BURHAN

La symétrie axiale : Résumé

2ème Année Collège · Mathématiques

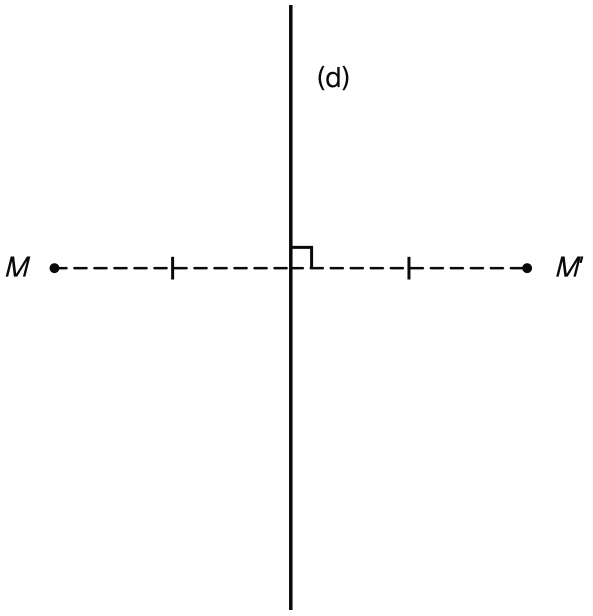
Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/symetrie-axiale/resume

Chapitre	Semestre
La symétrie axiale	Semestre 1

Le symétrique d'un point

À retenir : L'idée

Plie ta feuille le long d'une droite (d). Un point M marqué à l'encre fraîche laisse une trace M' de l'autre côté du pli : c'est son symétrique. Les deux points sont à la même distance du pli, sur une même perpendiculaire au pli.



Après le pliage : M et sa trace M' de part et d'autre du pli (d), sur une même perpendiculaire.

Définition : Symétrique d'un point par rapport à une droite

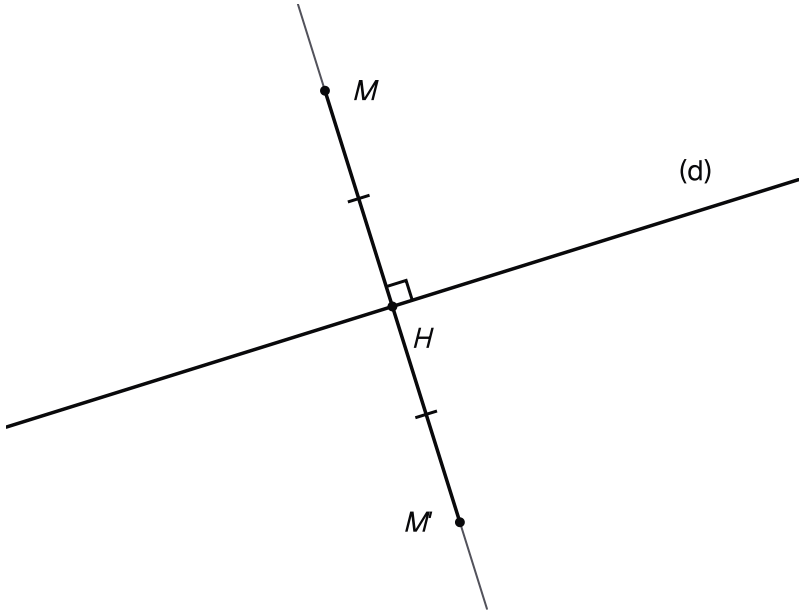
Soit (d) une droite et M un point.

- Si M n'est pas sur (d), le **symétrique** de M par rapport à (d) est le point M' tel que (d) soit la **médiatrice** du segment $[MM']$: la droite (d) est perpendiculaire à (MM') et passe par le milieu de $[MM']$.
- Si M est sur (d), son symétrique par rapport à (d) est le point M lui-même.

On dit alors que M et M' sont **symétriques par rapport à** (d) : M est aussi le symétrique de M'. La droite (d) est l'**axe** de la symétrie.

Méthode : À l'équerre et à la règle graduée

1. **Perpendiculaire.** Pose l'équerre le long de (d) et trace la perpendiculaire à (d) qui passe par M. Appelle H le point où elle coupe (d).
2. **Mesure.** Lis la longueur MH sur la règle graduée.
3. **Report.** Sur la même perpendiculaire, de l'autre côté de (d), marque M' avec $HM' = MH$.



Les trois gestes à l'équerre et à la règle : perpendiculaire par M, pied H sur (d), report de MH au-delà.

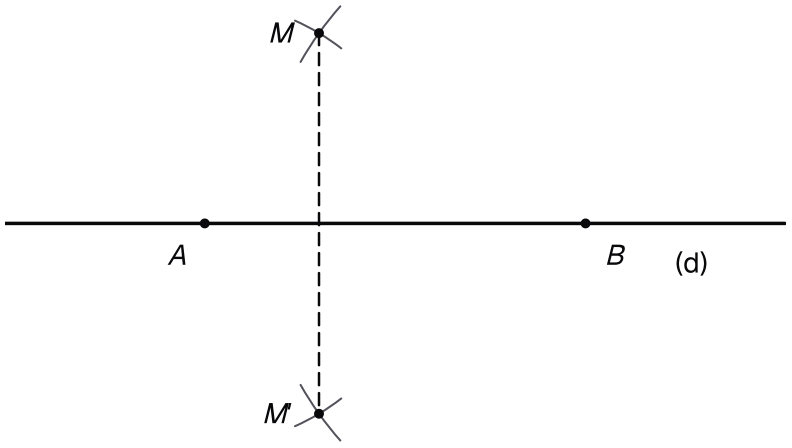
Méthode : Au compas

1. **Deux centres.** Le point M n'est pas sur (d) : sinon, il est son propre symétrique. Choisis deux points A et B sur (d), assez loin l'un de l'autre.
2. **Deux arcs.** Pique le compas en A, écarte-le jusqu'à M, et trace un arc de l'autre côté de (d). Recommence avec le centre B.
3. **Le point.** Les deux arcs se croisent en M'.

Rappel de 1re année :

- tout point de la médiatrice d'un segment est à la même distance de ses deux extrémités ;
- dans l'autre sens, tout point situé à la même distance des deux extrémités appartient à la médiatrice.

Pourquoi ça marche : A est à égale distance de M et de M', et B aussi. Les deux points A et B appartiennent donc à la médiatrice de $[MM']$. Cette médiatrice est la droite (AB), c'est-à-dire (d).



Avec le compas, piqué en A puis en B et écarté jusqu'à M, deux arcs se croisent en M' sous la droite (d).

Exemple : Sur un quadrillage

On appelle nœud tout croisement de deux lignes du quadrillage. L'axe (d) est une ligne verticale du quadrillage, et O est un nœud de (d). Pour aller de O à A : 4 carreaux vers la gauche, puis 1 carreau vers le haut.

Alors, pour aller de O à A' : 4 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le haut. Contrôle : A et A' sont sur la même ligne horizontale, chacun à 4 carreaux de (d).

Exemple : Avec un axe diagonal

Cette fois, l'axe (d) suit les diagonales des carreaux : il passe par le nœud O et monte vers la droite. Le point B est sur la ligne horizontale de O, à 3 carreaux à droite de O.

Son symétrique B' est sur la ligne verticale de O, à 3 carreaux au-dessus de O. Le segment $[BB']$ suit l'autre diagonale des carreaux : il est perpendiculaire à (d).

Attention : La même distance ne suffit pas

Un point situé à la même distance de (d) que M n'est pas forcément son symétrique. Il faut aussi que le segment $[MM']$ soit perpendiculaire à (d).

Si tu fais glisser M' parallèlement à (d), (d) n'est plus la médiatrice de $[MM']$.

Remarque : Un point de l'axe

Tout point situé sur (d) reste en place : son symétrique, c'est lui-même.

Sur le quadrillage à axe vertical, le nœud de (d) situé à 2 carreaux au-dessus de O reste à sa place.

Ce que la symétrie axiale conserve

Remarque : Des propriétés admises

Les propriétés de ce Résumé sont **admises** : tu les as observées par pliage, au papier calque et par mesure. Tu ne les démontres pas. Tu les **utilises** pour calculer et pour justifier.

Propriété : Conservation des distances

Soit (d) une droite, et A', B' les symétriques de deux points A et B par rapport à (d). Alors :

$$A'B' = AB.$$

Le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à (d) est le segment $[A'B']$: il a la même longueur. On dit que la symétrie axiale **conserve les distances**.

Exemple : Une longueur sur quadrillage

L'axe (d) est vertical. Le segment $[EF]$ suit une ligne horizontale : E est à 1 carreau à gauche de (d) et F à 6 carreaux à gauche. Donc $EF = 5$ carreaux.

Leurs symétriques sont sur la même ligne, à 1 et à 6 carreaux à droite de (d) : $E'F' = 5$ carreaux aussi.

Propriété : Conservation de l'alignement et du milieu

Soit (d) une droite. Par rapport à (d) :

- si trois points A, B et C sont alignés, leurs symétriques A', B' et C' sont alignés ;
- le symétrique de la droite (AB) est la droite $(A'B')$, et le symétrique de la demi-droite $[Ax)$ est une demi-droite d'origine A' ;
- si I est le milieu du segment $[AB]$, son symétrique I' est le milieu du segment $[A'B']$.

On dit que la symétrie axiale **conserve l'alignement** et le milieu.

Exemple : Trois points alignés

Les points R, S et T sont alignés dans cet ordre, avec $RS = ST = 2{,}7$ cm. Donc S est le milieu de $[RT]$, et $RT = 2{,}7 + 2{,}7 = 5{,}4$ cm.

Leurs symétriques par rapport à une droite sont alignés, et S' est le milieu de $[R'T']$. De plus, $R'T' = RT = 5{,}4$ cm.

Propriété : Conservation des angles

Soit (d) une droite.

- Le symétrique d'un angle par rapport à (d) est un angle de **même mesure** : si A', B' et C' sont les symétriques de A, B et C, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- Les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- Les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

On dit que la symétrie axiale **conserve les mesures des angles**.

Exemple : Un angle

Un angle $\widehat{KLM}$ mesure $38°$. Son symétrique $\widehat{K'L'M'}$ par rapport à une droite mesure aussi $38°$. Pour le contrôler, place le centre du rapporteur sur le sommet L'.

Méthode : Tracer le symétrique d'une figure faite de segments

1. **Les points utiles.** Choisis les points qui suffisent : les deux bouts d'un segment, chaque sommet d'un polygone, ou bien deux points quelconques d'une droite.
2. **Leurs symétriques.** Construis le symétrique de chaque point utile.
3. **Le tracé.** Relie les nouveaux points dans le même ordre. Pour une droite, prolonge le trait des deux côtés.
4. **Le contrôle.** Mesure une même longueur des deux côtés de l'axe : tu dois lire la même valeur.

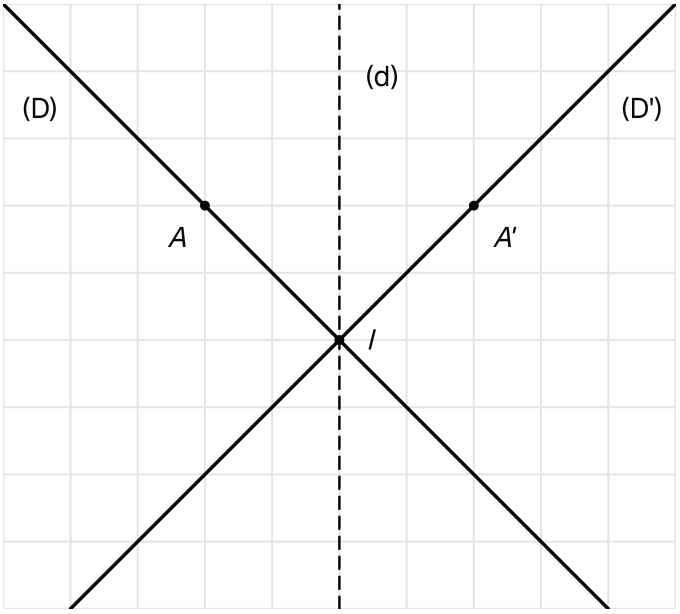
Attention : Une figure retournée

La figure symétrique s'obtient par pliage, pas en faisant glisser la figure. Si tu lis les sommets du triangle ABC dans le sens des aiguilles d'une montre, tu lis ceux de $A'B'C'$ dans l'autre sens.

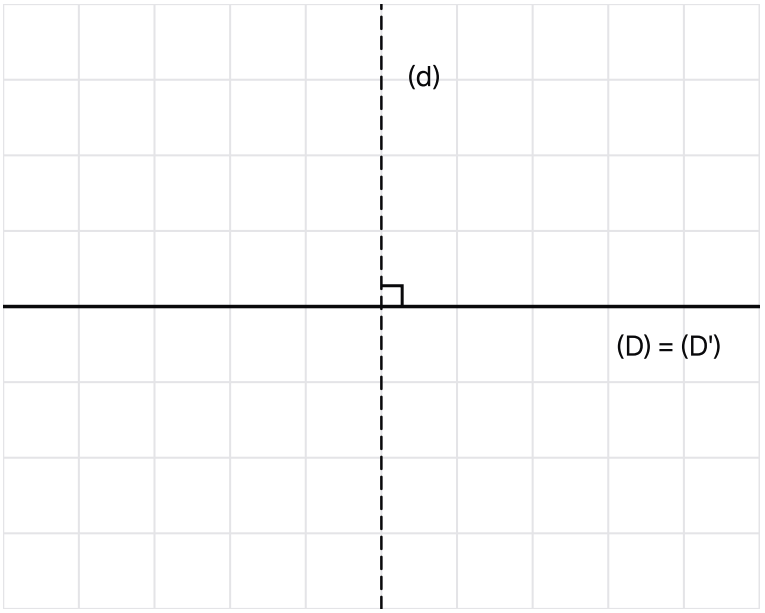
Le symétrique d'une droite

À retenir : Trois positions

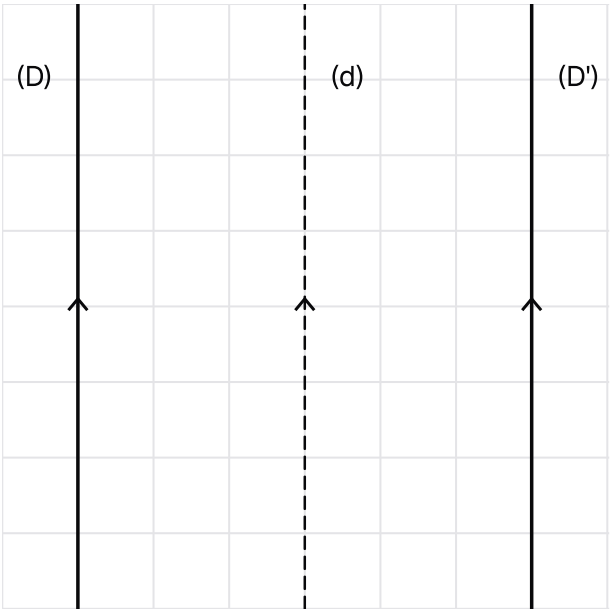
Pour prévoir le symétrique d'une droite (D), regarde d'abord comment elle est placée par rapport à l'axe (d). Elle peut le couper, lui être perpendiculaire, ou lui être parallèle.



Si (D) rencontre l'axe en I, la droite (D') rencontre l'axe au même point I.



Une droite qui croise l'axe à angle droit se retrouve sur elle-même.



Une droite parallèle à l'axe, à 3 carreaux d'un côté, a sa symétrique parallèle, à 3 carreaux de l'autre côté.

Propriété : Symétrique d'une droite selon sa position par rapport à l'axe

Soit (d) une droite, (D) une autre droite et (D') le symétrique de (D) par rapport à (d).

- Si (D) coupe (d) en un point I, alors (D') passe aussi par I.
- Si (D) est perpendiculaire à (d), alors (D') est la droite (D) elle-même.
- Si (D) est parallèle à (d), alors (D') est aussi parallèle à (d).
- L'axe (d) est son propre symétrique : chaque point de (d) est son propre symétrique.

La droite coupe l'axe en I (D') passe par I	La droite est perpendiculaire à l'axe $(D') = (D)$
La droite est parallèle à l'axe $(D') \parallel (d)$	Un point M de l'axe $M' = M$

Exemple : Sur un quadrillage

L'axe (d) est vertical et passe par le nœud O. La droite (D) est la ligne verticale située à 2 carreaux à gauche de (d). Son symétrique est la ligne verticale située à 2 carreaux à droite de (d) : elle est parallèle à (d).

La ligne horizontale qui passe par O est perpendiculaire à (d) : elle est son propre symétrique.

Attention : Une droite qui reste, des points qui bougent

Une droite perpendiculaire à l'axe est son propre symétrique. Pourtant, ses points changent de côté.

Sur la ligne horizontale de O, le nœud situé à 3 carreaux à gauche de O a pour symétrique le nœud situé à 3 carreaux à droite. Seul O, qui est sur l'axe, reste en place.

Cercles, périmètres et aires

Propriété : Symétrique d'un cercle ; conservation des périmètres et des aires

Soit (d) une droite.

- Le symétrique par rapport à (d) du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de **même rayon** r, où O' est le symétrique de O.
- Une figure et sa symétrique par rapport à (d) ont le **même périmètre** et la **même aire**.

On dit que la symétrie axiale **conserve les aires**.

Méthode : Construire le symétrique d'un cercle ou d'un angle

1. **Cercle.** Construis le symétrique O' du centre O. Garde l'écartement du compas égal au rayon, et trace le cercle de centre O'.
2. **Angle.** Construis le symétrique du sommet, puis celui d'un point sur chacun des deux côtés.
3. **Côtés.** Trace les deux demi-droites qui partent du nouveau sommet et passent par ces deux points.
4. **Contrôle.** Le rayon se vérifie au compas, l'angle au rapporteur.

Exemple : Un cercle

Le cercle de centre P a pour rayon $1{,}8$ cm, et P est à 3 cm de l'axe (d).

Son symétrique est le cercle de centre P', à 3 cm de l'autre côté de (d), et de rayon $1{,}8$ cm. Les deux centres sont à 6 cm l'un de l'autre.

Exemple : Une aire sur quadrillage

Un triangle rectangle a deux côtés de l'angle droit qui suivent les lignes du quadrillage et mesurent 5 carreaux et 2 carreaux. Son aire vaut $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$ carreaux (l'unité d'aire est un carreau).

Son symétrique par rapport à n'importe quelle droite a aussi une aire de 5 carreaux.

Exemple : Un rectangle

Un rectangle mesure $3{,}5$ cm sur 2 cm. Son périmètre vaut $2 \times (3{,}5 + 2) = 11$ cm, et son aire vaut $3{,}5 \times 2 = 7$ cm².

Son symétrique a le même périmètre, 11 cm, et la même aire, 7 cm².

Axes de symétrie d'une figure

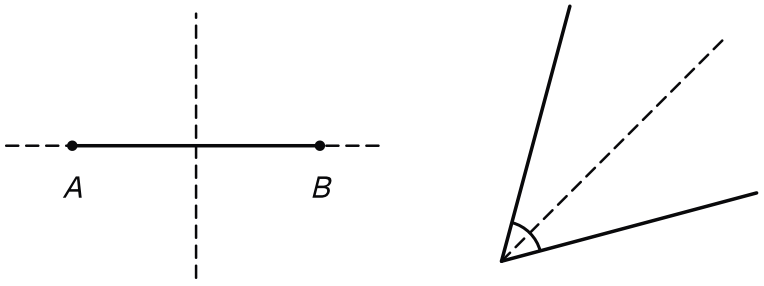
Définition : Axe de symétrie d'une figure

Une droite (d) est un **axe de symétrie** d'une figure lorsque le symétrique de cette figure par rapport à (d) est la figure elle-même.

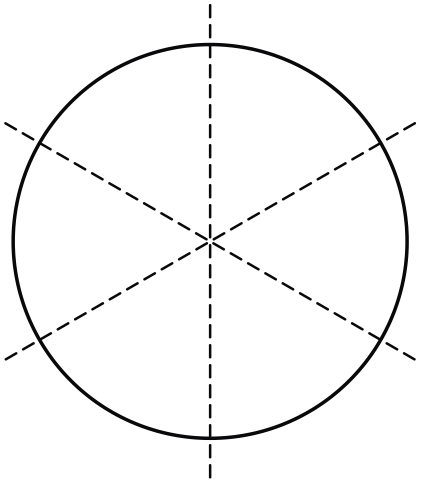
Autrement dit, le symétrique par rapport à (d) de chaque point de la figure est encore un point de la figure. Si l'on plie la feuille le long de (d), les deux parties de la figure se superposent exactement.

Propriété : Axes de symétrie de figures usuelles

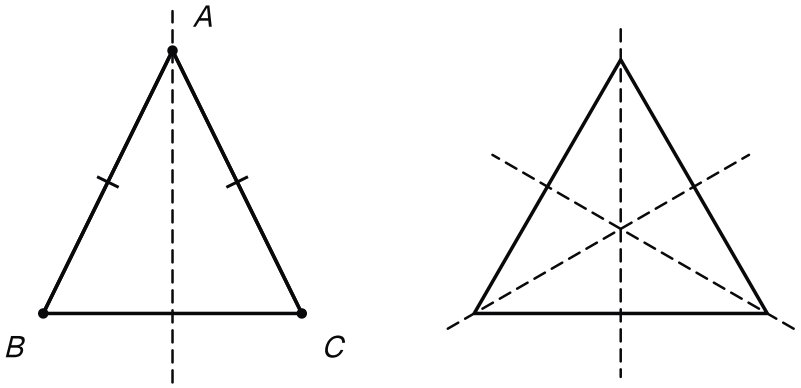
- Un **segment** $[AB]$ a deux axes de symétrie : sa médiatrice et la droite (AB).
- Un **angle** a un axe de symétrie : la droite qui porte sa bissectrice.
- Un **triangle isocèle** en A a pour axe de symétrie la médiatrice de sa base $[BC]$; cette droite passe par le sommet A.
- Un **triangle équilatéral** a trois axes de symétrie : les médiatrices de ses trois côtés.
- Un **cercle** a une infinité d'axes de symétrie : toutes les droites qui passent par son centre.



Axes en pointillés : deux pour le segment [AB], un seul pour l'angle, porté par sa bissectrice.



Un cercle et trois de ses diamètres en pointillés : chaque droite menée par le centre est un axe.



Le triangle isocèle en A n'a qu'un axe, passant par A ; le triangle équilatéral en a trois.

Remarque : Rappel de 1re année

Pour un rectangle non carré, les deux axes de symétrie sont les médiatrices de ses côtés. Pour un losange non carré, ce sont ses deux diagonales. Le carré, à la fois rectangle et losange, cumule ces axes : il en a quatre.

Méthode : Chercher et compter les axes d'une figure

1. **Chercher.** Imagine un pliage, ou prends un papier calque, pour trouver une droite qui partage la figure en deux moitiés superposables.
2. **Contrôler.** Pour chaque sommet, son symétrique doit être lui aussi l'un des sommets.
3. **Tracer.** Dessine en pointillés chacun des axes obtenus.
4. **Compter.** Essaie toutes les directions : horizontale, verticale, diagonales. Puis donne le nombre d'axes.

Exemple : Des lettres capitales

Dessine les lettres capitales avec des segments.

La lettre M, faite de deux traits verticaux de même longueur reliés par un V dont la pointe est au milieu, a un seul axe, vertical.

La lettre Z, faite de deux barres horizontales de même longueur reliées par un trait oblique, n'en a aucun : un pli vertical ou horizontal envoie le trait oblique sur un trait qui penche dans l'autre sens.

Attention : Le parallélogramme

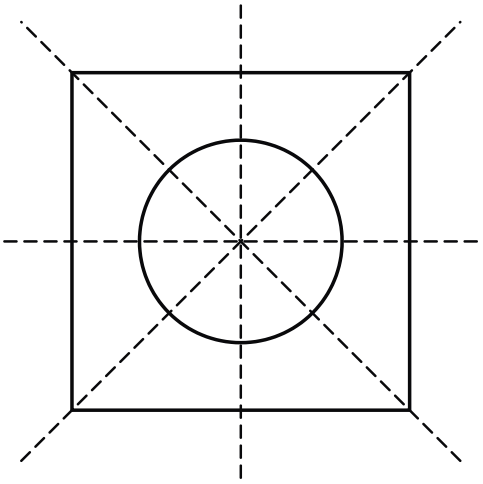
Un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange n'a **aucun** axe de symétrie. Plie-le le long d'une diagonale : les deux moitiés ne se superposent pas. Attention aussi au rectangle non carré : ses diagonales ne sont pas des axes de symétrie.

Exemple : Une figure composée

Un carré et un cercle qui a le même centre forment une figure composée.

Chaque axe du carré passe par le centre du cercle : c'est donc aussi un axe du cercle. Un axe de la figure doit aussi être un axe du carré : les autres droites sont donc exclues.

Il reste quatre axes de symétrie pour la figure : ceux du carré.



Un carré, un cercle de même centre et, en pointillés, les quatre axes communs aux deux figures.

Justifier avec la symétrie axiale

Méthode : Rédiger une justification

1. **Les données.** Nomme les points symétriques et l'axe utilisé.
2. **La propriété.** Cite la conservation qui sert : distances, alignement, milieu, angles, périmètre ou aire.
3. **La conclusion.** Termine par « donc » et le résultat.

Le modèle à suivre : « On sait que… ; or… ; donc… ».

Exemple : Justifier une longueur

Les points G' et H' sont les symétriques de G et H par rapport à (d), et $GH = 4{,}6$ cm.

On sait que G' et H' sont les symétriques de G et H par rapport à (d) ; or la symétrie axiale conserve les distances ; donc $G'H' = GH = 4{,}6$ cm.

Exemple : Justifier un angle droit

On sait que le triangle $U'V'W'$ est le symétrique du triangle UVW par rapport à (d), et que $\widehat{UVW} = 90°$; or la symétrie axiale conserve les angles ; donc $\widehat{U'V'W'} = 90°$.

Le triangle $U'V'W'$ est donc rectangle en V'.

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Construire le symétrique d'un point** : la définition, avec l'équerre et la règle graduée, ou avec le compas.
- **Trouver une longueur** : la conservation des distances.
- **Prouver un alignement ou un milieu** : la conservation de l'alignement et du milieu.
- **Trouver un angle, une perpendiculaire, une parallèle** : la conservation des angles.
- **Prévoir le symétrique d'une droite** : sa position par rapport à l'axe.
- **Un cercle, un périmètre, une aire** : même rayon, même périmètre, même aire.
- **Compter des axes** : le pliage, puis le contrôle sommet par sommet.

Attention : Axe ou centre ?

Ne confonds pas les deux symétries. Rappel de 1re année : le symétrique de M par rapport à un **point** O est le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$. Par rapport à une **droite** (d), c'est (d) qui est la médiatrice de $[MM']$.

Distances $A'B' = AB$	Milieu I' milieu de $[A'B']$
Angles $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$	Rayon d'un cercle $r' = r$
Périmètre P de la figure, P' de son symétrique $P' = P$	Aire de la figure et aire de son symétrique $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$

À retenir

Le symétrique d'une figure par rapport à une droite est une figure superposable, mais retournée. Les longueurs, les angles, l'alignement, le milieu, le périmètre et l'aire ne changent pas.