BURHAN

Le triangle rectangle et le cercle

2ème Année Collège · Mathématiques

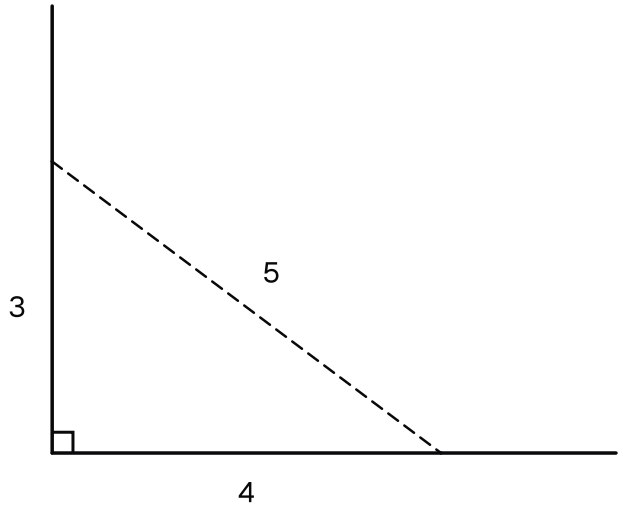
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-cercle/cours

Chapitre	Semestre
Le triangle rectangle et le cercle	Semestre 2

Une équerre, un cercle, une diagonale

Un menuisier fabrique un cadre de fenêtre. Ses deux montants doivent former un angle droit. Il mesure 3 dm sur un montant et 4 dm sur l'autre. Avec un vrai angle droit, la diagonale entre ces deux marques mesure 5 dm.

Pourquoi 5 dm, et pas 7 dm ? Ce chapitre te donne la réponse. Il commence par une question plus simple : reconnaître un angle droit.



Le coin du cadre de fenêtre : les marques à 3 dm et à 4 dm sur les deux montants, et la diagonale de 5 dm qui les relie.

Devine : Lequel a un angle droit ?

Rappel de 1re année : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Lequel de ces triangles a un angle droit ?

A. Le triangle KLM, avec $\widehat{LKM} = 40°$ et $\widehat{KLM} = 60°$.
Faux.
Son troisième angle mesure $180° - 40° - 60° = 80°$.

B. Le triangle RST, avec $\widehat{SRT} = 35°$ et $\widehat{RST} = 55°$.
Juste.

Juste : son troisième angle mesure $180° - 35° - 55° = 90°$.

C. Le triangle UVW, avec $\widehat{VUW} = 30°$ et $\widehat{UVW} = 30°$.

Faux.

Son troisième angle mesure $180° - 30° - 30° = 120°$.

D. Aucun des trois triangles.

Faux.

Calcule le troisième angle de chaque triangle.

Correction

On calcule le troisième angle de chaque triangle : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Pour RST : $180° - 35° - 55° = 90°$. C'est un angle droit.

Pour KLM, on trouve $80°$. Pour UVW, on trouve $120°$.

Seul le triangle RST a donc un angle droit.

Dans ce chapitre, tu apprends trois outils pour le triangle rectangle.

Le **cercle** d'abord : il permet de prouver qu'un angle est droit. Le **théorème de Pythagore** ensuite : il calcule une longueur à partir de deux autres. Le **cosinus** enfin : il relie un angle et deux longueurs.

Le vocabulaire du triangle rectangle

Le plus long côté

Rappel de 1re année : le cercle circonscrit à un triangle passe par ses trois sommets. Son centre est le point de rencontre des médiatrices des côtés.

Dans ce chapitre, ce cercle t'aide à reconnaître les triangles rectangles.

Devine : Une équerre et une règle

Sur ton cahier, trace avec ton équerre un triangle KLM qui a un angle droit en L. Prends $KL = 3$ cm et $LM = 4$ cm. Quel est le plus long côté ?

A. Le côté $[KL]$.

Faux.

Il mesure 3 cm : c'est le plus court.

B. Le côté $[LM]$.

Faux.

Il mesure 4 cm. Mesure aussi $[KM]$.

C. Deux côtés ont la même longueur.

Faux.

Les trois longueurs sont 3 cm, 4 cm et 5 cm.

D. Le côté $[KM]$.

Juste.

Juste : il mesure 5 cm.

Correction

Tu mesures $KM = 5$ cm : le plus long côté est $[KM]$.

C'est le seul côté qui ne passe pas par le sommet L de l'angle droit : il lui fait face. Ce côté porte un nom.

Hypoténuse et côtés de l'angle droit

Définition : Triangle rectangle et hypoténuse

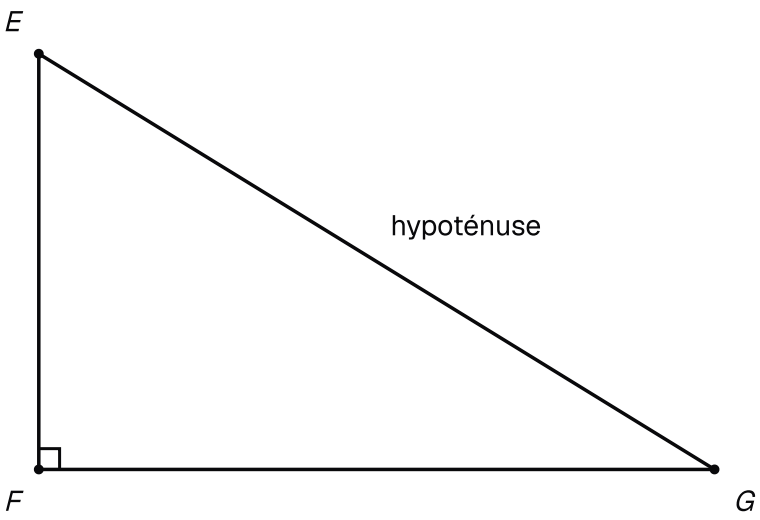
Un triangle **rectangle** est un triangle qui a un angle droit. Dans un triangle ABC rectangle en A :

- le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse** ;
- les côtés $[AB]$ et $[AC]$ s'appellent les **côtés de l'angle droit**.

Exemple : le triangle EFG rectangle en F

Le triangle EFG a un angle droit en F.

- Son hypoténuse est $[EG]$: c'est le côté opposé à l'angle droit.
- Ses côtés de l'angle droit sont $[FE]$ et $[FG]$. Tous deux ont pour extrémité le point F.



Le triangle EFG rectangle en F : son hypoténuse [EG] fait face à l'angle droit, ses deux autres côtés partent de F.

Remarque : repérer l'hypoténuse

Les deux côtés de l'angle droit partent du sommet de l'angle droit. L'hypoténuse est le seul côté qui ne touche pas ce sommet. Pour la trouver, cherche le côté qui fait face à l'angle droit.

En clair. L'angle droit mesure $90°$. Les deux autres angles ont donc pour somme $180° - 90° = 90°$. Chacun d'eux est un **angle aigu** : il mesure moins de $90°$.

À toi

Vérifie : Nommer l'hypoténuse

Le triangle PQR est rectangle en R. Quelle est son hypoténuse ?

A. Le côté $[PR]$.
Faux.
Il passe par R, sommet de l'angle droit : c'est un côté de l'angle droit.

B. Le côté $[PQ]$.
Juste.
Juste : il ne passe pas par R.

C. Le côté $[QR]$.
Faux.
Il passe par R : c'est un côté de l'angle droit.

D. Les côtés $[RP]$ et $[RQ]$.
Faux.
Ce sont les côtés de l'angle droit. L'hypoténuse est un seul côté.

Correction
L'angle droit est en R. Le côté opposé à R est $[PQ]$: c'est l'hypoténuse.

Les côtés $[RP]$ et $[RQ]$ sont les côtés de l'angle droit.

À toi : Un panneau triangulaire

Un panneau a la forme d'un triangle IJK rectangle en K. Nomme son hypoténuse et ses deux côtés de l'angle droit. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère d'abord le sommet de l'angle droit.
Indice 2
Les côtés de l'angle droit partent du point K.
Indice 3
Point délicat : l'hypoténuse est le côté qui ne contient pas K.

Réponse
L'angle droit est en K.

Hypoténuse. C'est le côté opposé à K : c'est $[IJ]$.

Côtés de l'angle droit. Ce sont $[KI]$ et $[KJ]$, qui partent tous deux de K.

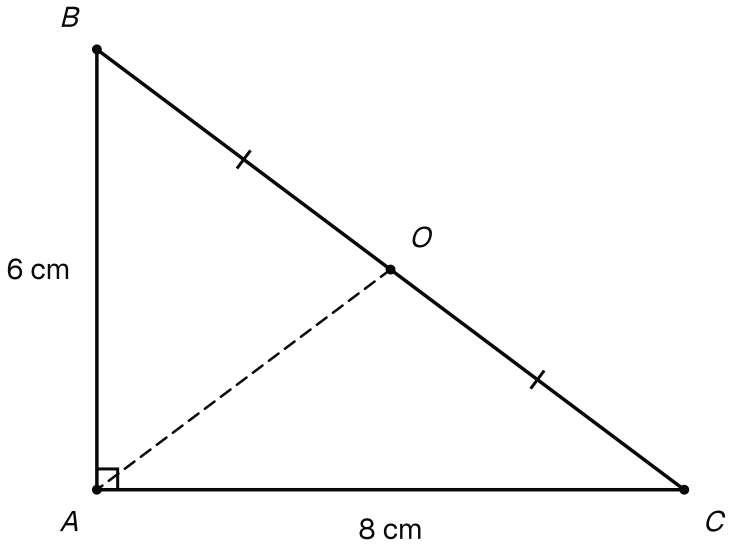
Conclusion. Le triangle IJK a pour hypoténuse $[IJ]$, et ses côtés de l'angle droit sont $[KI]$ et $[KJ]$.

Le milieu de l'hypoténuse

Mesurer trois distances

Sur ton cahier :

1. Trace un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.
2. Place le milieu O de l'hypoténuse $[BC]$.
3. Mesure les distances OA, OB et OC.



La figure à tracer : le triangle ABC rectangle en A, avec AB = 6 cm et AC = 8 cm, et le milieu O de son hypoténuse [BC].

Devine : La distance OA

Tu mesures $BC = 10$ cm, donc $OB = OC = 5$ cm. Que trouves-tu pour la distance OA ?

A. $OA = 4$ cm
Faux.
C'est la moitié de AC. Mesure de nouveau, de O jusqu'à A.

B. $OA = 5$ cm

Juste.

Juste : O est à la même distance des trois sommets.

C. $OA = 3$ cm

Faux.

C'est la moitié de AB. Mesure de nouveau, de O jusqu'à A.

D. $OA = 10$ cm

Faux.

C'est la longueur de l'hypoténuse entière.

Correction

Tu trouves $OA = 5$ cm, comme OB et OC.

Le point O est donc à la même distance des trois sommets. C'est le centre du cercle qui passe par A, B et C.

Pourquoi est-ce vrai ? Une mesure peut être un peu fausse : elle ne prouve rien. L'idée est de compléter le triangle en un rectangle.

Rappel de 1re année : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

La propriété et sa preuve

Propriété : Le milieu de l'hypoténuse

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le milieu O de son hypoténuse $[BC]$ est le centre de son cercle circonscrit :

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}.$$

Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de diamètre $[BC]$.

Démonstration

Étape 1. Soit D le symétrique de A par rapport à O. Le point O est alors le milieu de $[AD]$; il est aussi le milieu de $[BC]$.

Étape 2. Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ du quadrilatère $ABDC$ ont le même milieu O. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Étape 3. Ce parallélogramme a un angle droit en A, car le triangle ABC est rectangle en A. Donc c'est un rectangle.

Étape 4. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur : $AD = BC$. Or $OA = \dfrac{AD}{2}$ et $OB = OC = \dfrac{BC}{2}$, car O est le milieu de $[AD]$ et de $[BC]$. Donc $OA = OB = OC = \dfrac{BC}{2}$.

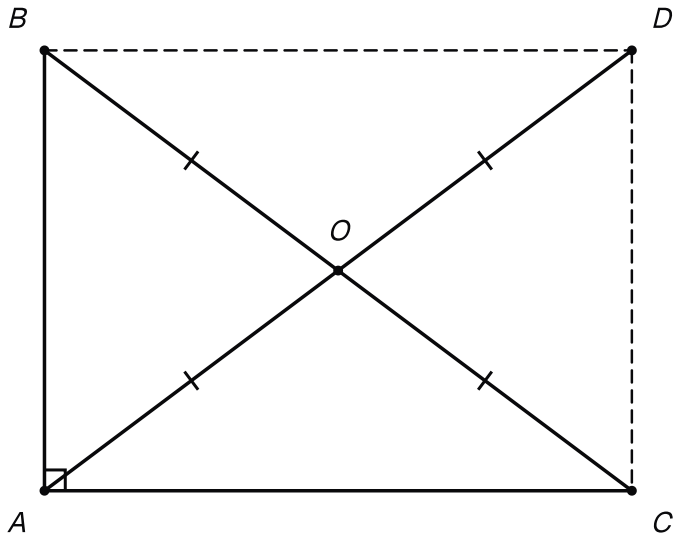
Étape 5. Le point O est à la même distance des trois sommets : il est sur les médiatrices des trois côtés. C'est donc le centre du cercle circonscrit ; son rayon vaut $\dfrac{BC}{2}$, et ce cercle a pour diamètre $[BC]$.

En clair. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à la même distance des trois sommets. Cette distance est la moitié de l'hypoténuse.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **compléter le triangle en un rectangle**.

- On ajoute le point D, symétrique de A par rapport à O : le point O est le milieu de $[AD]$.
- Le quadrilatère $ABDC$ est alors un rectangle.
- Ses diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu O et la même longueur.
- La moitié de l'une est donc égale à la moitié de l'autre : $OA = \dfrac{BC}{2}$.



Le triangle ABC complété en rectangle ABDC : ses diagonales [AD] et [BC] se coupent en leur milieu O.

Vérifie : L'étape 3 de la preuve

Dans la preuve, l'étape 3 conclut : « Donc c'est un rectangle ». Quelle propriété la justifie ?

A. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

Faux.

Cette propriété sert à l'étape 2, pas à l'étape 3.

B. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

Faux.

Cette propriété sert à l'étape 4, une fois le rectangle obtenu.

C. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

Juste.

Juste : l'angle droit en A fait du parallélogramme un rectangle.

D. Le point O est le centre du cercle circonscrit.

Faux.

C'est la conclusion de la preuve : on ne peut pas s'en servir avant.

Correction

À l'étape 2, $ABDC$ est un parallélogramme.

Il a un angle droit en A, car le triangle ABC est rectangle en A.

Or un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle : c'est la propriété qui justifie l'étape 3.

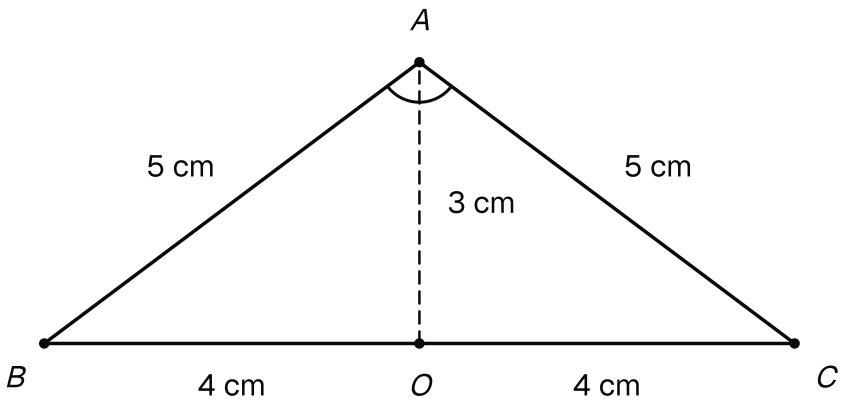
Exemple : Contre-exemple : un triangle sans angle droit

Trace un triangle ABC avec $BC = 8$ cm, $AB = 5$ cm et $AC = 5$ cm.

Le milieu O de $[BC]$ donne $OB = OC = 4$ cm. Mais tu mesures $OA = 3$ cm.

L'angle $\widehat{BAC}$ est plus grand que $90°$: on dit qu'il est **obtus**. Ce n'est pas un angle droit.

La propriété ne s'applique pas : l'hypothèse « rectangle » est nécessaire.

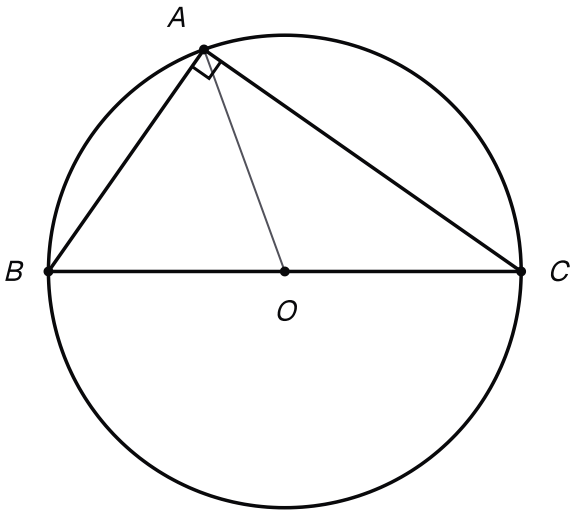


Le triangle isocèle ABC du contre-exemple : le milieu O de [BC] est à 4 cm de B et de C, mais seulement à 3 cm de A.

Utiliser la propriété

En clair. Pour tracer le cercle circonscrit à un triangle rectangle, tu n'as plus besoin des médiatrices.

Pique le compas au milieu de l'hypoténuse. Ouvre-le jusqu'à un sommet, puis trace le cercle : il passe par les trois sommets.



Tracer le cercle circonscrit d'un triangle rectangle : la pointe du compas au milieu O de l'hypoténuse, l'ouverture jusqu'à A.

Méthode : calculer une longueur avec le milieu de l'hypoténuse

1. **Vérifie** que le triangle est rectangle.
2. **Repère** son hypoténuse.
3. **Place** le milieu de l'hypoténuse : il est à la même distance des trois sommets.
4. **Écris** l'égalité utile, par exemple $OA = \dfrac{BC}{2}$ ou $BC = 2 \times OA$, puis calcule.

Exemple : du côté au rayon, et du rayon au côté

- Le triangle ABC est rectangle en A et $BC = 10$ cm. Soit O le milieu de $[BC]$. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $OA = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.
- Le triangle DEF est rectangle en D. Le milieu I de $[EF]$ vérifie $ID = 3{,}5$ cm. D'après la même propriété, $EF = 2 \times ID = 2 \times 3{,}5 = 7$ cm.

Attention : le milieu de l'hypoténuse seulement

✗ « Le triangle ABC est rectangle en A, et I est le milieu de $[AB]$. Donc $IC = \dfrac{AB}{2}$. »

✓ La propriété parle du milieu de l'**hypoténuse**, et de lui seul. Ici l'hypoténuse est $[BC]$: c'est son milieu O qui vérifie $OA = \dfrac{BC}{2}$.

Avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm, tu mesures IC bien plus grand que 3 cm.

À toi

Vérifie : Un lampadaire dans une cour

Une cour a la forme d'un triangle RST rectangle en S, avec $RT = 24$ m. Un lampadaire est placé au milieu L de $[RT]$. À quelle distance du coin S se trouve-t-il ?

A. À 12 m.

Juste.

Juste : $LS = \dfrac{RT}{2}$.

B. À 24 m.

Faux.

C'est la longueur de l'hypoténuse entière ; L est en son milieu.

C. À 6 m.

Faux.

Tu as divisé par 4 : on divise l'hypoténuse par 2.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

Le triangle est rectangle : la propriété du milieu de l'hypoténuse s'applique.

Correction

Le triangle RST est rectangle en S, d'hypoténuse $[RT]$. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $LS = \dfrac{RT}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ m.

À toi : Du milieu à l'hypoténuse

Le triangle DEF est rectangle en E. Le milieu M de $[DF]$ vérifie $ME = 4{,}5$ cm. Calcule DF, puis MD. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère l'hypoténuse : le côté opposé à l'angle droit.

Indice 2

Le point M est le milieu de l'hypoténuse : il est à la même distance de D, E et F.

Indice 3

Point délicat : l'hypoténuse mesure le double de ME, pas la moitié.

Réponse

Le triangle DEF est rectangle en E : son hypoténuse est $[DF]$, et M en est le milieu.

Calcul de DF. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $ME = \dfrac{DF}{2}$. Donc $DF = 2 \times 4{,}5 = 9$ cm.

Calcul de MD. Le point M est à la même distance des trois sommets, donc $MD = ME = 4{,}5$ cm.

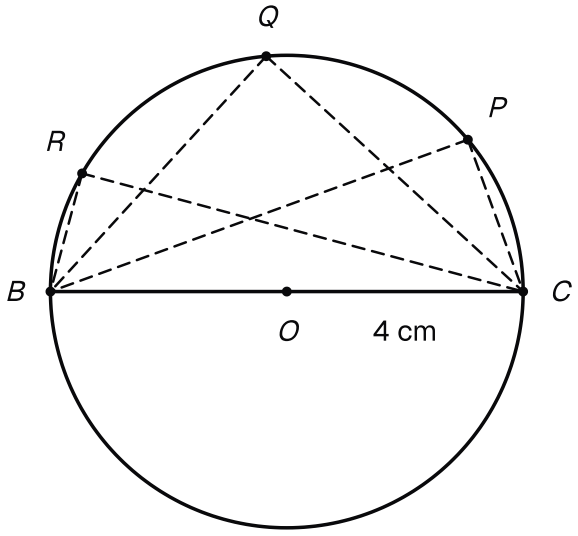
Conclusion. L'hypoténuse mesure 9 cm, et M est à $4{,}5$ cm de D.

Un triangle inscrit dans un demi-cercle

Des points sur un cercle

Sur ton cahier :

1. Trace un segment $[BC]$ de 8 cm et place son milieu O.
2. Trace le cercle de centre O et de rayon 4 cm : c'est le **cercle de diamètre** $[BC]$.
3. Place sur ce cercle trois points P, Q et R, distincts de B et de C.
4. Mesure au rapporteur les angles $\widehat{BPC}$, $\widehat{BQC}$ et $\widehat{BRC}$.



Le cercle de diamètre [BC], avec BC = 8 cm, et trois points P, Q et R choisis sur ce cercle, chacun relié à B et à C.

Devine : Trois angles au rapporteur

Que trouves-tu pour ces trois angles ?

A. Trois angles de $60°$.
Faux.

Mesure de nouveau : chaque angle est plus grand.

B. Des angles différents, selon la place du point.

Faux.

Les points sont à des places différentes, mais les angles sont égaux.

C. Trois angles de $180°$.

Faux.

Un angle de $180°$ est plat : les trois points seraient alignés.

D. Trois angles de $90°$.

Juste.

Juste : les trois triangles sont rectangles.

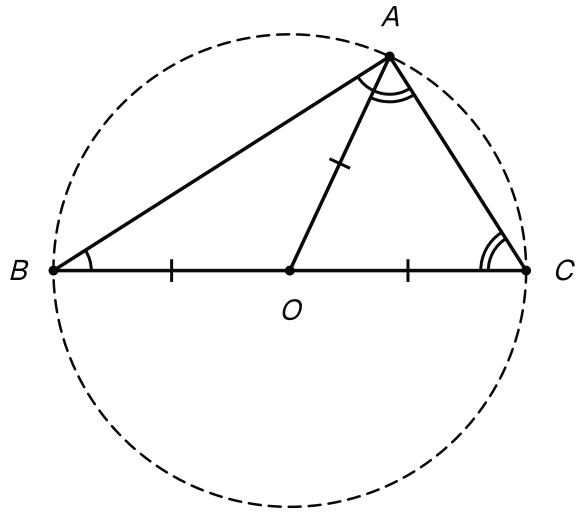
Correction

À la précision du rapporteur près, chaque angle mesure $90°$: les triangles BPC, BQC et BRC sont rectangles.

Il reste à prouver que c'est vrai pour tout point du cercle.

Pourquoi est-ce vrai ? Prends un point A du cercle. Le centre O est à la même distance de A, de B et de C : cela fait apparaître deux triangles isocèles.

Rappel de 1re année : les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$.



Le rayon [OA] coupe le triangle ABC en deux triangles isocèles, OAB et OAC, chacun avec deux angles égaux.

La propriété et sa preuve

Propriété : Le triangle inscrit dans un demi-cercle

Soit $[BC]$ un segment de milieu O, et A un point distinct de B et de C. Si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Autrement dit : si $OA = \dfrac{BC}{2}$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Démonstration

Étape 1. Le cercle de diamètre $[BC]$ a pour centre O et pour rayon $\dfrac{BC}{2}$. Comme A est sur ce cercle, $OA = OB = OC$. Sur la droite (BC), seuls B et C sont à cette distance de O : le point A n'est donc pas sur (BC).

Étape 2. Le triangle OAB est isocèle en O ; ses angles à la base sont donc égaux : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. De même, le triangle OAC est isocèle en O : $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$.

Étape 3. Le point O est sur le segment $[BC]$. Donc $\widehat{ABC} = \widehat{OBA}$, $\widehat{ACB} = \widehat{OCA}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{OAB} + \widehat{OAC}$.

Étape 4. La somme des angles du triangle ABC vaut $180°$. Avec les étapes 2 et 3, elle s'écrit $2\,\widehat{OAB} + 2\,\widehat{OAC} = 180°$. En divisant par 2 : $\widehat{BAC} = \widehat{OAB} + \widehat{OAC} = 90°$.

Étape 5. Le triangle ABC est donc rectangle en A.

En clair. Prends un diamètre et un point du cercle, autre que les deux bouts du diamètre. Relie ce point aux deux bouts : tu obtiens un angle droit.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **couper le triangle en deux triangles isocèles**, OAB et OAC.

- Chacun a deux angles égaux, car $OA = OB = OC$.
- La somme des angles de ABC s'écrit alors $2\,\widehat{OAB} + 2\,\widehat{OAC} = 180°$.
- On divise par 2 : $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = 90°$. C'est l'angle $\widehat{BAC}$.

Vérifie : L'étape 4 de la preuve

À l'étape 4, on écrit la somme des angles du triangle ABC. Rappel de l'étape 3 : $\widehat{ABC} = \widehat{OBA}$, $\widehat{ACB} = \widehat{OCA}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{OAB} + \widehat{OAC}$. Comment s'écrit cette somme ?

A. $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = 180°$

Faux.
Ce serait l'angle $\widehat{BAC}$ seul : il serait plat.

B. $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$

Faux.
Rien ne l'impose : le point A peut être n'importe où sur le cercle.

C. $2\,\widehat{OAB} + 2\,\widehat{OAC} = 180°$
Juste.
Juste : chaque angle à la base est compté deux fois.

D. $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$
Faux.
Il manque l'angle $\widehat{BAC}$ dans cette somme.

Correction
D'après l'étape 3, $\widehat{ABC} = \widehat{OBA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{OCA}$. D'après l'étape 2, ces angles valent $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OAC}$.

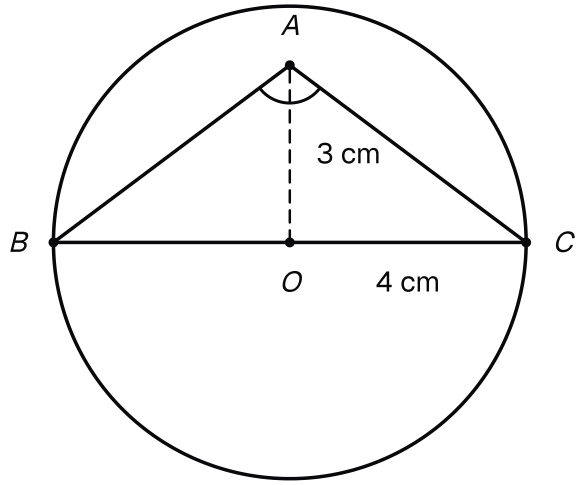
La somme des angles de ABC s'écrit donc :

$$2\,\widehat{OAB} + 2\,\widehat{OAC} = 180°.$$

On divise par 2 : $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = 90°$. Or, d'après l'étape 3, cette somme est $\widehat{BAC}$. Donc $\widehat{BAC} = 90°$.

Exemple **: Contre-exemple : les deux hypothèses comptent**

- **Le point doit être sur le cercle.** Reprends le triangle ABC du contre-exemple de la section précédente : $BC = 8$ cm et $OA = 3$ cm. Le rayon du cercle de diamètre $[BC]$ vaut 4 cm. Le point A est à l'intérieur du cercle, et l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas droit.
- **Le point doit être distinct de B et de C.** Le point B est sur le cercle. Mais avec $A = B$, il n'y a plus de triangle.



Le point A du contre-exemple reste à l'intérieur du cercle de diamètre [BC] : à 3 cm de O, pour un rayon de 4 cm.

Démontrer qu'un triangle est rectangle

Méthode : démontrer qu'un triangle est rectangle avec un cercle

1. **Repère** le segment qui servira de diamètre, par exemple $[BC]$, et son milieu O.
2. **Vérifie** que le troisième sommet A, distinct de B et de C, est sur le cercle de diamètre $[BC]$. Tu peux aussi calculer OA et vérifier que $OA = \dfrac{BC}{2}$.
3. **Conclus** en citant la propriété : le triangle est rectangle en A.

Exemple : deux rédactions

- Sur un cercle, $[EF]$ est un diamètre et G un point du cercle, distinct de E et de F. On rédige : « Le point G est sur le cercle de diamètre $[EF]$. D'après la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle, le triangle EFG est rectangle en G. »
- Le segment $[KL]$ mesure 12 cm et a pour milieu I. Un point M, distinct de K et de L, vérifie $IM = 6$ cm. Or $\dfrac{KL}{2} = 6$ cm, donc $IM = \dfrac{KL}{2}$. D'après la même propriété, le triangle KLM est rectangle en M.

Attention : où est l'angle droit ?

✗ « Le point G est sur le cercle de diamètre $[EF]$, donc le triangle EFG est rectangle en E. »

✓ L'angle droit est au sommet placé sur le cercle, ici G. Le diamètre $[EF]$ fait face à cet angle : c'est l'hypoténuse.

Remarque : deux propriétés qui se répondent

La propriété du milieu de l'hypoténuse part d'un triangle rectangle et place son cercle circonscrit.

La propriété du demi-cercle fait le chemin inverse : elle part d'un cercle et prouve qu'un triangle est rectangle.

À toi

Vérifie : Quel point convient ?

Le segment $[RS]$ mesure 10 cm et a pour milieu I. Un point T est distinct de R et de S. Quelle condition prouve que le triangle RST est rectangle en T ?

A. $RT = 5$ cm

Faux.

Cette distance part de R, pas du milieu I : elle ne place pas T sur le cercle.

B. $IT = 5$ cm

Juste.

Juste : $IT = \dfrac{RS}{2}$, donc T est sur le cercle de diamètre $[RS]$.

C. $IT = 10$ cm

Faux.

Le point T serait hors du cercle de diamètre $[RS]$, dont le rayon vaut 5 cm.

D. $RT = ST$

Faux.

Le point T est alors sur la médiatrice de $[RS]$, mais pas forcément sur le cercle.

Correction

Le cercle de diamètre $[RS]$ a pour centre I et pour rayon $\dfrac{10}{2} = 5$ cm.

Si $IT = 5$ cm, le point T est sur ce cercle. D'après la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle, le triangle RST est rectangle en T.

À toi : Un triangle dans un cercle

Un cercle de centre O a pour diamètre $[AB]$, avec $AB = 7$ cm. Le point C est sur ce cercle, distinct de A et de B. Démontre que le triangle ABC est rectangle, nomme son hypoténuse, puis donne OC. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle.
Indice 2
Le diamètre est $[AB]$: l'angle droit est au troisième sommet.
Indice 3
Point délicat : OC est un rayon du cercle, la moitié du diamètre.

Réponse
Angle droit. Le point C est sur le cercle de diamètre $[AB]$, et il est distinct de A et de B. D'après la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle, le triangle ABC est rectangle en C.

Hypoténuse. Son hypoténuse est $[AB]$, le côté qui fait face au sommet C.

Distance OC. Le segment $[OC]$ est un rayon du cercle, la moitié du diamètre : $OC = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ cm.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse $[AB]$, et le point C est à $3{,}5$ cm de O.

Le théorème de Pythagore

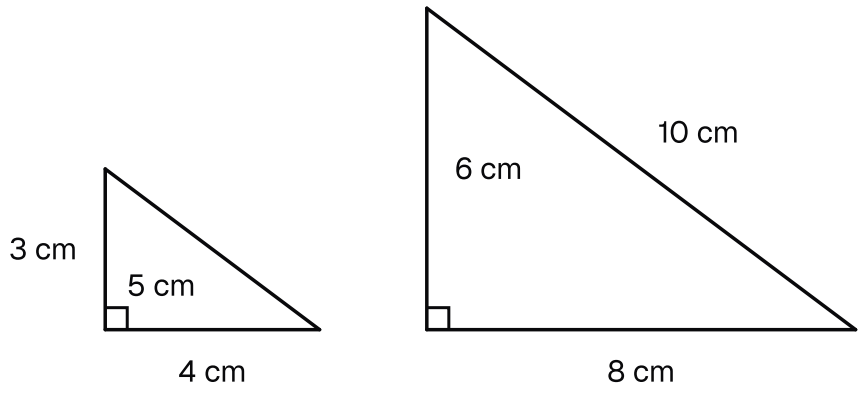
Des carrés de longueurs

Sur ton cahier, trace deux triangles rectangles.

1. Le premier a des côtés de l'angle droit de 3 cm et 4 cm.
2. Le second a des côtés de l'angle droit de 6 cm et 8 cm.

Mesure leurs hypoténuses : tu trouves 5 cm et 10 cm.

Rappel du chapitre sur les puissances : le carré d'un nombre a est $a^2 = a \times a$.



Les deux triangles rectangles à tracer : côtés de l'angle droit de 3 cm et 4 cm, puis de 6 cm et 8 cm, avec leurs hypoténuses mesurées.

Devine : Une relation entre les carrés

Premier triangle : $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$. Second triangle : $6^2 = 36$, $8^2 = 64$ et $10^2 = 100$. Quelle relation vois-tu ?

A. L'hypoténuse est la somme des deux autres côtés.

Faux.

On a $3 + 4 = 7$, et non 5.

B. Le carré de l'hypoténuse est le produit des deux autres côtés.

Faux.

On a $3 \times 4 = 12$, et non 25.

C. Le carré de l'hypoténuse est la somme des deux autres carrés.

Juste.

Juste : $9 + 16 = 25$ et $36 + 64 = 100$.

D. Le carré de l'hypoténuse est le double d'un autre carré.

Faux.

On a $2 \times 16 = 32$, et non 25.

Correction

Pour le premier triangle, $9 + 16 = 25$. Pour le second, $36 + 64 = 100$.

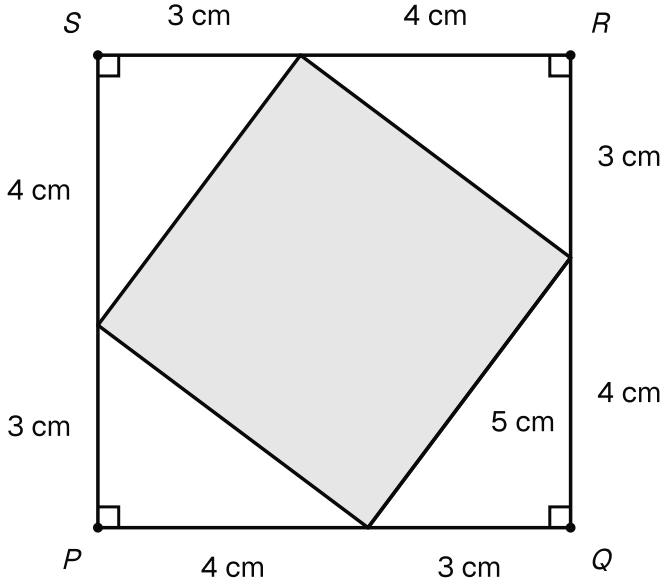
Chaque fois, on ajoute les carrés des côtés de l'angle droit, et on obtient le carré de l'hypoténuse.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux exemples ne prouvent pas une règle pour tous les triangles rectangles. La preuve calcule l'aire d'un même grand carré de deux façons.

Rappel de 1re année : un carré de côté c a pour aire c^2. Un rectangle a pour aire longueur fois largeur. Un triangle rectangle a pour aire la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

Prépare la figure de la preuve sur ton cahier, avec des côtés de l'angle droit de 4 cm et 3 cm.

1. Trace un carré $PQRS$ de 7 cm de côté.
2. Tourne autour du carré de P vers Q, puis R, puis S. Sur chaque côté, marque un point à 4 cm du sommet de départ.
3. Relie ces quatre points. Tu obtiens quatre triangles rectangles dans les coins, et une figure au milieu. Chaque côté de cette figure mesure 5 cm.



La figure de la preuve sur ton cahier : le carré PQRS de 7 cm, ses côtés coupés en 4 cm puis 3 cm, et la figure du milieu de côté 5 cm.

Le théorème et sa preuve

Théorème : Le théorème de Pythagore

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Démonstration

Étape 1. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Sur chaque côté d'un carré de côté $b + c$, en tournant toujours dans le même sens, on marque un point à la distance b du sommet de départ. On obtient dans les coins quatre triangles rectangles de côtés de l'angle droit b et c. On admet que ce sont des copies de ABC, superposables au papier calque : leur hypoténuse mesure a.

Étape 2. La figure du milieu a quatre côtés de longueur a. En chacun de ses sommets, les deux coins voisins donnent les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, de somme $90°$, car la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Avec l'angle de la figure, ils forment un angle plat : cet angle vaut $180° - 90° = 90°$. La figure est donc un carré, d'aire a^2.

Étape 3. L'aire du grand carré vaut donc $a^2 + 4 \times \dfrac{b \times c}{2} = a^2 + 2bc$.

Étape 4. Découpé autrement, en un carré de côté b, un carré de côté c et deux rectangles de côtés b et c, il a pour aire $b^2 + c^2 + 2bc$.

Étape 5. Donc $a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$, d'où $a^2 = b^2 + c^2$, c'est-à-dire $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

En clair. Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **calculer une même aire de deux façons**. Ici, a est l'hypoténuse, et b et c sont les côtés de l'angle droit. Le grand carré a pour côté $b + c$.

- Premier découpage : quatre triangles et un carré de côté a.
- Second découpage : deux carrés, de côtés b et c, et deux rectangles.

Les quatre triangles ont la même aire totale que les deux rectangles : $2bc$. On l'enlève des deux côtés, et il reste :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Vérifie : La figure du milieu

Dans la preuve, pourquoi la figure du milieu est-elle un carré ?

A. Ses quatre côtés mesurent a et ses angles sont droits.

Juste.

Juste : chaque angle vaut $180° - 90° = 90°$.

B. Ses quatre côtés mesurent a : cela suffit.

Faux.

Un losange a aussi quatre côtés égaux, sans angle droit.

C. Elle est placée au milieu du grand carré.

Faux.

Sa place ne dit rien de ses angles.

D. Ses diagonales ont le même milieu.

Faux.

Cela prouve seulement que c'est un parallélogramme.

Correction

La figure a quatre côtés de longueur a.

En chacun de ses sommets, les deux coins voisins donnent les deux angles aigus du triangle, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$: leur somme vaut $90°$. Avec l'angle de la figure, ils forment un angle plat.

L'angle de la figure vaut donc $180° - 90° = 90°$.

Conclusion. Quatre côtés égaux et quatre angles droits : la figure du milieu est un carré.

Exemple : la figure de ton cahier

Sur ta figure, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm et $a = 5$ cm. Le grand carré a pour aire $7^2 = 49$ cm².

- Premier découpage : $5^2 + 4 \times \dfrac{3 \times 4}{2} = 25 + 24 = 49$.
- Second découpage : $4^2 + 3^2 + 2 \times 3 \times 4 = 16 + 9 + 24 = 49$.

Les deux calculs donnent bien la même aire.

Avant d'écrire l'égalité

Attention : un triangle rectangle d'abord

✗ « Le triangle KLM a pour côtés $KL = 4$ cm, $LM = 5$ cm et $KM = 6$ cm. Donc $KM^2 = KL^2 + LM^2$. »

✓ Le théorème de Pythagore exige un triangle **rectangle**. Ici, rien ne dit que le triangle a un angle droit.

L'égalité est d'ailleurs fausse : $KM^2 = 36$, alors que $KL^2 + LM^2 = 16 + 25 = 41$.

Remarque : un seul sens

Dans ce chapitre, le théorème s'utilise toujours dans le même sens : on sait que le triangle est rectangle, et on en déduit une égalité entre les carrés des longueurs.

Pour prouver qu'un triangle est rectangle, tu utilises le cercle.

Exemple : écrire l'égalité

- Le triangle EFG est rectangle en F. Son hypoténuse est $[EG]$, donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
- Le triangle XYZ est rectangle en Z. Son hypoténuse est $[XY]$, donc $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$.

Chaque fois, l'hypoténuse est seule dans le premier membre.

À toi

Vérifie : La bonne égalité

Le triangle UVW est rectangle en V. Quelle égalité est juste ?

A. $UV^2 = UW^2 + VW^2$

Faux.
$[UV]$ passe par V : ce n'est pas l'hypoténuse.

B. $VW^2 = UV^2 + UW^2$

Faux.
$[VW]$ passe par V : ce n'est pas l'hypoténuse.

C. $UW = UV + VW$

Faux.
Le théorème parle des carrés des longueurs, pas des longueurs.

D. $UW^2 = UV^2 + VW^2$

Juste.
Juste : l'hypoténuse $[UW]$ fait face à l'angle droit en V.

Correction
L'angle droit est en V. L'hypoténuse est le côté opposé, $[UW]$.

D'après le théorème de Pythagore, $UW^2 = UV^2 + VW^2$.

À toi : Vérifier sur une figure

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm. Calcule BC^2. Trace ensuite le triangle et mesure BC. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris l'égalité de Pythagore, l'hypoténuse seule dans le premier membre.
Indice 2
L'hypoténuse est $[BC]$: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Indice 3
Point délicat : élève chaque longueur au carré avant d'additionner.

Réponse
Le triangle ABC est rectangle en A, donc son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 = 169 \end{aligned}$$

Sur la figure, tu mesures $BC = 13$ cm. On vérifie : $13^2 = 169$.

Conclusion. $BC^2 = 169$, et la mesure $BC = 13$ cm est en accord avec ce calcul.

La racine carrée et les nombres réels

Un carré d'aire 2

Un jardinier veut une pelouse carrée de 2 m². Quel doit être son côté ?

Un côté de 1 m donne une aire de 1 m². Un côté de 2 m donne une aire de 4 m².

Le côté cherché n'est donc ni 1 m, ni 2 m : il semble compris entre les deux.

Devine : Un côté de 1,4 m ?

Le côté de la pelouse mesure-t-il $1{,}4$ m ?

A. Oui, exactement.

Faux.

Calcule l'aire : $1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$.

B. Non, car $1{,}4^2 = 2{,}8$.

Faux.

Tu as calculé $1{,}4 \times 2$. Le carré est $1{,}4 \times 1{,}4$.

C. Non, car $1{,}4^2 = 1{,}96$.

Juste.

Juste : l'aire serait un peu inférieure à 2 m².

D. Oui, car $1{,}4 \times 2 = 2{,}8$.

Faux.

Ce produit n'est pas l'aire d'un carré de côté $1{,}4$ m.

Correction

On a $1{,}4^2 = 1{,}96$, un peu moins que 2. Et $1{,}5^2 = 2{,}25$, un peu plus.

Ni $1{,}4$ m ni $1{,}5$ m ne conviennent. Ce nombre positif dont le carré vaut 2 a un nom.

La racine carrée

Définition : Racine carrée d'un nombre positif

Soit a un nombre positif ou nul. On admet qu'il existe un seul nombre positif ou nul dont le carré est égal à a. Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$. Ainsi :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Par exemple, $\sqrt{25} = 5$, car $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$.

Exemple : des racines carrées exactes

- $\sqrt{36} = 6$, car $6 \geq 0$ et $6^2 = 36$.
- $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{0} = 0$.
- $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, car $0{,}5 \geq 0$ et $0{,}5^2 = 0{,}25$.

Les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36… sont des **carrés parfaits** : ce sont les carrés des nombres entiers.

Enfin, le nombre -4 n'a pas de racine carrée : un carré n'est jamais négatif, donc aucun nombre n'a pour carré -4.

Méthode : valeur exacte et valeur approchée d'une racine carrée

1. **Cherche** si le nombre est le carré d'un nombre positif connu. Par exemple, $\sqrt{64} = 8$.
2. **Sinon, garde** la racine carrée dans les calculs : c'est la valeur exacte.
3. **Utilise** la touche racine carrée de la calculatrice pour une valeur approchée. Écris toujours sa précision.

Exemple : deux racines carrées à la calculatrice

- Le nombre 13 n'est pas un carré parfait : $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$. On garde $\sqrt{13}$ pour la valeur exacte. La calculatrice affiche $3{,}605551275$. On écrit $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ au centième près.
- Pour $\sqrt{2}$, elle affiche $1{,}414213562$. On écrit $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ au centième près.

Une précaution

Attention : une valeur approchée n'est pas une égalité

✗ « $\sqrt{2} = 1{,}41$ »

✓ Le carré de $1{,}41$ vaut $1{,}9881$, et non 2 : le nombre $1{,}41$ est seulement proche de $\sqrt{2}$.

On écrit $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ au centième près, et on garde $\sqrt{2}$ dans les calculs exacts.

Trouve l'erreur : Ce qu'a écrit Lina

Lina a tapé $\sqrt{30}$ à la calculatrice. Elle écrit sur sa copie : « $\sqrt{30} = 5{,}48$ ». Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste : la calculatrice le montre.
Faux.
La calculatrice affiche $5{,}477225575$, une valeur approchée.

B. C'est faux : $\sqrt{30} = 15$.
Faux.
On a $15^2 = 225$: tu as divisé 30 par 2.

C. C'est faux : $5{,}48$ est une valeur approchée.
Juste.
Juste : $5{,}48^2 = 30{,}0304$, et non 30.

D. C'est faux : $\sqrt{30}$ n'existe pas.
Faux.
Le nombre 30 est positif : sa racine carrée existe.

Correction

> La calculatrice affiche $5{,}477225575$. Le nombre $5{,}48$ n'est pas égal à $\sqrt{30}$, car $5{,}48^2 = 30{,}0304$.
>
> Lina doit écrire $\sqrt{30} \approx 5{,}48$ au centième près.

Un nombre qui n'est pas une fraction

Rappel du chapitre sur les nombres rationnels : un nombre rationnel s'écrit $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$.

La calculatrice ne montre que dix chiffres de $\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ peut-il s'écrire comme une fraction ? La réponse est non.

Propriété : Le nombre racine de deux n'est pas rationnel

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : il n'existe pas de nombres entiers p et q, avec $q \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Remarque

Ce résultat est admis. Sa preuve utilise des outils que tu verras dans les classes suivantes.

Exemple : des fractions qui approchent sans atteindre

- Essaie $\frac{7}{5}$: son carré vaut $\frac{49}{25}$. Or $2 = \frac{50}{25}$: c'est un peu moins que 2.
- Essaie $\frac{17}{12}$: son carré vaut $\frac{289}{144}$. Or $2 = \frac{288}{144}$: c'est un peu plus que 2.

Ces fractions approchent $\sqrt{2}$. D'après la propriété admise, aucune fraction ne l'atteint.

Les nombres réels

Définition : Nombres irrationnels et nombres réels

Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment ensemble les **nombres réels**.

Exemple : classer des nombres

- Les nombres 5, -3, $\frac{2}{7}$ et $0{,}25$ sont rationnels.
- Le nombre $\sqrt{9}$ est rationnel, car $\sqrt{9} = 3$. Une racine carrée n'est donc pas toujours irrationnelle.
- Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Tous ces nombres sont des nombres réels.

Vérifie : Un nombre rationnel

Lequel de ces nombres est rationnel ?

A. Le nombre $\sqrt{2}$.

Faux.

D'après la propriété admise, il n'est pas rationnel.

B. La racine carrée de -25.

Faux.

Elle n'existe pas : un carré n'est jamais négatif, donc aucun nombre n'a pour carré -25.

C. Aucun : une racine carrée n'est jamais rationnelle.

Faux.

Certaines le sont, comme $\sqrt{9} = 3$.

D. Le nombre $\sqrt{25}$.

Juste.

Juste : $\sqrt{25} = 5 = \dfrac{5}{1}$.

Correction

On a $\sqrt{25} = 5$, car $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$. Or $5 = \dfrac{5}{1}$: c'est un nombre rationnel.

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, et -25 n'a pas de racine carrée.

À toi : Exacte ou approchée ?

Donne la valeur exacte de $\sqrt{81}$ et de $\sqrt{0{,}49}$. Explique ensuite pourquoi 40 n'est pas un carré parfait. Donne enfin une valeur approchée de $\sqrt{40}$ au dixième près. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Cherche d'abord des carrés connus.

Indice 2

On a $9^2 = 81$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$.

Indice 3

Point délicat : calcule 6^2 et 7^2. Pour la valeur approchée, utilise la touche racine carrée.

Réponse

Valeurs exactes. On a $\sqrt{81} = 9$, car $9 \geq 0$ et $9^2 = 81$. De même, $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, car $0{,}7 \geq 0$ et $0{,}7^2 = 0{,}49$.

Le nombre 40. On a $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$: le nombre 40 n'est pas le carré d'un entier. On garde $\sqrt{40}$ pour la valeur exacte.

Valeur approchée. La calculatrice affiche $6{,}32455532$: on écrit $\sqrt{40} \approx 6{,}3$ au dixième près.

Calculer une longueur avec Pythagore

Calculer l'hypoténuse

Tu connais deux côtés d'un triangle rectangle, et tu cherches le troisième. Le théorème de Pythagore donne le carré de la longueur cherchée. La racine carrée donne ensuite la longueur.

Devine : Une hypoténuse

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 9$ cm et $AC = 12$ cm. Combien mesure BC ?

A. 21 cm

Faux.

Tu as additionné les longueurs : $9 + 12 = 21$. Le théorème additionne les carrés.

B. 225 cm

Faux.

C'est BC^2. Il reste à prendre la racine carrée.

C. 3 cm

Faux.

Tu as soustrait les longueurs. Le théorème additionne les carrés : $BC^2 = 81 + 144 = 225$, alors que $3^2 = 9$.

D. 15 cm

Juste.

Juste : $BC^2 = 81 + 144 = 225$, et $15^2 = 225$.

Correction

D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$.

Donc $BC = \sqrt{225} = 15$ cm, car $15^2 = 225$.

Méthode : calculer la longueur de l'hypoténuse

1. **Vérifie** que le triangle est rectangle, et repère l'hypoténuse.
2. **Écris** l'égalité de Pythagore, puis remplace les longueurs connues.
3. **Calcule** le carré de l'hypoténuse : c'est une somme de carrés.
4. **Prends** la racine carrée : une longueur est positive.
5. **Donne** la valeur exacte, puis une valeur approchée si on te la demande, avec sa précision.

Exemple : une hypoténuse entière

Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DE = 8$ cm et $EF = 15$ cm. Son hypoténuse est $[DF]$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} DF^2 &= DE^2 + EF^2 \\ &= 8^2 + 15^2 \\ &= 64 + 225 = 289 \end{aligned}$$

Donc $DF = \sqrt{289} = 17$ cm, car $17^2 = 289$.

Attention : repérer l'hypoténuse d'abord

✗ « Le triangle KLM est rectangle en K, donc $KL^2 = KM^2 + LM^2$. »

✓ L'hypoténuse fait face à l'angle droit en K : c'est $[LM]$. On écrit $LM^2 = KL^2 + KM^2$.

Avant d'écrire l'égalité, repère l'angle droit, puis le côté qui lui fait face.

Calculer un côté de l'angle droit

Méthode : calculer un côté de l'angle droit

1. **Écris** l'égalité de Pythagore, l'hypoténuse seule dans le premier membre.
2. **Isole** le carré cherché : par exemple, $AB^2 = BC^2 - AC^2$.
3. **Calcule** ce nombre, puis sa racine carrée.

Exemple : une racine carrée, puis une valeur approchée

Le triangle GHI est rectangle en H, avec $GI = 7$ cm et $GH = 6$ cm. Son hypoténuse est $[GI]$.

D'après le théorème de Pythagore, $GI^2 = GH^2 + HI^2$. On isole le carré cherché :

$$\begin{aligned} HI^2 &= GI^2 - GH^2 \\ &= 7^2 - 6^2 \\ &= 49 - 36 = 13 \end{aligned}$$

La valeur exacte est $HI = \sqrt{13}$ cm. La calculatrice donne $HI \approx 3{,}61$ cm au centième près.

Attention : la racine carrée d'une somme

✗ « $BC^2 = 5^2 + 12^2$, donc $BC = 5 + 12 = 17$. »

✓ On calcule d'abord la somme des carrés : $BC^2 = 25 + 144 = 169$. Puis $BC = \sqrt{169} = 13$.

En général, la racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées : $\sqrt{25+144}=13$, alors que $\sqrt{25}+\sqrt{144}=5+12=17$.

Une échelle contre un mur

Exemple : la hauteur atteinte par une échelle

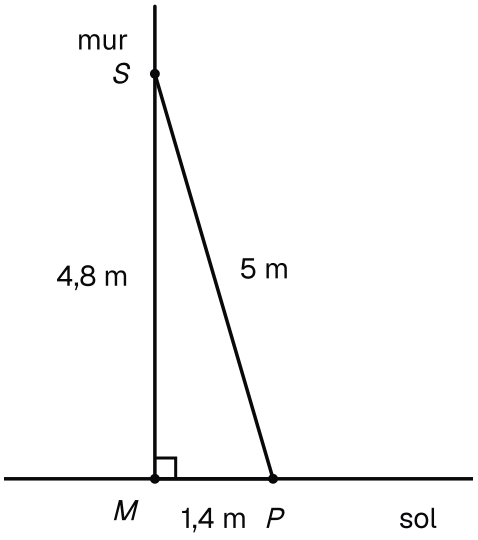
Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur vertical. Son pied P est sur le sol horizontal, à $1{,}4$ m du pied M du mur. Son sommet S touche le mur.

Le mur et le sol forment un angle droit en M : le triangle PMS est rectangle en M, d'hypoténuse $[PS]$.

D'après le théorème de Pythagore, $PS^2=PM^2+MS^2$. Donc :

$$\begin{aligned} MS^2 &= PS^2-PM^2 \\ &= 5^2-1{,}4^2 \\ &= 25-1{,}96=23{,}04 \end{aligned}$$

Ainsi $MS=\sqrt{23{,}04}=4{,}8$ m, car $4{,}8^2=23{,}04$. L'échelle atteint $4{,}8$ m de haut.



L'échelle [PS] de 5 m contre le mur : son pied P à 1,4 m du pied M du mur, son sommet S à 4,8 m de hauteur.

Vérifie : Un câble et un poteau

Un poteau vertical mesure 12 m. Un câble tendu relie son sommet au sol horizontal, à 5 m du pied du poteau. Quelle est la longueur du câble ?

A. 17 m

Faux.
Tu as additionné les longueurs : $12 + 5 = 17$.

B. 13 m
Juste.
Juste : $12^2 + 5^2 = 169$, et $13^2 = 169$.

C. $\sqrt{119}$ m
Faux.
Tu as soustrait les carrés. Le câble est l'hypoténuse : on additionne.

D. 169 m
Faux.
C'est le carré de la longueur. Il reste la racine carrée.

Correction
Le poteau et le sol forment un angle droit. Le câble est l'hypoténuse du triangle rectangle obtenu.

D'après le théorème de Pythagore, son carré vaut $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.

Le câble mesure donc $\sqrt{169} = 13$ m.

À toi

Vérifie : Un côté de l'angle droit

Le triangle RST est rectangle en S, avec $RT = 10$ cm et $RS = 8$ cm. Combien mesure ST ?

A. 6 cm
Juste.
Juste : $ST^2 = 100 - 64 = 36$.

B. $\sqrt{164}$ cm
Faux.
Tu as additionné les carrés. Or $[RT]$ est l'hypoténuse : on soustrait.

C. 2 cm
Faux.
Tu as soustrait les longueurs. On soustrait les carrés.

D. 36 cm
Faux.
C'est ST^2. Il reste à prendre la racine carrée.

Correction
L'hypoténuse est $[RT]$. D'après le théorème de Pythagore, $RT^2 = RS^2 + ST^2$.

Donc $ST^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, et $ST = \sqrt{36} = 6$ cm.

À toi : La diagonale d'une porte

Une porte rectangulaire mesure 90 cm de large et 200 cm de haut. Calcule la longueur de sa diagonale : donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au centimètre près. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les angles d'un rectangle sont droits : la diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle.
Indice 2
Le carré de la diagonale est une somme de deux carrés : lesquels ?
Indice 3
Point délicat : $48\,100$ n'est pas un carré parfait. Garde la racine carrée pour la valeur exacte.

Réponse
Triangle rectangle. Les angles d'une porte rectangulaire sont droits. La largeur, la hauteur et la diagonale forment donc un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est la diagonale.

Carré de la diagonale. D'après le théorème de Pythagore, il vaut $90^2 + 200^2 = 8\,100 + 40\,000 = 48\,100$.

Longueur. La valeur exacte est $\sqrt{48\,100}$ cm. La calculatrice affiche $219{,}317122$.

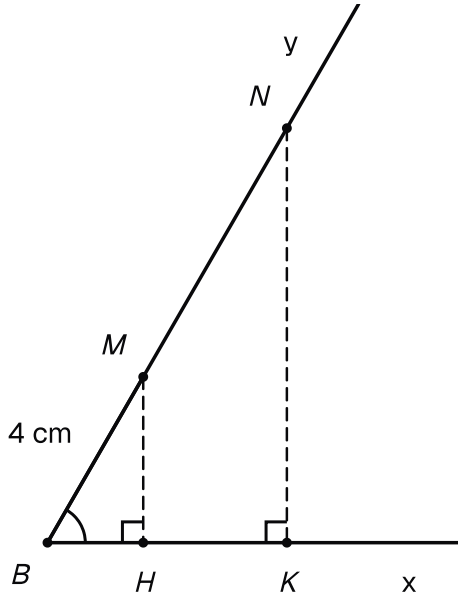
Conclusion. La diagonale de la porte mesure $\sqrt{48\,100}$ cm, et $\sqrt{48\,100} \approx 219$ cm au centimètre près.

Le cosinus d'un angle aigu

Deux triangles, un même angle

Sur ton cahier :

1. Trace deux demi-droites $[Bx)$ et $[By)$ qui forment un angle de $60°$.
2. Sur $[By)$, place le point M à 4 cm de B, et le point N à 10 cm de B.
3. Trace les perpendiculaires à (Bx) qui passent par M et par N. Elles coupent (Bx) en H et en K : ce sont les **pieds** des perpendiculaires.



Les deux demi-droites [Bx) et [By) qui forment un angle de 60 degrés, les points M et N de [By) et leurs pieds H et K sur [Bx).

Devine : Deux quotients

Les triangles BMH et BNK sont rectangles en H et en K. Que peux-tu dire des quotients $\frac{BH}{BM}$ et $\frac{BK}{BN}$?

A. Le second est plus grand : son triangle est plus grand.

Faux.

Les longueurs grandissent, mais le quotient ne change pas : $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$.

B. Ils sont égaux : tous deux valent $0{,}5$.

Juste.

Juste : tu mesures $BH = 2$ cm et $BK = 5$ cm.

C. Le premier est plus grand.

Faux.

Mesure : $\frac{BH}{BM} = \frac{2}{4}$ et $\frac{BK}{BN} = \frac{5}{10}$.

D. Ils valent 2 et 5.

Faux.

Ce sont les longueurs BH et BK, pas les quotients.

Correction

Tu mesures $BH = 2$ cm et $BK = 5$ cm. Les quotients valent $\frac{2}{4} = 0{,}5$ et $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Ils sont égaux, alors que les triangles n'ont pas la même taille.

Pourquoi est-ce vrai ? Rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Les droites (MH) et (NK) sont donc parallèles.

Tu connais aussi, depuis le premier semestre, la propriété de la droite parallèle à un côté d'un triangle. Elle rend les longueurs proportionnelles.

Un quotient qui ne dépend que de l'angle

Propriété : Un quotient qui ne dépend que de l'angle

Soit $\widehat{xBy}$ un angle aigu. Pour tout point M de la demi-droite $[By)$ distinct de B, on note H le pied de la perpendiculaire à (Bx) passant par M. Alors le quotient $\dfrac{BH}{BM}$ ne dépend pas du point M choisi : il ne dépend que de l'angle $\widehat{xBy}$.

Démonstration

Étape 1. Soit M et N deux points distincts de $[By)$, différents de B. On appelle M le plus proche de B : il est sur le segment $[BN]$. Soit H et K les pieds des perpendiculaires à (Bx) passant par M et par N. Comme l'angle $\widehat{xBy}$ est aigu, H et K sont sur $[Bx)$ et distincts de B : BNK est un triangle rectangle en K.

Étape 2. Les droites (MH) et (NK) sont perpendiculaires à la même droite (Bx), donc parallèles.

Étape 3. Dans le triangle BNK, la droite (MH) passe par le point M de $[BN]$, est parallèle au côté (NK) et coupe $[BK]$ en H. D'après la propriété de la droite parallèle à un côté d'un triangle, $\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{BM}{BN}$.

Étape 4. En multipliant les deux membres par $\dfrac{BK}{BM}$, on obtient $\dfrac{BH}{BM} = \dfrac{BK}{BN}$: le quotient est le même pour M et pour N.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles**.

Le petit triangle BMH est placé dans le grand triangle BNK, avec (MH) parallèle à (NK). La propriété de la droite parallèle à un côté d'un triangle rend alors les longueurs proportionnelles.

Le quotient $\dfrac{BH}{BM}$ reste donc le même.

Vérifie : Deux droites parallèles

Dans la preuve, pourquoi les droites (MH) et (NK) sont-elles parallèles ?

A. Elles passent toutes deux par le point B.
Faux.

Aucune des deux ne passe par B, car M et N sont distincts de B.

B. Elles ont la même longueur.

Faux.

Une droite n'a pas de longueur, et cela ne prouverait rien.

C. Elles coupent toutes deux $[By)$.

Faux.

Deux droites qui coupent une même droite ne sont pas forcément parallèles.

D. Elles sont perpendiculaires à la même droite (Bx).

Juste.

Juste : c'est l'étape 2 de la preuve.

Correction

Par construction, (MH) et (NK) sont perpendiculaires à (Bx). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. C'est l'étape 2 de la preuve.

Exemple : le rôle de l'angle aigu

- Avec l'angle de $60°$, place un troisième point à 7 cm de B sur $[By)$. Tu mesures $3{,}5$ cm de B jusqu'au pied de la perpendiculaire. Le quotient vaut encore $\dfrac{3{,}5}{7} = 0{,}5$.
- Si l'angle $\widehat{xBy}$ était droit, le pied H serait le point B lui-même : il n'y aurait plus de triangle BMH.
- Si l'angle était obtus, H serait de l'autre côté de B, hors de la demi-droite $[Bx)$.

L'hypothèse « angle aigu » place H et K sur $[Bx)$, distincts de B : les triangles BMH et BNK existent. C'est le seul cas qui sert au cosinus dans ce chapitre.

Le cosinus d'un angle aigu

Définition : Cosinus d'un angle aigu

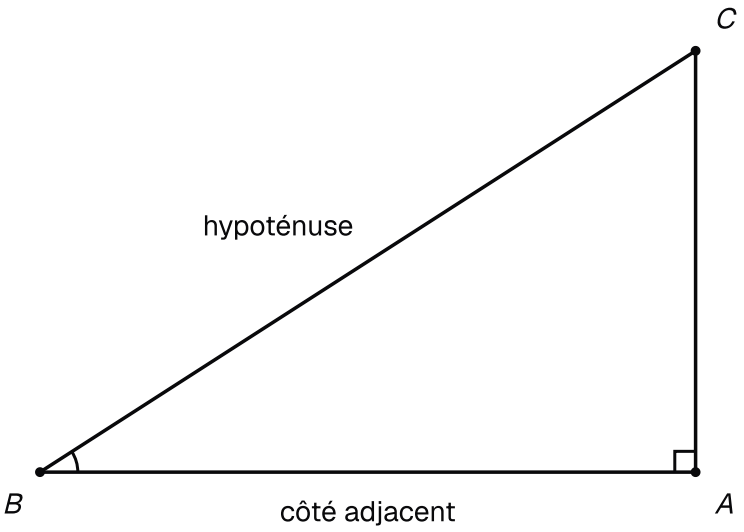
Soit ABC un triangle rectangle en A. Le **côté adjacent** à l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le côté de l'angle droit qui a pour extrémité le sommet B : c'est $[BA]$.

Le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}.$$

D'après la propriété précédente, ce nombre ne dépend pas du triangle rectangle choisi sur les côtés de l'angle. On admet de plus que deux angles de même mesure se superposent au papier calque : le cosinus ne dépend donc que de la mesure de l'angle.

En clair. Le cosinus d'un angle aigu, c'est le côté adjacent divisé par l'hypoténuse. Le côté adjacent est le côté de l'angle droit qui touche cet angle.



Pour l'angle aigu de sommet B du triangle ABC rectangle en A : le côté adjacent [BA] et l'hypoténuse [BC].

Exemple : les deux angles aigus d'un triangle

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm.

- Pour l'angle $\widehat{ABC}$, le côté adjacent est $[BA]$: $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.
- Pour l'angle $\widehat{ACB}$, le côté adjacent est $[CA]$: $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$.

Attention : le bon quotient

✗ « $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{10}{6}$ »

✓ Le cosinus est le côté adjacent **divisé par** l'hypoténuse, jamais l'inverse : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

Le quotient $\dfrac{10}{6}$ est plus grand que 1. Or un cosinus d'angle aigu est toujours plus petit que 1 : tu le démontreras plus loin dans ce chapitre.

Remarque : un nombre sans unité

Le cosinus est le quotient de deux longueurs exprimées dans la même unité. C'est un nombre sans unité : on n'écrit ni cm ni degré après lui.

À toi

Vérifie : Un cosinus

Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DE = 5$ cm, $EF = 12$ cm et $DF = 13$ cm. Que vaut $\cos \widehat{EDF}$?

A. $\dfrac{12}{13}$
Faux.
$[EF]$ ne passe pas par D : ce n'est pas le côté adjacent à l'angle en D.

B. $\dfrac{13}{5}$
Faux.
Tu as divisé l'hypoténuse par le côté adjacent : c'est l'inverse.

C. $\dfrac{5}{13}$
Juste.
Juste : côté adjacent DE sur hypoténuse DF.

D. $\dfrac{5}{12}$
Faux.
On divise par l'hypoténuse DF, pas par EF.

Correction
L'angle $\widehat{EDF}$ a pour sommet D. Son côté adjacent est $[DE]$, et l'hypoténuse est $[DF]$.

D'après la définition du cosinus, $\cos \widehat{EDF} = \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{5}{13}$.

À toi : Une longueur, puis deux cosinus

Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 8$ cm et $ST = 15$ cm. Calcule RT, puis $\cos \widehat{SRT}$ et $\cos \widehat{STR}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord l'hypoténuse RT avec le théorème de Pythagore.
Indice 2
Pour l'angle en R, le côté adjacent est $[RS]$; pour l'angle en T, c'est $[TS]$.
Indice 3
Point délicat : on divise toujours par l'hypoténuse.

Réponse

Hypoténuse. Le triangle est rectangle en S, donc son hypoténuse est $[RT]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} RT^2 &= RS^2 + ST^2 \\ &= 64 + 225 = 289 \end{aligned}$$

Donc $RT = \sqrt{289} = 17$ cm.

Cosinus. D'après la définition du cosinus, $\cos \widehat{SRT} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{8}{17}$ et $\cos \widehat{STR} = \dfrac{TS}{TR} = \dfrac{15}{17}$.

Le cosinus à la calculatrice

Régler la calculatrice

Ta calculatrice a une touche $\cos$. Tu tapes une mesure d'angle, et elle affiche son cosinus.

Elle a aussi une touche $\cos^{-1}$. Elle fait le chemin inverse : tu tapes un cosinus, et elle affiche la mesure de l'angle. Sur beaucoup de calculatrices, il faut appuyer d'abord sur SHIFT ou sur 2nde, puis sur $\cos$.

Ta calculatrice sait aussi mesurer les angles en plusieurs unités. Dans ce chapitre, on mesure les angles en degrés.

Devine : Le cosinus de 60 degrés

Ta calculatrice est réglée en degrés. Que doit-elle afficher pour $\cos 60°$?

A. 60

Faux.

Un cosinus est un quotient de longueurs, pas une mesure d'angle.

B. 1

Faux.

Dans la section précédente, tu as mesuré un quotient de $0{,}5$ pour cet angle.

C. $0{,}5$

Juste.

Juste : c'est le quotient mesuré dans la section précédente.

D. 2

Faux.

C'est l'inverse de $0{,}5$: le quotient est renversé.

Correction

Dans la section précédente, avec un angle de $60°$, tu as mesuré un quotient de $\dfrac{2}{4} = 0{,}5$. La calculatrice réglée en degrés affiche bien $0{,}5$ pour $\cos 60°$.

On admet que cet affichage est exact : le cosinus de $60°$ vaut exactement $0{,}5$.

Attention : la calculatrice en degrés

✗ « Ma calculatrice affiche $-0{,}9524129804$ pour $\cos 60$. Un cosinus peut donc être négatif. »

✓ La calculatrice n'était pas réglée en degrés. Vérifie toujours l'écran : il affiche « D » ou « DEG ».

Réglée en degrés, elle affiche $0{,}5$ pour $\cos 60°$.

Des cosinus et des angles

Méthode : calculer un cosinus, puis une mesure de l'angle

1. **Repère** l'angle aigu, son côté adjacent et l'hypoténuse.
2. **Écris** le cosinus, côté adjacent sur hypoténuse. Remplace les longueurs, et simplifie si possible.
3. **Utilise** la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice réglée en degrés. Tu obtiens une mesure approchée de l'angle : écris sa précision.

Exemple : du cosinus à l'angle

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 6$ cm et $BC = 10$ cm.

Cosinus. D'après la définition du cosinus, $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

Angle. On tape $\cos^{-1}(0{,}6)$: la calculatrice affiche $53{,}13010235$. Donc $\widehat{ABC} \approx 53°$ au degré près.

Voici des cosinus donnés par la calculatrice réglée en degrés, au millième près :

- $\cos 30° \approx 0{,}866$;
- $\cos 45° \approx 0{,}707$;
- pour $\cos 60°$, elle affiche $0{,}5$;
- $\cos 80° \approx 0{,}174$.

Sur cette liste, plus l'angle aigu est grand, plus son cosinus est petit. Tous ces cosinus sont entre 0 et 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Un cosinus est un quotient de deux longueurs positives : il est donc positif.

Il reste à montrer que le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse. Rappel de 1re année : dans un triangle, chaque côté est plus court que la somme des deux autres.

Un cosinus est entre 0 et 1

Propriété : Un cosinus est compris entre zéro et un

Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu d'un triangle ABC rectangle en A, alors

$$0 < \cos \widehat{ABC} < 1.$$

Démonstration

Étape 1. Les longueurs BA et BC sont strictement positives, donc $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC} > 0$.

Étape 2. Soit O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. D'après la propriété du milieu de l'hypoténuse, $OA = OB = \dfrac{BC}{2}$.

Étape 3. Les points O, A et B ne sont pas alignés, sinon A serait sur la droite (BC). L'inégalité triangulaire dans le triangle OAB donne donc $BA < BO + OA = \dfrac{BC}{2} + \dfrac{BC}{2} = BC$.

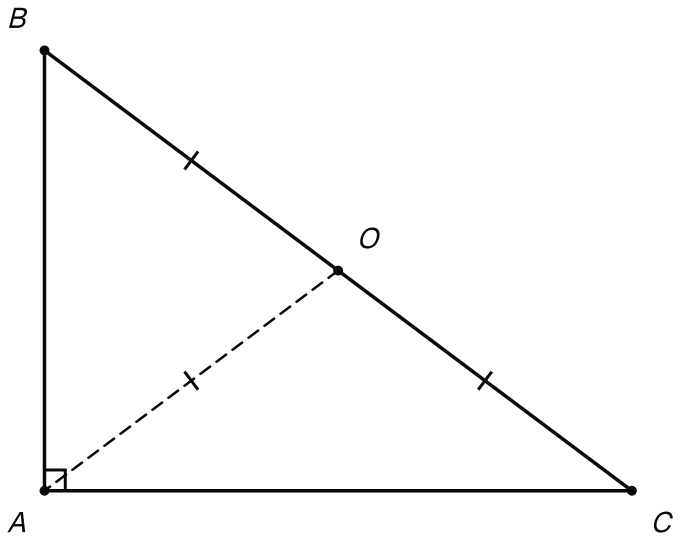
Étape 4. Comme $BA < BC$, on a $\dfrac{BA}{BC} < 1$, c'est-à-dire $\cos \widehat{ABC} < 1$.

En clair. Le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse, donc le quotient est plus petit que 1. Un cosinus d'angle aigu est toujours entre 0 et 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **passer par le milieu de l'hypoténuse**. Ce milieu O est à la distance $\dfrac{BC}{2}$ de A et de B.

Aller de B à A en ligne droite est plus court que passer par O. Donc BA est plus court que $BO + OA$, c'est-à-dire que BC.



Le chemin direct de B à A comparé au détour par O, milieu de l'hypoténuse [BC] : les deux morceaux du détour valent chacun la moitié de BC.

Vérifie : Le détour par le milieu

Dans la preuve, le point O est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$, et $OA = OB = \dfrac{BC}{2}$. Que vaut $BO + OA$?

A. BC

Juste.

Juste : $BO = OA = \dfrac{BC}{2}$, donc leur somme vaut BC.

B. $\dfrac{BC}{2}$

Faux.

C'est BO seul. Il faut ajouter OA.

C. $2\,BC$

Faux.

Chaque distance vaut la moitié de BC, pas BC.

D. BA

Faux.

C'est BA qu'on compare à $BO + OA$, pas leur somme.

Correction

On a $BO = \dfrac{BC}{2}$ et $OA = \dfrac{BC}{2}$. Donc $BO + OA = BC$.

À l'étape 3, aller de B à A en ligne droite est plus court que passer par O : $BA < BC$.

Exemple : l'hypothèse « angle aigu »

- Dans ce chapitre, le cosinus n'est défini que pour un angle aigu d'un triangle rectangle. L'encadrement ne parle que de ces angles.
- Dans le triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 6$ cm et $BC = 10$ cm, on a trouvé $\cos\widehat{ABC} = 0{,}6$. Ce nombre est bien entre 0 et 1.
- Si tu trouves $1{,}2$ pour le cosinus d'un angle aigu, tu as fait une erreur : ce nombre dépasse 1.

À toi

Vérifie : Un cosinus possible

Lequel de ces nombres peut être le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle ?

A. $1{,}25$

Faux.

Il dépasse 1 : le quotient est renversé.

B. 0

Faux.

Le côté adjacent aurait une longueur nulle : impossible.

C. 1

Faux.

Le côté adjacent serait aussi long que l'hypoténuse : impossible.

D. $0{,}42$

Juste.

Juste : ce nombre est strictement entre 0 et 1.

Correction

D'après la propriété précédente, un tel cosinus est strictement compris entre 0 et 1. Seul $0{,}42$ convient.

À toi : Une mesure d'angle

Le triangle KLM est rectangle en L, avec $KL = 7$ cm et $KM = 9$ cm. Calcule $\cos\widehat{LKM}$, puis une mesure de l'angle $\widehat{LKM}$ au degré près. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère le côté adjacent à l'angle de sommet K, et l'hypoténuse.

Indice 2

Le côté adjacent est $[KL]$, et l'hypoténuse est $[KM]$.

Indice 3

Point délicat : vérifie que la calculatrice est réglée en degrés avant d'utiliser $\cos^{-1}$.

Réponse

Cosinus. L'angle $\widehat{LKM}$ a pour sommet K : son côté adjacent est $[KL]$, et l'hypoténuse est $[KM]$. D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{LKM} = \dfrac{KL}{KM} = \dfrac{7}{9}$.

Angle. On tape $\cos^{-1}(7 \div 9)$: la calculatrice réglée en degrés affiche $38{,}94244127$.

Conclusion. Le cosinus vaut $\dfrac{7}{9}$, et $\widehat{LKM} \approx 39°$ au degré près.

Calculer une longueur avec le cosinus

Une longueur à partir d'un angle

Tu connais un angle aigu et une longueur d'un triangle rectangle. Le cosinus relie cet angle, son côté adjacent et l'hypoténuse. Une de ces deux longueurs se calcule alors à partir de l'autre.

Devine : Un angle de 60 degrés

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $\widehat{ABC} = 60°$ et $BC = 12$ cm. Combien mesure BA ?

A. 6 cm

Juste.

Juste : $BA = 12 \times 0{,}5 = 6$.

B. 24 cm

Faux.

Tu as divisé par $0{,}5$. Or $[BA]$ est un côté de l'angle droit : il est plus court que l'hypoténuse.

C. 12 cm

Faux.

Le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse.

D. $0{,}5$ cm

Faux.

C'est le cosinus de l'angle, pas une longueur.

Correction

On a $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$, et la calculatrice réglée en degrés affiche $0{,}5$ pour $\cos 60°$.

Donc $BA = BC \times \cos 60° = 12 \times 0{,}5 = 6$ cm.

Méthode : calculer une longueur avec le cosinus

1. **Écris** l'égalité du cosinus, $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$, avec la mesure connue de l'angle.
2. **Pour le côté adjacent**, multiplie : $BA = BC \times \cos \widehat{ABC}$.
3. **Pour l'hypoténuse**, divise : $BC = \dfrac{BA}{\cos \widehat{ABC}}$.
4. **Donne** une valeur approchée avec sa précision. Utilise la calculatrice réglée en degrés.

Deux exemples

Exemple : le côté adjacent

Le triangle DEF est rectangle en E, avec $\widehat{EDF} = 35°$ et $DF = 8$ cm. Le côté adjacent à l'angle en D est $[DE]$.

D'après la définition du cosinus, $DE = DF \times \cos 35° = 8 \times \cos 35°$.

La calculatrice affiche $6{,}553216354$. Donc $DE \approx 6{,}55$ cm au centième près.

Exemple : l'hypoténuse

Le triangle GHI est rectangle en H, avec $\widehat{HGI} = 50°$ et $GH = 4$ cm. Le côté connu $[GH]$ est adjacent à l'angle en G. On cherche l'hypoténuse $[GI]$.

D'après la définition du cosinus, $GI = \dfrac{GH}{\cos 50^\circ} = \dfrac{4}{\cos 50^\circ}$.

La calculatrice affiche $6{,}222895307$. Donc $GI \approx 6{,}22$ cm au centième près.

Attention : multiplier ou diviser ?

✗ « Dans le triangle GHI, $GI = 4 \times \cos 50^\circ$. »

✓ Le côté connu est adjacent et l'hypoténuse est cherchée : on divise.

Contrôle : le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse. Or $4 \times \cos 50^\circ$ est plus petit que 4, car $\cos 50^\circ < 1$. Ce résultat ne peut donc pas être l'hypoténuse.

Remarque : garder l'affichage jusqu'au bout

Dans un calcul en plusieurs étapes, garde la valeur affichée par la calculatrice. Ne remplace un nombre par une valeur approchée qu'à la fin. Sinon, les petites erreurs s'ajoutent.

Une rampe d'accès

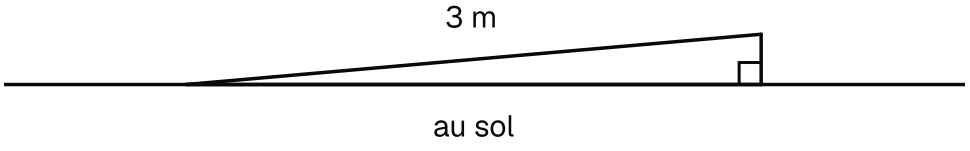
Exemple : la longueur au sol d'une rampe

Une rampe d'accès pour fauteuil roulant mesure 3 m de long. Elle fait un angle de 5° avec le sol horizontal. Quelle longueur occupe-t-elle au sol ?

- Le sol, la rampe et la hauteur du trottoir forment un triangle rectangle.
- La rampe est l'hypoténuse.
- La longueur au sol est le côté adjacent à l'angle de 5°.

D'après la définition du cosinus, cette longueur vaut $3 \times \cos 5^\circ$. La calculatrice affiche $2{,}988584094$.

La rampe occupe donc $3 \times \cos 5^\circ \approx 2{,}99$ m au sol, au centième près.



La rampe de 3 m posée sur le sol horizontal avec une pente de 5 degrés, et la longueur qu'elle occupe au sol.

Vérifie : Un cerf-volant

Le fil d'un cerf-volant mesure 50 m. Il est tenu au ras du sol et fait un angle de $60°$ avec le sol horizontal. À quelle distance horizontale de la main se trouve le cerf-volant ?

A. À 100 m.

Faux.

Tu as divisé par $\cos 60°$. Or le fil est l'hypoténuse : on multiplie.

B. À 25 m.

Juste.

Juste : $50 \times \cos 60° = 50 \times 0{,}5 = 25$.

C. À 50 m.

Faux.

C'est la longueur du fil, qui est l'hypoténuse.

D. À $0{,}5$ m.

Faux.

C'est le cosinus de l'angle, pas une distance.

Correction

La main, le cerf-volant et le point du sol situé sous lui forment un triangle rectangle. Le fil est l'hypoténuse. La distance horizontale est le côté adjacent à l'angle de $60°$.

La calculatrice affiche $0{,}5$ pour $\cos 60°$. D'après la définition du cosinus, la distance vaut $50 \times \cos 60° = 50 \times 0{,}5 = 25$ m.

À toi

Vérifie : La bonne opération

Dans un triangle ABC rectangle en A, tu connais BA et l'angle $\widehat{ABC}$. Quelle écriture donne l'hypoténuse BC ?

A. $BC = BA \times \cos \widehat{ABC}$

Faux.

Ce produit est plus petit que BA : ce ne peut pas être l'hypoténuse.

B. $BC = \dfrac{\cos \widehat{ABC}}{BA}$

Faux.

Le quotient est renversé.

C. $BC = \dfrac{BA}{\cos \widehat{ABC}}$

Juste.

Juste : on divise le côté adjacent par le cosinus.

D. $BC = BA + \cos\widehat{ABC}$

Faux.

On n'additionne pas une longueur et un cosinus.

Correction

D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$.

Donc $BA = BC \times \cos\widehat{ABC}$, puis $BC = \dfrac{BA}{\cos\widehat{ABC}}$.

À toi : Une hypoténuse

Le triangle PQR est rectangle en Q, avec $\widehat{QPR} = 25°$ et $PQ = 10$ cm. Calcule PR au millimètre près. Vérifie ensuite que PR est plus long que PQ. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère la position du côté connu $[PQ]$ par rapport à l'angle de sommet P.

Indice 2

$[PQ]$ est adjacent à l'angle en P ; $[PR]$ est l'hypoténuse.

Indice 3

Point délicat : pour l'hypoténuse, on divise par le cosinus.

Réponse

Côtés. Le côté $[PQ]$ est adjacent à l'angle en P, et $[PR]$ est l'hypoténuse.

Calcul. D'après la définition du cosinus, $PR = \dfrac{PQ}{\cos 25°} = \dfrac{10}{\cos 25°}$. La calculatrice affiche $11{,}03377919$. Donc $PR \approx 11{,}0$ cm au millimètre près.

Contrôle. On a $PR = \dfrac{10}{\cos 25°}$ et $\cos 25° < 1$, donc $PR > 10$.

Conclusion. $PR \approx 11{,}0$ cm au millimètre près, et PR est bien plus long que PQ.

Ce qu'il faut retenir

Vérifie : Quel outil ?

Dans un triangle rectangle, tu connais un angle aigu et l'hypoténuse. Tu cherches le côté adjacent à cet angle. Quel outil choisis-tu ?

A. Le théorème de Pythagore.

Faux.

Il demande deux longueurs connues ; ici, tu n'en connais qu'une.

B. Le milieu de l'hypoténuse.

Faux.

Il donne la distance du milieu aux sommets, pas un côté de l'angle droit.

C. Le cosinus de l'angle.

Juste.

Juste : il relie l'angle, le côté adjacent et l'hypoténuse.

D. Le cercle de diamètre l'hypoténuse.

Faux.

Il prouve qu'un triangle est rectangle ; ici, tu le sais déjà.

Correction

On connaît un angle et une longueur. Le cosinus relie l'angle, le côté adjacent et l'hypoténuse.

On multiplie donc l'hypoténuse par le cosinus de l'angle.

À retenir : choisir l'outil

- **Le cercle** : pour prouver qu'un triangle est rectangle, vérifie que le troisième sommet, distinct des extrémités du côté opposé, est sur le cercle de diamètre ce côté. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à la même distance des trois sommets.
- **Le théorème de Pythagore** : dans un triangle rectangle, tu connais deux longueurs et tu cherches la troisième.
- **Le cosinus** : dans un triangle rectangle, tu relies un angle aigu, son côté adjacent et l'hypoténuse.
- **La racine carrée** : garde la valeur exacte, et écris la précision de chaque valeur approchée.

À toi : Trois situations

Pour chaque situation, choisis l'outil. (a) Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit de 2 m et 3 m ; tu cherches l'hypoténuse. (b) Un point est sur le cercle de diamètre $[AB]$; tu veux prouver qu'un angle est droit. (c) Tu connais l'hypoténuse et un angle aigu ; tu cherches le côté adjacent. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque situation, liste ce que tu connais et ce que tu cherches.

Indice 2

Deux longueurs connues et une longueur cherchée : pense au théorème de Pythagore.

Indice 3

Point délicat : pour chaque situation, compare ce que tu connais (angle, longueurs) avec ce que tu cherches.

Réponse

(a) Le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse vaut $2^2 + 3^2 = 13$, donc l'hypoténuse mesure $\sqrt{13}$ m.

> (b) La propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle.
>
> (c) Le cosinus : le côté adjacent est le produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle.

Le mot du prof. Reviens au menuisier du début. Son cadre a un angle droit, et ses marques sont à 3 dm et 4 dm.

D'après le théorème de Pythagore, le carré de la diagonale vaut $3^2 + 4^2 = 25$: elle mesure $\sqrt{25} = 5$ dm.

Tu sais maintenant reconnaître un triangle rectangle, et y calculer une longueur ou un angle. Avant chaque calcul, repère l'angle droit et nomme la propriété que tu utilises.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le triangle rectangle et le cercle » (2ac · general · mathematiques)