BURHAN

La symétrie axiale : exercices, niveau examen

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/symetrie-axiale/exercices/examen

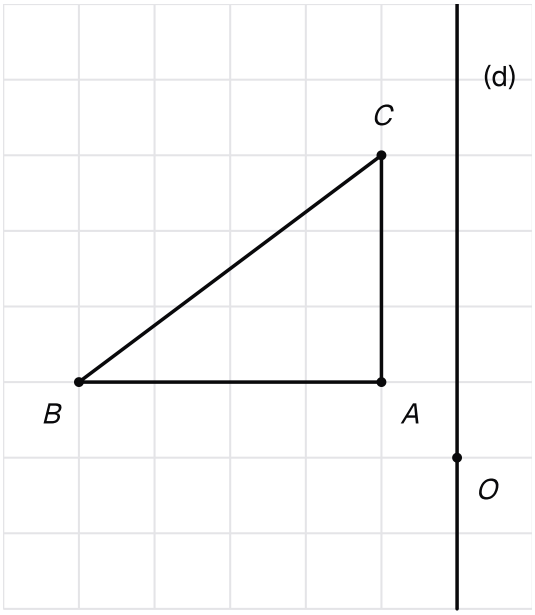
Chapitre	Palier	Exercices
La symétrie axiale	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un triangle rectangle sur quadrillage

Sur un quadrillage, l'axe (d) suit une ligne verticale et passe par un nœud O (le croisement d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale du quadrillage). Le triangle ABC est repéré à partir de O :

- A : 1 carreau vers la gauche, puis 1 carreau vers le haut ;
- B : 5 carreaux vers la gauche, puis 1 carreau vers le haut ;
- C : 1 carreau vers la gauche, puis 4 carreaux vers le haut.



Les données : l'axe (d) vertical par le nœud O, et le triangle ABC tout entier à sa gauche.

Construire 1,5 pts

Construis le triangle $A'B'C'$, symétrique de ABC par rapport à (d). Décris la position de chaque sommet à partir de O.

INDICE

Outil : chaque sommet et son symétrique sont sur la même ligne horizontale, à la même distance de (d).

CORRIGÉ

Chaque sommet et son symétrique sont sur la même ligne horizontale, à la même distance de (d), de part et d'autre.

Pour aller de O à A' : 1 carreau vers la droite, puis 1 carreau vers le haut.

Pour aller de O à B' : 5 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le haut.

Pour aller de O à C' : 1 carreau vers la droite, puis 4 carreaux vers le haut.

Contrôle : AA' vaut 2 carreaux et le milieu de $[AA']$ est sur (d).

Conclusion. On trace le triangle $A'B'C'$ en reliant les trois points obtenus.

Un angle droit 1,5 pts

Justifie que le triangle ABC est rectangle en A, puis que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

INDICE

Début : regarde la direction des côtés $[AB]$ et $[AC]$ sur le quadrillage.

CORRIGÉ

Le triangle ABC. Le côté $[AB]$ suit une ligne horizontale du quadrillage et le côté $[AC]$ une ligne verticale. Ces deux côtés sont perpendiculaires : $\widehat{BAC} = 90°$.

Le triangle $A'B'C'$. On sait que $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à (d). Or la symétrie axiale conserve les angles. Donc $\widehat{B'A'C'} = 90°$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en A, et le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

L'aire 1 pts

Calcule l'aire du triangle ABC en carreaux. En déduire l'aire du triangle $A'B'C'$.

INDICE

Outil : l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

CORRIGÉ

Aire de ABC. On compte AB égal à 4 carreaux et AC égal à 3 carreaux. Ce sont les côtés de l'angle droit, donc l'aire est la moitié de leur produit :

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Aire de $A'B'C'$. Or la symétrie axiale conserve les aires. Donc l'aire de $A'B'C'$ vaut aussi 6 carreaux.

Conclusion. Chacun des deux triangles a une aire de 6 carreaux.

Un axe de la figure 1 pts

La figure formée par les deux triangles est-elle symétrique par rapport à (d) ? Explique.

INDICE

Point délicat : cherche le symétrique de chacun des deux triangles.

CORRIGÉ

Le symétrique de ABC est $A'B'C'$, et le symétrique de $A'B'C'$ est ABC.

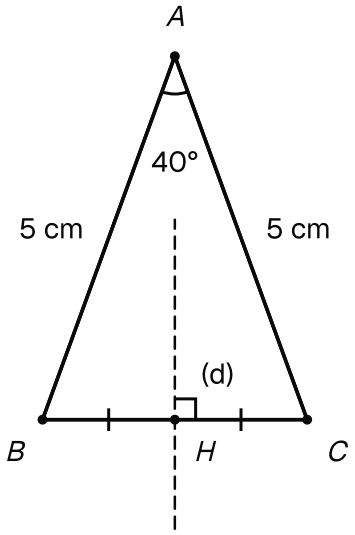
La figure formée des deux triangles a donc pour symétrique cette figure elle-même.

Conclusion. Oui : (d) est un axe de symétrie de cette figure.

Exercice 2 — 5 pts

Le triangle isocèle et sa médiatrice

Le triangle ABC est isocèle en A, avec $AB = AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 40°$. La droite (d) est la médiatrice du segment $[BC]$; elle coupe $[BC]$ en H.



Les données : ABC isocèle en A, AB = AC = 5 cm, un angle de 40 degrés en A, et (d) médiatrice de [BC] en H.

Les symétriques des sommets — 1 pts

Rappel de 1re année : si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à la même distance des deux bouts ; et s'il est à la même distance des deux bouts, il est sur la médiatrice. Comme $AB = AC$, le point A est donc sur la médiatrice de $[BC]$. Donne les symétriques de A, de B et de C par rapport à (d).

INDICE

Outil : relis la définition du symétrique d'un point : elle parle de médiatrice.

CORRIGÉ

Le point A. L'énoncé rappelle que A est sur la médiatrice de $[BC]$, c'est-à-dire sur (d). Un point de l'axe est son propre symétrique.

Les points B et C. La droite (d) est la médiatrice de $[BC]$. Par définition du symétrique, C est donc le symétrique de B, et B celui de C.

Conclusion. Par rapport à (d), le symétrique de A est A, celui de B est C et celui de C est B.

Un côté 1 pts

En déduire le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à (d). Vérifie avec les longueurs.

INDICE

Début : le symétrique d'un segment a pour extrémités les symétriques de ses extrémités.

CORRIGÉ

Le symétrique d'un segment a pour extrémités les symétriques de ses extrémités. Les symétriques de A et de B sont A et C : le symétrique de $[AB]$ est $[AC]$.

Vérification : la symétrie axiale conserve les distances, et on a bien $AC = AB = 5$ cm.

Conclusion. Le symétrique du segment $[AB]$ est le segment $[AC]$.

Les angles à la base 1,5 pts

Justifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, puis calcule ces deux angles.

INDICE

Point délicat : cherche le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$, sommet compris. Rappel de 1re année : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

CORRIGÉ

Égalité des angles. Les symétriques de A, B et C sont A, C et B. Le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc l'angle $\widehat{ACB}$. Or la symétrie axiale conserve les angles ; donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Calcul. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$, donc :

$$\begin{aligned} &\widehat{ABC} + \widehat{ACB} \\ &= 180° - 40° \\ &= 140° \end{aligned}$$

Les deux angles sont égaux : on partage $140°$ en deux, et chacun mesure $70°$.

Conclusion. On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 70°$.

Les angles au sommet 1,5 pts

Justifie que $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$, puis calcule ces deux angles.

INDICE

Début : le point H est sur (d) : quel est son symétrique ?

CORRIGÉ

Égalité des angles. Les points A et H sont sur (d) : ce sont leurs propres symétriques. Le symétrique de B est C. Le symétrique de l'angle $\widehat{BAH}$ est donc l'angle $\widehat{CAH}$. Or la symétrie axiale conserve les angles ; donc $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

Calcul. Le point H est sur le côté $[BC]$, donc la demi-droite $[AH)$ est entre $[AB)$ et $[AC)$. Les deux angles s'ajoutent :

$$\widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 40^\circ$$

Ils sont égaux, donc chacun mesure 20°.

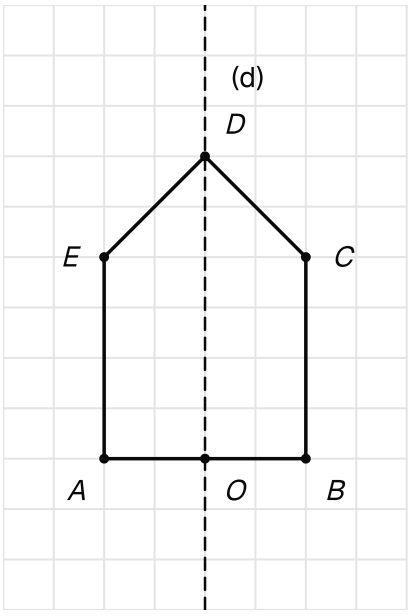
Conclusion. On a $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = 20^\circ$.

Exercice 3

5 pts

Le logo en forme de maison

Sur un quadrillage, un logo a la forme d'une maison : c'est le pentagone $ABCDE$. Ses sommets sont placés à partir d'un nœud O, point de rencontre de deux lignes du quadrillage. Les points A et B sont sur la ligne horizontale de O, à 2 carreaux à gauche et à 2 carreaux à droite de O. Le point C est à 4 carreaux au-dessus de B, et E à 4 carreaux au-dessus de A. Le point D est à 6 carreaux au-dessus de O. La droite (d) est la ligne verticale qui passe par O.



Les données : le logo en forme de maison ABCDE, le nœud O au milieu de [AB] et la droite verticale (d) par O.

Un axe du logo 1,5 pts

Donne le symétrique de chaque sommet par rapport à (d). En déduire que (d) est un axe de symétrie du logo.

INDICE

Outil : un sommet situé sur (d) est son propre symétrique ; pour les autres, compte les carreaux jusqu'à (d).

CORRIGÉ

On compte les carreaux de chaque sommet jusqu'à (d).

- A et B sont à 2 carreaux de (d), de part et d'autre, sur la même ligne horizontale : ils sont symétriques l'un de l'autre.
- E et C sont à 4 carreaux au-dessus de A et de B, donc sur une même ligne horizontale, à 2 carreaux de (d) de part et d'autre : ils sont aussi symétriques l'un de l'autre.
- D est sur (d) : il est son propre symétrique.

Le symétrique du pentagone $ABCDE$ a donc les mêmes sommets : c'est le pentagone lui-même.

Conclusion. La droite (d) est un axe de symétrie du logo.

L'aire du logo 1,5 pts

Calcule l'aire du logo en carreaux.

INDICE

Début : découpe le logo en un carré $ABCE$ et un triangle ECD.

CORRIGÉ

On découpe le logo en un carré $ABCE$ et un triangle ECD.

Le carré. Son côté mesure 4 carreaux : son aire vaut $4 \times 4 = 16$ carreaux.

Le triangle. Sa base $[EC]$ mesure 4 carreaux et sa hauteur 2 carreaux, de $[EC]$ jusqu'à D :

$$\frac{4 \times 2}{2} = 4$$

Son aire vaut 4 carreaux.

Le logo. On additionne : $16 + 4 = 20$ carreaux.

Conclusion. L'aire du logo est de 20 carreaux.

Les deux moitiés 1 pts

L'axe (d) partage le logo en deux parties. Quelle est l'aire de chacune ? Justifie.

INDICE

Outil : les deux parties sont symétriques l'une de l'autre par rapport à (d).

CORRIGÉ

Les deux parties sont symétriques l'une de l'autre par rapport à (d). Or la symétrie axiale conserve les aires ; donc elles ont la même aire.

Chaque partie est la moitié du logo :

$$20 \div 2 = 10$$

Conclusion. Chacune des deux parties a une aire de 10 carreaux.

Un autre axe ? 1 pts

La ligne horizontale située à 2 carreaux au-dessus de O est-elle un axe de symétrie du logo ?

INDICE

Point délicat : cherche le symétrique du sommet D par rapport à cette ligne.

CORRIGÉ

Il suffit de trouver un sommet dont le symétrique n'est pas un sommet du logo.

Le point D est à 6 carreaux au-dessus de O, donc à 4 carreaux au-dessus de cette ligne. Son symétrique serait à 4 carreaux au-dessous de la ligne, donc à 2 carreaux sous O.

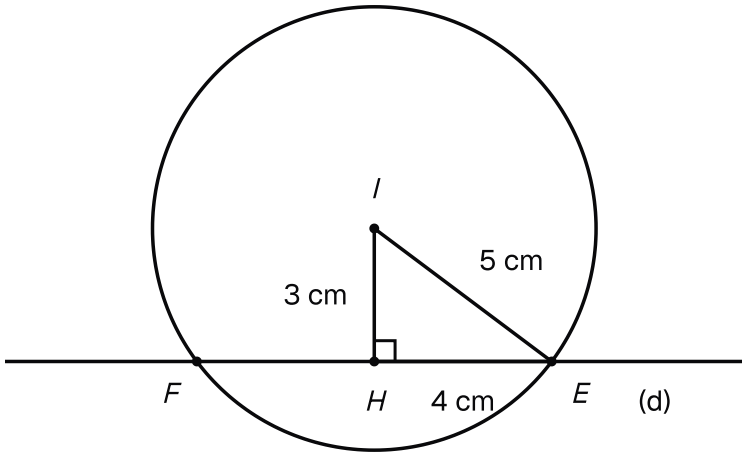
Aucun sommet du logo n'est placé là.

Conclusion. Non : cette ligne horizontale n'est pas un axe de symétrie du logo.

Exercice 4 5 pts

Deux cercles qui se coupent sur l'axe

Sur ton cahier, trace une droite (d) et marque un point I situé à 3 cm de cette droite. On note H le pied de la perpendiculaire à (d) passant par I. Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre I et pour rayon 5 cm. Comme $3 < 5$, il traverse la droite (d) : il la coupe en deux points, nommés E et F. À la règle graduée, tu trouves $HE = 4$ cm.



Les données : I à 3 cm de (d), le pied H, le cercle de centre I et de rayon 5 cm, qui coupe (d) en E et F, avec HE = 4 cm.

Le cercle symétrique 1 pts

Quels sont les symétriques de E et de F par rapport à (d) ? Donne ensuite le centre I' et le rayon du symétrique $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$.

INDICE

Outil : le symétrique d'un cercle se trouve avec son centre et son rayon.

CORRIGÉ

Les points E et F. Ils sont sur (d) : chacun est son propre symétrique.

Le cercle $(\mathcal{C}')$. Le symétrique de $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre I', symétrique de I, et de même rayon, 5 cm.

Le point I'. Il est sur la droite (IH), de l'autre côté de (d), avec $HI' = HI = 3$ cm.

Conclusion. Les symétriques de E et F sont E et F ; le cercle $(\mathcal{C}')$ a pour centre I' et pour rayon 5 cm.

Les points communs 1,5 pts

En déduire que E et F sont aussi sur le cercle $(\mathcal{C}')$. Que valent $I'E$ et $I'F$?

INDICE

Début : le point E est sur $(\mathcal{C})$; où se trouve son symétrique ?

CORRIGÉ

Les points communs. Le point E est sur $(\mathcal{C})$, donc son symétrique est sur $(\mathcal{C}')$. Or ce symétrique est E lui-même : E est sur $(\mathcal{C}')$. De même pour F.

Les longueurs. On sait que I' et E sont les symétriques de I et E ; or la symétrie axiale conserve les distances ; donc $I'E = IE = 5$ cm. De même, $I'F = IF = 5$ cm.

Conclusion. Les points E et F sont sur les deux cercles, et $I'E = I'F = 5$ cm.

Un quadrilatère et ses diagonales 1 pts

Rappel de 1re année : un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur est un losange, et les diagonales d'un losange ont le même milieu. Quelle est la nature du quadrilatère $IEI'F$? Calcule ensuite les longueurs de ses diagonales $[II']$ et $[EF]$.

INDICE

Outil : chacun des quatre côtés est un rayon de l'un des deux cercles ; les deux diagonales se coupent en H.

CORRIGÉ

Nature. Les côtés $[IE]$ et $[IF]$ sont des rayons de $(\mathcal{C})$; les côtés $[I'E]$ et $[I'F]$ sont des rayons de $(\mathcal{C}')$: les quatre mesurent 5 cm. Le quadrilatère $IEI'F$ est donc un losange.

Diagonale $[II']$. Le point H est entre I et I', donc :

$$II' = 3 + 3 = 6$$

Diagonale $[EF]$. Elle est sur (d) et coupe $[II']$ en H, milieu de $[II']$. Les diagonales d'un losange ont le même milieu, donc H est aussi le milieu de $[EF]$. Ainsi $HF = HE = 4$ cm, et :

$$EF = 4 + 4 = 8$$

Conclusion. Le quadrilatère $IEI'F$ est un losange ; ses diagonales mesurent $II' = 6$ cm et $EF = 8$ cm.

Deux axes 1,5 pts

La figure est formée des deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. Explique pourquoi (d) est un axe de symétrie de cette figure. La droite (II') en est-elle un aussi ?

INDICE

Point délicat : pour la droite (II'), cherche le symétrique du centre de chaque cercle par rapport à elle.

CORRIGÉ

La droite (d). Par rapport à (d), le symétrique de $(\mathcal{C})$ est $(\mathcal{C}')$ et celui de $(\mathcal{C}')$ est $(\mathcal{C})$. La figure est sa propre symétrique, donc (d) est un axe.

La droite (II'). Les centres I et I' sont sur cette droite et restent en place. Chaque cercle garde son centre et son rayon : il est son propre symétrique. La droite (II') est aussi un axe de la figure.

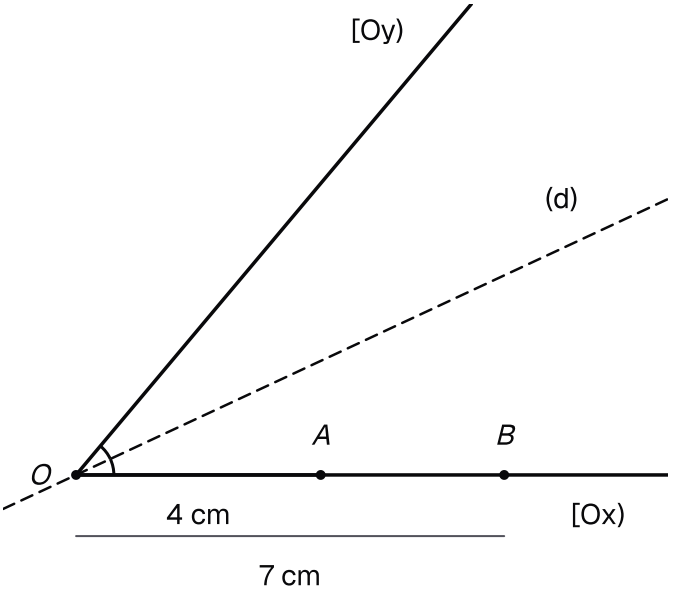
Contrôle : ces deux axes portent les deux diagonales du losange $IEI'F$.

Conclusion. La figure des deux cercles a pour axes de symétrie (d) et (II').

Exercice 5 — 5 pts

L'angle, sa bissectrice et deux parallèles

Sur ton cahier, trace au rapporteur un angle $\widehat{xOy}$ de $50°$, puis la droite (d) qui porte sa bissectrice. Sur la demi-droite $[Ox)$, place deux points A et B avec $OA = 4$ cm et $OB = 7$ cm. On appelle A' et B' les symétriques respectifs de A et de B par rapport à (d).



Les données : l'angle xOy de 50 degrés, sa bissectrice (d), et les points A et B de [Ox), avec OA = 4 cm et OB = 7 cm.

L'autre côté de l'angle — 1,5 pts

Quel est le symétrique de la demi-droite $[Ox)$ par rapport à (d) ? En déduire que A' et B' sont sur $[Oy)$, puis donne OA' et OB'.

INDICE

Outil : un angle a pour axe de symétrie la droite qui porte sa bissectrice.

CORRIGÉ

Le symétrique de $[Ox)$. La droite (d) porte la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$: c'est l'axe de symétrie de cet angle. Le point O, sur (d), reste en place, et le symétrique de $[Ox)$ est $[Oy)$.

Les points A' et B'. Les points A et B sont sur $[Ox)$, donc leurs symétriques A' et B' sont sur $[Oy)$.

Les longueurs. On sait que O est son propre symétrique ; or la symétrie axiale conserve les distances ; donc $OA' = OA = 4$ cm et $OB' = OB = 7$ cm.

Conclusion. Le symétrique de $[Ox)$ est $[Oy)$, les points A' et B' sont sur $[Oy)$, avec $OA' = 4$ cm et $OB' = 7$ cm.

Une longueur 1 pts

Calcule AB, puis en déduire $A'B'$.

INDICE

Début : sur $[Ox)$, le point A est entre O et B, car $4 < 7$.

CORRIGÉ

Calcul de AB. Le point A est entre O et B, donc on soustrait :

$$\begin{aligned} AB &= OB - OA \\ &= 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

Valeur de $A'B'$. Le symétrique du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$. Or la symétrie axiale conserve les distances : $A'B' = AB = 3$ cm.

Contrôle sur $[Oy)$: $OB' - OA' = 7 - 4 = 3$ cm.

Conclusion. On a $AB = 3$ cm et $A'B' = 3$ cm.

Deux droites parallèles 1,5 pts

Justifie que les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires à (d). Rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. En déduire la position de (AA') par rapport à (BB').

INDICE

Outil : relis la définition du symétrique d'un point : quelle droite est la médiatrice de $[AA']$?

CORRIGÉ

La droite (AA'). Par définition, A' est le symétrique de A : la droite (d) est la médiatrice de $[AA']$. Donc $(AA') \perp (d)$.

La droite (BB'). De même, (d) est la médiatrice de $[BB']$. Donc $(BB') \perp (d)$.

Position. Les deux droites sont perpendiculaires à la même droite (d). D'après le rappel de l'énoncé, elles sont parallèles : $(AA') \parallel (BB')$.

Conclusion. Les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires à (d), donc parallèles entre elles.

Le périmètre du quadrilatère 1 pts

Mesure AA' et BB' sur ta figure, au millimètre près (tu dois trouver environ $3{,}4$ cm et $5{,}9$ cm), puis donne une valeur approchée du périmètre de $ABB'A'$.

INDICE

Point délicat : les côtés $[AB]$ et $[A'B']$ sont déjà connus par la question 2 ; seuls AA' et BB' se mesurent.

CORRIGÉ

À la règle graduée, on lit environ $3{,}4$ cm pour AA' et environ $5{,}9$ cm pour BB'. Les côtés $[AB]$ et $[A'B']$ mesurent 3 cm d'après la question 2.

Le périmètre de $ABB'A'$ est $AB + BB' + B'A' + A'A$, soit environ :

$$\begin{aligned} &3 + 5{,}9 + 3 + 3{,}4 \\ &= 15{,}3 \end{aligned}$$

Cette valeur n'est qu'approchée, car AA' et BB' ont été mesurés à la règle.

Conclusion. Le périmètre de $ABB'A'$ vaut environ $15{,}3$ cm.