BURHAN

La symétrie axiale : exercices, entraînement

2ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2ac/mathematiques/symetrie-axiale/exercices/entrainement

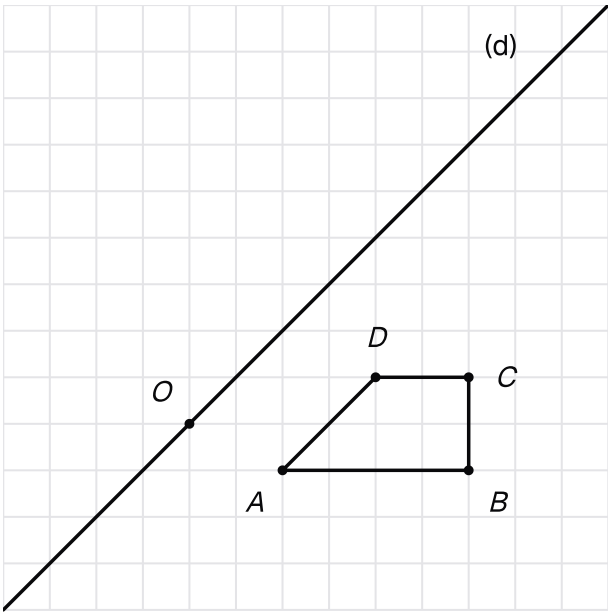
Chapitre	Palier	Exercices
La symétrie axiale	Entraînement	7

Exercice 1

Un quadrilatère et un axe diagonal

Sur un quadrillage, l'axe (d) suit les diagonales des carreaux. Un nœud est un point où se rencontrent deux lignes du quadrillage ; l'axe passe par un nœud O et monte vers la droite. Le quadrilatère $ABCD$ est repéré à partir de O :

- A : 2 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le bas ;
- B : 6 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le bas ;
- C : 6 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le haut ;
- D : 4 carreaux vers la droite, puis 1 carreau vers le haut.



Les données : l'axe (d) suit la diagonale des carreaux par le nœud O, et le quadrilatère ABCD est à sa droite, en bas.

Les symétriques de A et B

Place A' et B', les symétriques de A et B par rapport à (d). Décris le chemin depuis O.

INDICE

Point délicat : l'axe est diagonal, donc $[AA']$ suit l'autre diagonale des carreaux. Depuis A, avance de carreau en carreau en diagonale, vers le haut et la gauche : l'axe doit couper $[AA']$ en son milieu.

CORRIGÉ

L'axe suit une diagonale des carreaux. Le segment $[AA']$ lui est perpendiculaire : il suit l'autre diagonale.

Depuis A, on avance en diagonale vers le haut et la gauche jusqu'au point placé à la même distance de l'axe, de l'autre côté. De A à A', on traverse 3 carreaux en diagonale, et l'axe coupe $[AA']$ en son milieu, à angle droit.

Pour aller de O à A' : 1 carreau vers la gauche, puis 2 carreaux vers le haut.

Pour aller de O à B' : 1 carreau vers la gauche, puis 6 carreaux vers le haut.

Conclusion. Les points A' et B' sont placés : un carreau à gauche de O, puis 2 carreaux vers le haut pour A' et 6 carreaux pour B'.

Le quadrilatère symétrique

Place C' et D', puis trace le quadrilatère $A'B'C'D'$.

INDICE

Outil : construis le symétrique de chaque sommet, puis relie les points dans le même ordre.

CORRIGÉ

On procède comme pour A et B.

Pour aller de O à C' : 1 carreau vers la droite, puis 6 carreaux vers le haut.

Pour aller de O à D' : 1 carreau vers la droite, puis 4 carreaux vers le haut.

On relie ensuite A', B', C' et D' dans cet ordre.

Contrôle : $A'B'$ vaut 4 carreaux sur une ligne verticale, comme AB sur une ligne horizontale.

Conclusion. Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est tracé, avec ses sommets dans le même ordre que ceux de $ABCD$.

L'aire

Calcule l'aire de $ABCD$ en carreaux. En déduire l'aire de $A'B'C'D'$.

INDICE

Début : place le point E de $[AB]$ situé juste sous D ; il découpe $ABCD$ en un rectangle et un triangle rectangle.

CORRIGÉ

Découpage. Le point E découpe $ABCD$ en deux morceaux :

- le rectangle $EBCD$, de 2 carreaux sur 2 carreaux ;
- le triangle AED, rectangle en E, dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 carreaux.

Aire de $ABCD$. On additionne l'aire du rectangle et celle du triangle rectangle :

$$2 \times 2 + \frac{2 \times 2}{2}$$
$$= 4 + 2 = 6$$

Aire de $A'B'C'D'$. La symétrie axiale conserve les aires : $A'B'C'D'$ a la même aire que $ABCD$.

Conclusion. L'aire de $ABCD$ est de 6 carreaux ; celle de $A'B'C'D'$ est aussi de 6 carreaux.

Exercice 2

Un cercle et son symétrique

Trace une droite (d). Place un point K à 4 cm de (d). Trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre K et de rayon $2{,}5$ cm.

Construire

Construis le symétrique $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par rapport à (d). Donne son centre et son rayon.

INDICE

Outil : un cercle est connu par son centre et son rayon.

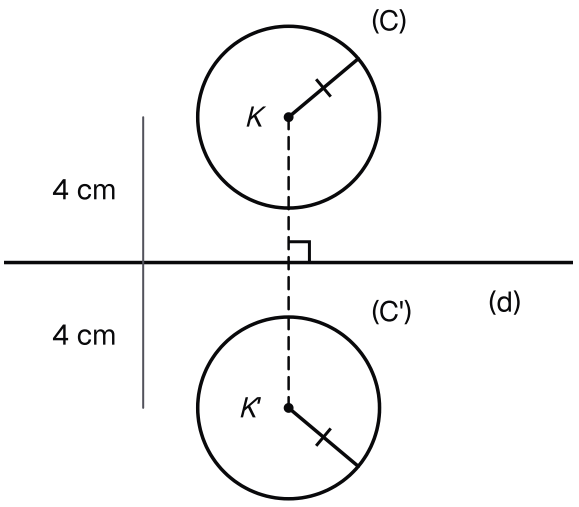
CORRIGÉ

Un cercle est connu par son centre et son rayon.

Le centre. Je construis K', le symétrique de K par rapport à (d) : il est sur la perpendiculaire à (d) qui passe par K, à 4 cm de (d) de l'autre côté. Contrôle : $KK' = 4 + 4 = 8$ cm.

Le rayon. La symétrie axiale conserve les distances, donc le rayon ne change pas.

Conclusion. Le symétrique de $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre K' et de même rayon, $2{,}5$ cm.



Corrigé de la question 1 : le cercle de centre K' symétrique de K, à 4 cm de l'autre côté de (d), garde le rayon de 2,5 cm.

Le cercle et l'axe

Le cercle $(\mathcal{C}')$ coupe-t-il la droite (d) ? Explique.

INDICE

Début : compare la distance du centre K' à (d) avec le rayon du cercle.

CORRIGÉ

Rappel de 1re année : un cercle ne rencontre pas une droite lorsque son centre en est éloigné de plus que le rayon.

Ici, le centre K' est à 4 cm de (d) et le rayon vaut $2{,}5$ cm. Comme $4 > 2{,}5$, le cercle $(\mathcal{C}')$ ne rencontre pas (d).

Il reste un écart de $4 - 2{,}5 = 1{,}5$ cm entre (d) et le cercle : tu peux le mesurer sur ton dessin.

Conclusion. Le cercle $(\mathcal{C}')$ ne coupe pas la droite (d), tout comme $(\mathcal{C})$.

Longueur et aire

On prend $3{,}14$ comme valeur approchée de π. Calcule la longueur du cercle $(\mathcal{C}')$, puis l'aire du disque qu'il limite, arrondie au dixième.

INDICE

Outil : rappel de 1re année : la longueur d'un cercle vaut $2 \times \pi \times r$, l'aire d'un disque vaut $\pi \times r \times r$.

CORRIGÉ

Le cercle $(\mathcal{C}')$ a pour rayon $2{,}5$ cm. On remplace π par $3{,}14$.

Longueur du cercle.

$$2 \times 3{,}14 \times 2{,}5 = 15{,}7$$

Aire du disque.

$$\begin{aligned} &3{,}14 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \\ &= 19{,}625 \end{aligned}$$

Arrondie au dixième, l'aire vaut environ $19{,}6$ cm². Ce sont aussi la longueur de $(\mathcal{C})$ et l'aire de son disque : la symétrie axiale conserve les périmètres et les aires.

Conclusion. Le cercle $(\mathcal{C}')$ mesure $15{,}7$ cm de long, et son disque a une aire d'environ $19{,}6$ cm².

Exercice 3

Trois droites et un axe

Sur un quadrillage, trace l'axe (d) sur une ligne verticale. Choisis sur (d) un nœud O, c'est-à-dire un croisement de deux lignes du quadrillage.

Une droite perpendiculaire à l'axe

La droite (D_1) est la ligne horizontale qui passe 3 carreaux sous O. Quel est son symétrique par rapport à (d) ? Le point P de (D_1) situé à 3 carreaux à gauche de (d) reste-t-il en place ?

INDICE

Point délicat : une droite peut être son propre symétrique sans que ses points restent en place.

CORRIGÉ

La droite. La droite (D_1) est perpendiculaire à (d). Le symétrique de chacun de ses points reste sur la même ligne horizontale, donc sur (D_1) : son symétrique est (D_1) elle-même.

Le point P. Le point P change pourtant de côté. Son symétrique P' est sur (D_1), à 3 carreaux à droite de (d), et PP' vaut 6 carreaux.

Seul le point commun de (D_1) et de (d), à 3 carreaux sous O, est son propre symétrique.

Conclusion. La droite (D_1) est sa propre symétrique, mais le point P ne reste pas en place.

Une droite parallèle à l'axe

La droite (D_2) est la ligne verticale située à 3 carreaux à gauche de (d). Trace son symétrique (D_2'). Quelle distance sépare (D_2) et (D_2') ?

INDICE

Outil : construis les symétriques de deux points de (D_2), puis trace la droite qui les relie.

CORRIGÉ

Deux points de (D_2) sont à 3 carreaux à gauche de (d). Leurs symétriques sont à 3 carreaux à droite de (d).

La droite (D_2') passe par ces deux symétriques : c'est la ligne verticale située à 3 carreaux à droite de (d). Elle est parallèle à (d), comme (D_2).

La distance entre les deux droites vaut $3 + 3 = 6$ carreaux.

Conclusion. Les droites (D_2) et (D_2') sont séparées par 6 carreaux.

Une droite qui coupe l'axe

La droite (D_3) passe par R et S. Pour aller de O à R : 2 carreaux vers la gauche, puis 3 carreaux vers le haut. Pour aller de O à S : 4 carreaux vers la gauche, puis 4 carreaux vers le haut. Trace (D_3) et son symétrique (D_3'). Où se coupent-elles ?

INDICE

Début : prolonge (D_3) jusqu'à l'axe. De S vers R, elle descend d'un carreau quand elle avance de deux carreaux vers la droite.

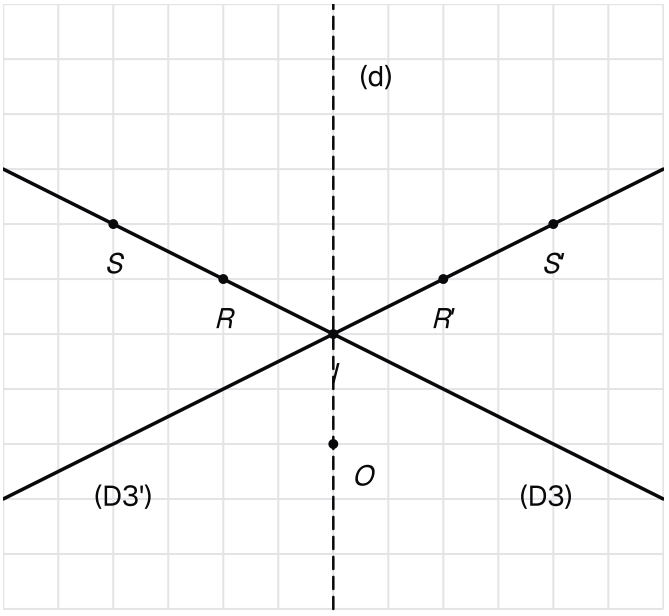
CORRIGÉ

Où (D_3) coupe l'axe. En prolongeant au-delà de R, de 2 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le bas, on arrive sur (d), au nœud I situé à 2 carreaux au-dessus de O.

La droite (D_3'). Pour aller de O à R' : 2 carreaux vers la droite, puis 3 carreaux vers le haut. Pour aller de O à S' : 4 carreaux vers la droite, puis 4 carreaux vers le haut. La droite (D_3') est la droite $(R'S')$.

Le point commun. Le point I est sur l'axe, il est son propre symétrique. Comme il est sur (D_3), il est aussi sur (D_3').

Conclusion. Les droites (D_3) et (D_3') se coupent en I, sur l'axe, à 2 carreaux au-dessus de O.



Corrigé de la question 3 : la droite (D3) par S et R, prolongée jusqu'à l'axe en I, et sa symétrique (D3') par S' et R'.

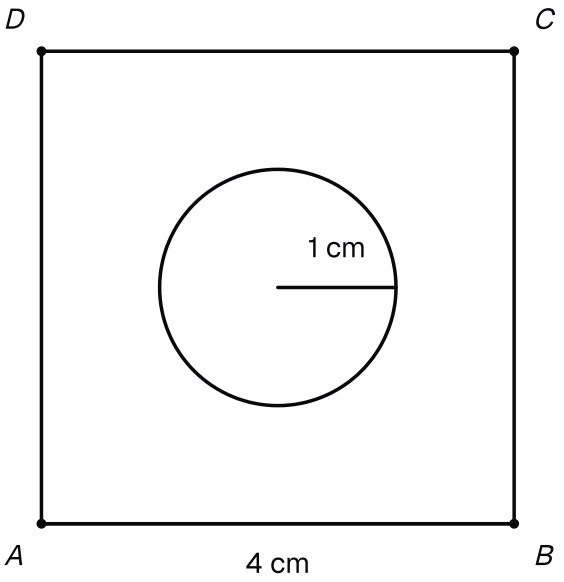
Exercice 4

Axes de figures composées

Pour chaque figure composée, fais un dessin à main levée sur ton cahier, puis cherche ses axes de symétrie.

Un carré et un cercle

La figure est formée d'un carré $ABCD$ de 4 cm de côté et du cercle de rayon 1 cm qui a le même centre que le carré. Combien d'axes de symétrie a-t-elle ?



La première figure : un carré ABCD de 4 cm de côté et un cercle de rayon 1 cm centré au centre du carré.

INDICE

Outil : un axe de la figure doit être à la fois un axe du carré et un axe du cercle.

CORRIGÉ

Un axe de la figure doit être à la fois un axe du carré et un axe du cercle.

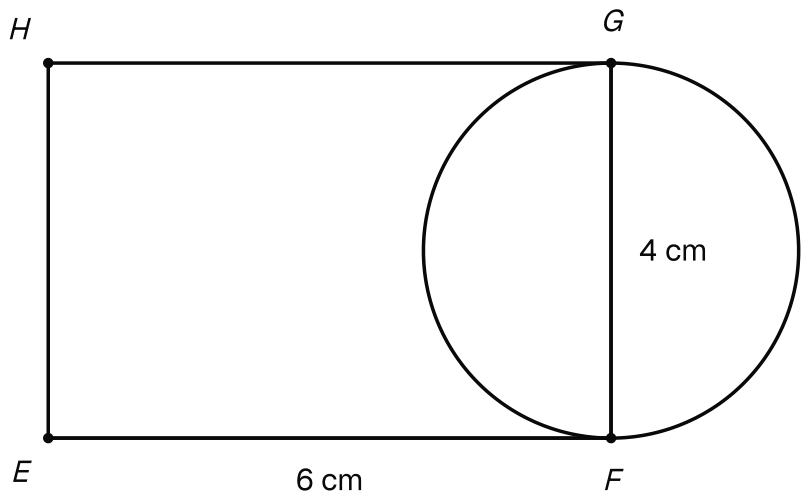
Les axes du carré. Rappel de 1re année : ses deux diagonales et les deux droites qui coupent deux côtés opposés en leur milieu, à angle droit, sont les quatre axes du carré.

Le cercle. Chacun de ces quatre axes passe par le centre du carré, qui est aussi le centre du cercle. Chaque axe du carré est donc un axe du cercle. Une droite qui n'est pas un axe du carré ne convient pas.

Conclusion. La figure a quatre axes de symétrie.

Un rectangle et un cercle

La figure est formée d'un rectangle $EFGH$ de 6 cm sur 4 cm, avec $EF = 6$ cm, et du cercle de diamètre $[FG]$. Combien d'axes de symétrie a-t-elle ?



La deuxième figure : le rectangle EFGH, avec EF = 6 cm et FG = 4 cm, et le cercle de diamètre [FG].

INDICE

Début : le rectangle a deux axes ; vérifie pour chacun où va le centre du cercle, qui est le milieu de $[FG]$.

CORRIGÉ

Le rectangle a deux axes. Le centre du cercle est le milieu de $[FG]$; on regarde où chaque axe l'envoie.

La médiatrice de $[FG]$. C'est un axe du rectangle, et elle passe par le centre du cercle : le cercle est son propre symétrique.

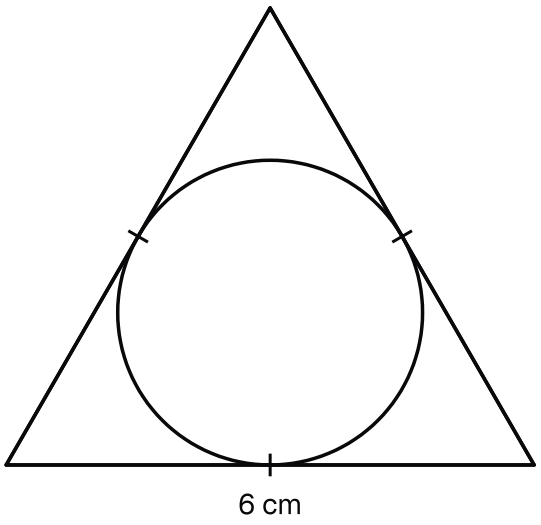
La médiatrice de $[EF]$. Elle enverrait le cercle sur le cercle de diamètre $[EH]$, qui n'est pas dans la figure.

Seule la médiatrice de $[FG]$ convient.

Conclusion. La figure a un seul axe de symétrie : la médiatrice de $[FG]$.

Un triangle et son cercle inscrit

La figure est formée d'un triangle équilatéral de 6 cm de côté et de son cercle inscrit. Combien d'axes de symétrie a-t-elle ?



La troisième figure : un triangle équilatéral de 6 cm de côté et son cercle inscrit, qui touche les trois côtés.

INDICE

Point délicat : rappel de 1re année : le centre du cercle inscrit est le point commun des bissectrices. Dans un triangle équilatéral, chaque médiatrice d'un côté porte aussi une bissectrice.

CORRIGÉ

Les axes du triangle. Le triangle équilatéral a trois axes : les médiatrices de ses côtés.

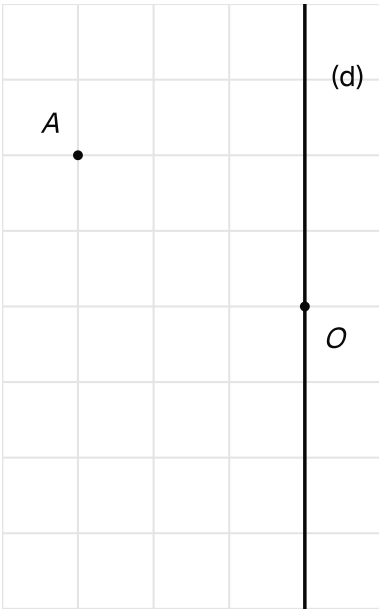
Le cercle inscrit. Chaque médiatrice porte une bissectrice du triangle. Elle passe donc par le centre du cercle inscrit, et c'est aussi un axe de ce cercle.

Conclusion. La figure a trois axes de symétrie.

Exercice 5

Par rapport à une droite ou à un point

Sur un quadrillage, l'axe (d) suit une ligne verticale et passe par un nœud O : un endroit où deux lignes du quadrillage se coupent. Pour aller de O à A : 3 carreaux vers la gauche, puis 2 carreaux vers le haut.



Les données : l'axe (d) vertical passe par le nœud O, et A est 3 carreaux à gauche puis 2 carreaux plus haut.

Par rapport à la droite

Place E, le symétrique de A par rapport à la droite (d).

INDICE

Outil : (d) doit être la médiatrice de $[AE]$.

CORRIGÉ

Le point A est à 3 carreaux à gauche de (d). Son symétrique E est sur la même ligne horizontale, à 3 carreaux à droite.

Contrôle : le segment $[AE]$ est horizontal, donc perpendiculaire à (d), et son milieu est sur (d). La droite (d) est bien la médiatrice de $[AE]$.

Conclusion. Pour aller de O à E : 3 carreaux vers la droite, puis 2 carreaux vers le haut.

Par rapport au point

Rappel de 1re année : le symétrique de A par rapport au point O est le point F tel que O soit le milieu de $[AF]$. Place F, puis compare E et F.

INDICE

Début : pour aller de O à F, fais le chemin de O à A à l'envers : gauche devient droite, haut devient bas.

CORRIGÉ

On refait le chemin de O à A à l'envers : la gauche devient la droite, le haut devient le bas. Le point O est alors le milieu de $[AF]$.

Pour aller de O à F : 3 carreaux vers la droite, puis 2 carreaux vers le bas.

Comparaison. Les points E et F sont sur la même ligne verticale, l'un 2 carreaux au-dessus de O, l'autre 2 carreaux au-dessous.

Conclusion. Les points E et F sont différents : ils sont à 4 carreaux l'un de l'autre.

Quand les deux coïncident

Le point K est sur la ligne horizontale de O, à 2 carreaux à gauche de O. Compare son symétrique par rapport à (d) et son symétrique par rapport à O.

INDICE

Point délicat : construis les deux symétriques séparément, avec chacune des deux règles.

CORRIGÉ

Par rapport à (d). Le point K est à 2 carreaux à gauche de (d), sur la ligne horizontale de O. Son symétrique est sur cette ligne, à 2 carreaux à droite de O.

Par rapport à O. On refait le chemin de O à K à l'envers : on arrive à 2 carreaux à droite de O.

C'est un cas particulier : K est sur la perpendiculaire à (d) en O. Pour A, on a obtenu deux points différents : ne confonds pas les deux symétries. Avec (d), l'axe est la médiatrice ; avec O, le centre est le milieu.

Conclusion. Les deux symétriques de K sont le même nœud, à 2 carreaux à droite de O.

Exercice 6

Rédiger avec l'alignement et le milieu

Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. On note A', B' et C' leurs symétriques par rapport à une droite (d). Rédige chaque réponse sur le modèle « On sait que… ; or… ; donc… ».

L'alignement

Justifie que A', B' et C' sont alignés.

INDICE

Outil : cherche la propriété de la symétrie axiale qui parle de points alignés.

CORRIGÉ

On sait que A, B et C sont alignés, et que A', B', C' sont leurs symétriques par rapport à (d).

Or la symétrie axiale conserve l'alignement.

Donc A', B' et C' sont alignés. Si tu construis la figure, ta règle passe par les trois points.

Conclusion. Les points A', B' et C' sont alignés.

Une longueur

Calcule AC, puis justifie la valeur de $A'C'$.

INDICE

Début : B est entre A et C, donc $AC = AB + BC$.

CORRIGÉ

Calcul de AC. Le point B est entre A et C, donc les longueurs s'ajoutent :

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}$$

Valeur de $A'C'$. On sait que A' et C' sont les symétriques de A et C par rapport à (d). Or la symétrie axiale conserve les distances. Donc $A'C' = AC = 8$ cm.

Conclusion. On a $AC = 8$ cm et $A'C' = 8$ cm.

Un milieu

Le point I est le milieu de $[AC]$. Calcule BI. Justifie que I' est le milieu de $[A'C']$, puis donne $B'I'$.

INDICE

Point délicat : place I sur ta figure : il est à 4 cm de A, donc au-delà de B.

CORRIGÉ

Calcul de BI. Le point I est le milieu de $[AC]$, donc :

$$AI = \frac{8}{2} = 4$$

On a $AI = 4$ cm et $AB = 3$ cm, et B est entre A et I :

$$BI = 4 - 3 = 1$$

Le milieu I'. On sait que I est le milieu de $[AC]$. Or la symétrie axiale conserve le milieu. Donc I' est le milieu de $[A'C']$.

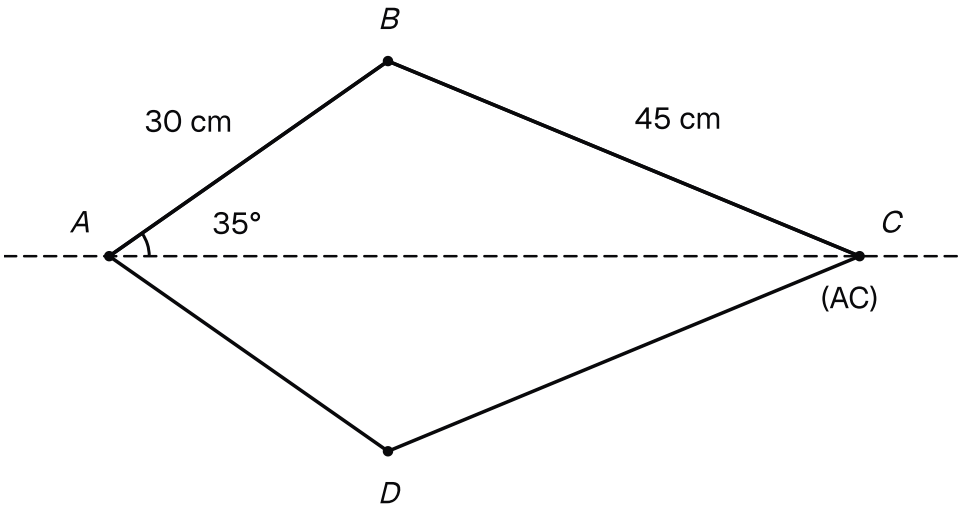
Valeur de $B'I'$. Les distances sont conservées : $B'I' = BI = 1$ cm.

Conclusion. On a $BI = 1$ cm, I' est le milieu de $[A'C']$, et $B'I'$ mesure 1 cm.

Exercice 7

Le cerf-volant

Un cerf-volant a la forme d'un quadrilatère $ABCD$. Sa baguette $[AC]$ est sur un axe de symétrie : D est le symétrique de B par rapport à la droite (AC). On mesure $AB = 30$ cm, $BC = 45$ cm et $\widehat{BAC} = 35°$.



Le cerf-volant ABCD, de baguette [AC] : AB = 30 cm, BC = 45 cm et un angle de 35 degrés en A entre [AB] et [AC].

Les côtés

Donne AD et CD. Justifie.

INDICE

Outil : A et C sont sur l'axe : quels sont leurs symétriques ?

CORRIGÉ

Les points A et C sont sur l'axe (AC) : chacun est son propre symétrique. Le symétrique de B est D.

Le symétrique de $[AB]$ est donc $[AD]$, et celui de $[CB]$ est $[CD]$. Or la symétrie axiale conserve les distances ; donc $AD = AB = 30$ cm et $CD = CB = 45$ cm.

Conclusion. On a $AD = 30$ cm et $CD = 45$ cm.

Les angles en A

Donne la mesure de $\widehat{DAC}$, puis celle de $\widehat{BAD}$.

INDICE

Début : l'angle $\widehat{DAC}$ est le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$ par rapport à (AC).

CORRIGÉ

L'angle $\widehat{DAC}$. Le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$ par rapport à (AC) est l'angle $\widehat{DAC}$. Or la symétrie axiale conserve les angles ; donc $\widehat{DAC} = 35°$.

L'angle $\widehat{BAD}$. La demi-droite $[AC)$ est entre $[AB)$ et $[AD)$, donc les deux angles s'ajoutent :

$$\begin{aligned}\widehat{BAD} &= 35° + 35° \\ &= 70°\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{DAC}$ mesure $35°$ et l'angle $\widehat{BAD}$ mesure $70°$.

Le ruban

On borde le cerf-volant d'un ruban. Quelle longueur de ruban faut-il ?

INDICE

Outil : la longueur du ruban est le périmètre du quadrilatère $ABCD$.

CORRIGÉ

La longueur du ruban est le périmètre de $ABCD$. Avec les côtés de la question 1 :

$$\begin{aligned}&AB + BC + CD + DA \\ &= 30 + 45 + 45 + 30 \\ &= 150\end{aligned}$$

Conclusion. Il faut 150 cm de ruban, soit $1{,}5$ m.