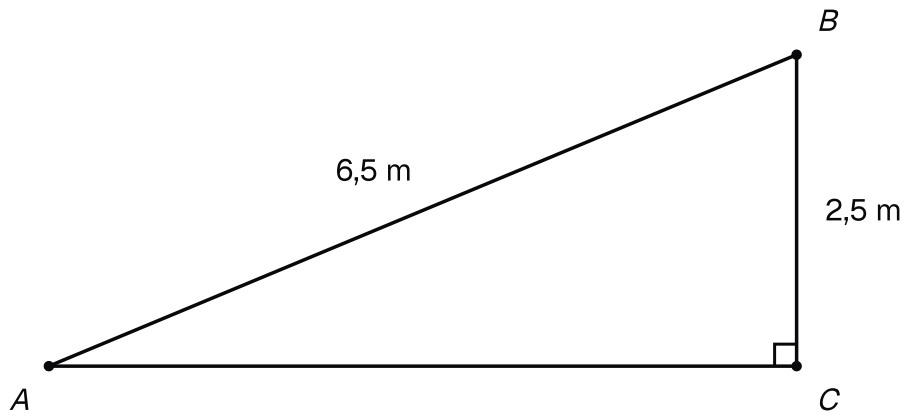
À la calculatrice, $EF \approx 8{,}60$ cm au centième près.

Conclusion. La valeur exacte est $EF = \sqrt{74}$ cm, et une valeur approchée est $8{,}60$ cm, au centième près.

Exercice 5

La largeur sous la pente d'un toit

Sous un toit, une poutre inclinée $[AB]$ mesure $6{,}5$ m. Le triangle ABC est rectangle en C : le poteau $[BC]$ est vertical, de hauteur $2{,}5$ m, et $[AC]$ est horizontal.



Le triangle ABC rectangle en C sous le toit : la poutre inclinée [AB] de 6,5 m et le poteau vertical [BC] de 2,5 m.

1.

Calculer la longueur AC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse $[AB]$.

Début : écris l'égalité complète, puis isole AC^2.

CORRIGÉ

Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

On isole AC^2 en retirant BC^2 des deux membres, puis on calcule :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 - BC^2 \\ &= 6{,}5^2 - 2{,}5^2 \\ &= 42{,}25 - 6{,}25 = 36. \end{aligned}$$

On a $6^2 = 36$ et $6 \geq 0$, donc $AC = \sqrt{36} = 6$.

Conclusion. La longueur AC vaut 6 m.

2.

Le triangle GHI est rectangle en H, avec $GI = 8$ cm et $GH = 3$ cm. Calculer HI : valeur exacte, puis valeur approchée au centième près.

INDICE

Début : l'hypoténuse est $[GI]$.

Outil : isole HI^2, puis prends sa racine carrée.

CORRIGÉ

Le triangle GHI est rectangle en H, d'hypoténuse $[GI]$. D'après le théorème de Pythagore, $GI^2 = GH^2 + HI^2$. On isole HI^2, avec $GI^2 = 64$ et $GH^2 = 9$:

$$\begin{aligned} HI^2 &= GI^2 - GH^2 \\ &= 64 - 9 = 55. \end{aligned}$$

Le nombre 55 est strictement entre $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$: ce n'est le carré d'aucun entier. Comme HI est positif, $HI = \sqrt{55}$ cm : c'est la valeur exacte.

À la calculatrice, $HI \approx 7{,}42$ cm au centième près.

Conclusion. On trouve $HI = \sqrt{55}$ cm, soit $7{,}42$ cm environ, au centième près.

Exercice 6

Racines carrées exactes et approchées

1.

Donner, en justifiant, $\sqrt{144}$, $\sqrt{0{,}81}$ et $\sqrt{1}$.

INDICE

Outil : la définition de la racine carrée.

Début : cherche un nombre positif dont le carré est égal au nombre donné.

CORRIGÉ

Rappel : pour un nombre a positif ou nul, $\sqrt{a}$ est le nombre positif ou nul qui a pour carré a. Pour chaque nombre, on cherche donc un nombre positif de ce carré :

- $\sqrt{144} = 12$, car $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$;
- $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, car $0{,}9 \geq 0$ et $0{,}9^2 = 0{,}81$;
- $\sqrt{1} = 1$, car $1 \geq 0$ et $1^2 = 1$.

Conclusion. On a $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$ et $\sqrt{1} = 1$.

2.

Calculer 5^2 et 6^2. Le nombre 30 est-il le carré d'un nombre entier ? Donner une valeur approchée de $\sqrt{30}$ au centième près.

INDICE

Début : compare 30 aux carrés de 5 et de 6.

Ensuite : utilise la touche racine carrée de la calculatrice.

CORRIGÉ

Deux carrés. On a $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$.

Le nombre 30. Les carrés des entiers de 0 à 6 sont 0, 1, 4, 9, 16, 25 et 36. Au-delà de 6, les carrés dépassent 36. Un entier négatif a le même carré que son opposé.

Or 30 est strictement entre 25 et 36 : ce n'est le carré d'aucun entier. On garde donc l'écriture exacte $\sqrt{30}$.

Valeur approchée. La calculatrice affiche $5{,}477225575$. Le chiffre des millièmes est 7, donc on arrondit au centième supérieur : $\sqrt{30} \approx 5{,}48$ au centième près.

Conclusion. Le nombre 30 n'est pas le carré d'un entier, et $\sqrt{30}$ vaut $5{,}48$ environ, au centième près.

3.

Un carreau carré a une aire de 50 cm². Donner la longueur exacte de son côté, puis une valeur approchée au dixième près.

INDICE

Outil : l'aire d'un carré de côté c vaut c^2.

Début : cherche le nombre positif c tel que $c^2 = 50$.

CORRIGÉ

Rappel : un carré de côté c a pour aire c^2. Ici $c^2 = 50$. Le côté c est une longueur, donc $c \geq 0$.

D'après la définition de la racine carrée, $c = \sqrt{50}$ cm : c'est la valeur exacte.

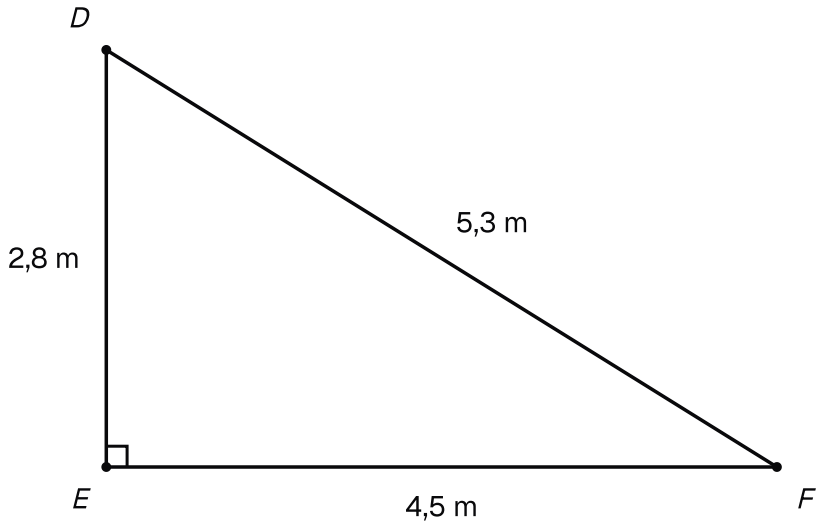
À la calculatrice, $c \approx 7{,}1$ cm au dixième près.

Conclusion. Le côté du carreau mesure $\sqrt{50}$ cm, soit $7{,}1$ cm environ, au dixième près.

Exercice 7

Les cosinus d'une voile triangulaire

La voile d'un bateau a la forme d'un triangle DEF rectangle en E, avec $DE = 2{,}8$ m, $EF = 4{,}5$ m et $DF = 5{,}3$ m.



La voile DEF rectangle en E, avec ses trois côtés : DE = 2,8 m, EF = 4,5 m et DF = 5,3 m.

1.

Calculer $\cos \widehat{EDF}$: écrire le quotient sous forme de fraction, puis donner une valeur approchée au centième près.

INDICE

Outil : la définition du cosinus.

Début : le côté adjacent à l'angle $\widehat{EDF}$ est le côté de l'angle droit qui part de D.

CORRIGÉ

Le triangle DEF est rectangle en E, d'hypoténuse $[DF]$. Pour l'angle $\widehat{EDF}$, on cherche parmi $[DE]$ et $[EF]$ celui qui part du sommet D : le côté adjacent est $[DE]$.

D'après la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{EDF} = \frac{DE}{DF} = \frac{2{,}8}{5{,}3} = \frac{28}{53}.$$

La dernière égalité vient de la multiplication du numérateur et du dénominateur par 10.

À la calculatrice, $\cos \widehat{EDF} \approx 0{,}53$ au centième près.

Conclusion. On a $\cos \widehat{EDF} = \dfrac{28}{53}$, soit $0{,}53$ environ, au centième près.

2.

Calculer de même $\cos \widehat{DFE}$.

INDICE

Point délicat : pour l'angle de sommet F, le côté adjacent n'est plus le même.

CORRIGÉ

Pour l'angle $\widehat{DFE}$, de sommet F, le côté adjacent est $[FE]$. L'hypoténuse reste $[DF]$.

D'après la définition du cosinus :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{DFE} &= \frac{FE}{FD} = \frac{4{,}5}{5{,}3} \\ &= \frac{45}{53}.\end{aligned}$$

À la calculatrice, $\cos \widehat{DFE} \approx 0{,}85$ au centième près.

Conclusion. On a $\cos \widehat{DFE} = \dfrac{45}{53}$, soit $0{,}85$ environ, au centième près.

3.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{EDF}$ au dixième de degré près.

INDICE

Outil : la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice réglée en degrés.

Point délicat : tape la fraction exacte, pas la valeur arrondie.

CORRIGÉ

On règle la calculatrice en degrés. On tape la touche $\cos^{-1}$, puis la fraction exacte $28 \div 53$ de la question 1. L'écran affiche $58{,}10920820$.

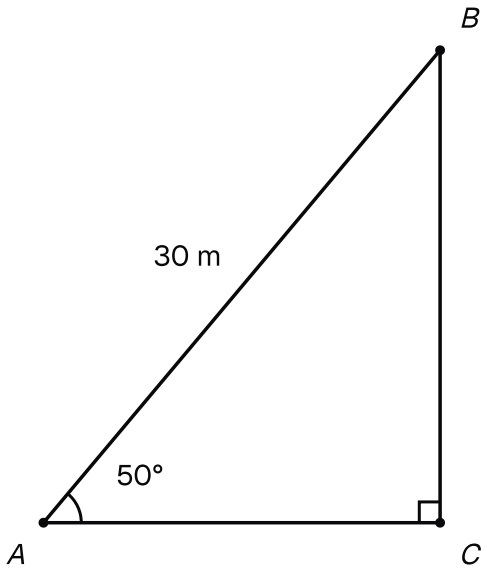
Le chiffre des centièmes est 1 : on garde $58{,}1$.

Conclusion. On a $\widehat{EDF} \approx 58{,}1^\circ$ au dixième de degré près.

Exercice 8

Le fil d'un cerf-volant

Le fil tendu d'un cerf-volant relie la main A d'un enfant au cerf-volant B. Il mesure $AB = 30$ m. Le point C est sur l'horizontale qui passe par A, juste sous le cerf-volant : le triangle ABC est rectangle en C, et $\widehat{BAC} = 50°$.



Le fil [AB] de 30 m entre la main A et le cerf-volant B, qui fait un angle de 50 degrés avec l'horizontale de A.

1.

Calculer la distance horizontale AC, au centième près.

INDICE

Outil : la définition du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Début : repère le côté adjacent et l'hypoténuse, puis multiplie.

CORRIGÉ

Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse $[AB]$. Pour l'angle $\widehat{BAC}$, le côté adjacent est $[AC]$.

D'après la définition du cosinus, $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$. On multiplie les deux membres par AB :

$$\begin{aligned} AC &= AB \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 30 \times \cos 50°. \end{aligned}$$

La calculatrice réglée en degrés donne $AC \approx 19{,}28$ m au centième près.

Conclusion. La distance horizontale AC vaut $19{,}28$ m environ, au centième près.

2.

Le triangle MNP est rectangle en N, avec $\widehat{NMP} = 35^\circ$ et $MN = 6$ cm. Calculer MP au centième près.

INDICE

Début : $[MN]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{NMP}$, et $[MP]$ est l'hypoténuse.

Outil : l'hypoténuse s'obtient par une division.

CORRIGÉ

Le triangle MNP est rectangle en N, d'hypoténuse $[MP]$. Pour l'angle $\widehat{NMP}$, le côté adjacent est $[MN]$.

D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{NMP} = \dfrac{MN}{MP}$. On multiplie par MP, puis on divise par $\cos\widehat{NMP}$, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} MP &= \frac{MN}{\cos\widehat{NMP}} \\ &= \frac{6}{\cos 35^\circ}. \end{aligned}$$

Avec la calculatrice en degrés, $MP \approx 7{,}32$ cm au centième près.

Conclusion. L'hypoténuse $[MP]$ mesure $7{,}32$ cm environ, au centième près.